T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALLEE ETKİSİ VE STOKLAMAYA SAHİP BİR LOTKA-VOLTERRA REKABET MODELİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve DELİBAŞ
Danışman: Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN

VAN – 2025

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALLEE ETKİSİ VE STOKLAMAYA SAHİP BİR LOTKA-VOLTERRA REKABET MODELİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve DELİBAŞ

Tez Savunma Sınavı Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ (Başkan)

Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN (Danışman)

Dr. Öğr. Üyesi Cemil BÜYÜKADALI (Üye)

VAN – 2025

KABUL VE ONAY

Merve DELİBAŞ tarafından hazırlanan "Allee Etkisi ve Stoklamaya Sahip Bir Lotka-Volterra Rekabet Modeli" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.	
Üye : Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.	
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Cemil BÜYÜKADALI Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.	
Tez Savunma Tarihi:	...../……/…..…

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini ve imzaların sahiplerine ait olduğunu onaylıyorum.

……
Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza
Merve DELİBAŞ

ÖZET

ALLEE ETKİSİ VE STOKLAMAYA SAHİP BİR LOTKA-VOLTERRA REKABET MODELİ

DELİBAŞ, Merve
Yüksek Lisans Tezi, Matematik. Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN
Aralık 2025, 68 sayfa

Bu tez çalışması; giriş ve kaynak bildirimi, ana bölüm ile tartışma ve sonuç olmak üzere toplam dört ana bölümden oluşmaktadır. Tez çalışmasında, Klasik Lotka-Volterra rekabet modeline ilk önce her iki tür içinde Allee etkisinin gözlemlendiği sistemde aynı habitat paylaşan türlerden diğer türe nazaran daha fazla yok olma eğiliminde olan türe habitat dışından türün nüfusu ile orantılı bir şekilde stoklama yapılarak yeni bir model oluşturulmuştur. Bunun dışında çalışmada elde edilen modelin niteliksel analizi yapılmış ve buna bağlı simülasyonlarla elde edilen sonuçlar doğrulanmıştır.

Modelin temel köşe dengeleri, türlerin yokluğu veya tek başına varlığı durumlarını temsil etmekte olup, stoklama parametresi S'in özellikle Tür 1 üzerindeki etkisi denge yapısında kritik rol oynamaktadır. Analizler sonucunda, stoklamanın tür 1'in nullcline eğrisini yukarıya kaydırarak içsel dengelerin konumlarını değiştirdiği gösterilmiştir. Modelin denge noktalarının karalılık durumları için stoklama yapılmayan Tür 2'nin köşe denge noktalarının kararlılığı stoklama teriminin özel belirlenen parameter değerleri için Allee etkili Lotka-Volterra Rekabet modelinde olduğundan farklı olabildiği Tür 1'in köşe denge noktalarındaki kararlılığın değişmediği görülse de (0,0) denge noktasının stoklama parametresinin $A_1 r_1$(Stoklama yapılan türün Allee eşik değeri ile büyüme katsayısının çarpımı) ile olan büyüklük küçüklük durumu kararlılığı değiştirmiştir. İçsel denge noktalarının kararlılık durumu ise Allee etkili Lotka-Volterra Rekabet modelinde olduğu gibi değişmeden aynı şekilde kalmıştır. Sayısal simülasyonlarla elde edilen faz portreleri ve ısı haritaları, analitik bulguları doğrulamış; stoklama parametresine bağlı olarak türlerin yok oluşu, eşik altında kalışı veya taşıma kapasitesi civarında dengelenişi görselleştirilmiştir.

Sonuç olarak, Stoklamalı ve Allee etkili Lotka–Volterra rekabet modeli hem analitik hem de sayısal yöntemlerle incelenmiş, kritik stoklama eşikleri tanımlanmış ve bu eşiklerin türlerin birlikte yaşama ya da yok olma senaryoları üzerindeki belirleyici rolleri ortaya konmuştur. Bu çalışma göstermektedir ki stoklama, türlerin korunması açısından güçlü bir araçtır; ancak her iki türde de Allee etkisinin varlığı göz ardı edildiğinde, uygulanan stoklama programları ekosistem dengesini bozarak bazı türlerin yok olmasına neden olabilir. Bu nedenle stoklama stratejileri yalnızca hedef türün değil, aynı zamanda rekabetçi türlerin de Allee eşikleri ve taşıma kapasiteleri dikkate alınarak planlanmalıdır. Böylece bu çalışma, stoklama uygulamalarının ekolojik dengeyi koruma ve türlerin sürdürülebilirliğini sağlama açısından taşıdığı önemi matematiksel bir çerçevede ortaya koymaktadır.

Anahtar kelimeler: Allee etkisi, Çatallanma analizi, Denge noktaları, Ekosistem yönetimi, Kararlılık analizi, Lotka–Volterra rekabet modeli, Sayısal simülasyonlar, Stoklama, Sürdürülebilirlik.

ABSTRACT

A LOTKA-VOLTERRA COMPETITION MODEL WITH ALLEE EFFECT AND STOCKING

DELİBAŞ, Merve
M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN
December 2025, 68 pages

This thesis consists of four main sections: an introduction and references, the main body, and the discussion and conclusion. In this study, a new model is developed based on the classical Lotka–Volterra competition model by incorporating the Allee effect for both species. In the proposed system, for the species sharing the same habitat and exhibiting a higher tendency toward extinction compared to the competing species, a stocking strategy proportional to the population size of the species introduced from outside the habitat is implemented. In addition, a qualitative analysis of the model obtained in the study was conducted, and the results obtained were validated through simulations.

The fundamental corner equilibria of the model represent the absence of species or the persistence of a single species, and the stocking parameter S plays a critical role in the equilibrium structure, particularly through its effect on Species 1. The analysis demonstrates that stocking shifts the nullcline of Species 1 upward, thereby altering the locations of the interior equilibria. Regarding the stability properties of the equilibrium points, it is shown that the stability of the corner equilibria associated with Species 2, which is not subjected to stocking, may differ from those in the classical Lotka–Volterra competition model with Allee effects for specific choices of the stocking parameter. Although the stability of the corner equilibria corresponding to Species 1 remains unchanged, the stability of the trivial equilibrium (0,0) is affected by the relative magnitude of the stocking parameter with respect to $A_1 r_1$(The product of the Allee threshold value and the growth rate of the stocked species). The stability of the interior equilibrium points remains unchanged, consistent with the Lotka–Volterra competition model incorporating Allee effects. Phase portraits and heat maps obtained from numerical simulations confirm the analytical results and visualize species extinction, persistence below the Allee threshold, or stabilization near the carrying capacity depending on the value of the stocking parameter.

In conclusion, the Lotka–Volterra competition model incorporating both stocking and Allee effects is investigated using analytical and numerical approaches. Critical stocking thresholds are identified, and their decisive roles in determining coexistence or extinction scenarios are clearly demonstrated. This study shows that stocking can be a powerful tool for species conservation; however, if the presence of Allee effects in both species is neglected, stocking programs may disrupt ecosystem balance and potentially lead to the extinction of certain species. Therefore, stocking strategies should be designed by considering not only the target species but also the Allee thresholds and carrying capacities of competing species. In this way, the present study highlights, within a mathematical framework, the importance of stocking practices in maintaining ecological balance and ensuring species sustainability.

Keywords: Allee effect, Bifurcation analysis, Ecosystem management, Equilibrium points, Lotka–Volterra competition model, Numerical simulations, Stability analysis, Stocking, Sustainability.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanması sürecinde,

Değerli bilgi ve birikimiyle bana yol gösteren, her aşamada sabırla destek olan kıymetli danışmanım Sayın Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN'e teşekkür ederim.

Ayrıca, karşılaştığım tüm zorluklarla başa çıkabilmemi sağlayan ve bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan canım aileme; her daim yanımda olan kıymetli dostum ve arkadaşım Nimet EMSAL'e; eğitim sürecim boyunca bilgi ve birikimleriyle akademik gelişimime katkı sağlayan Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünün değerli akademisyenlerine; desteklerini esirgemeyen Erciş Yahya Kemal Beyatlı Ortaokulu'nun kıymetli idarecilerine ve öğretmenlerine; Son olarak hayatıma anlam katan ve varlıkları ile bana güç veren tüm dostlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

2025

Merve DELİBAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT iii
TEŞEKKÜR v
İÇİNDEKİLER vii
ÇİZELGELER LİSTESİ ix
ŞEKİLLER LİSTESİ xi
SİMGELER VE KISALTMALAR xiii
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ 13
3. ALLEE ETKİSİ VE STOKLAMAYA SAHİP BİR LOTKA-VOLTERRA REKABET MODELİ 21
3.1 Modelin oluşturulması 21
3.2 Modelin Niteliksel Analizi 24
3.2.1 Model için nullcline eğrileri ve buna bağlı olarak denge noktalarının belirlenmesi 25
3.2.2 Model için denge noktaların kararlılık durumlarının incelenmesi 32
3.2.3 Modelin Faz portresi ve Isı Haritası gibi simülasyonlarla analizi 47
4. TARTIŞMA VE SONUÇ 59
KAYNAKLAR 65
ÖZ GEÇMİŞ 68

ÇİZELGELER LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 Model (3.1) için her iki türünde köşe denge noktalarının kararlılık durumlarını sağlayan en verimli stoklama parametreleri……61

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 Rekabet halindeki bir türün stoklama yapılmadan önce ve stoklama yapıldıktan sonraki nullcline eğrisleri 27
Şekil 3.2 Rekabet halindeki türlerden stoklama yapılmayana ait olan nullcline eğrisi .. 28
Şekil 3.3 Rekabet halindeki iki türün nullcline eğrilerinin oluşturabileceği içsel denge durumları ……31
Şekil 3.4 Rekabet halindeki iki türün oluşturduğu içsel denge noktalarının temsili yerleri……32
Şekil 3.5 Rekabet halindeki türlerden stoklama yapılan türün eksenleri kestiği denge noktalarının stoklamaya bağlı değişim durumu……42
Şekil 3.6 Modele ait örnek faz portresi……48
Şekil 3.7 Modele ait örnek faz portresi……49
Şekil 3.8 Modele ait örnek faz portresi……50
Şekil 3.9 Modele ait örnek faz portresi……51
Şekil 3.10 Modele ait örnek faz portresi……..52
Şekil 3.11 Modele ait örnek faz portresi……..53
Şekil 3.12 Modele ait örnek faz portresi……..54
Şekil 3.13 Modele ait örnek faz portresi……..55
Şekil 3.14 Modele ait örnek faz portresi……..56
Şekil 3.15 Modele ait örnek ısı haritası……....57

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamalarıyla aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
A_1, A_2	Bir popülasyon türünün hızla yok olma eğilimine gireceği kritik nüfus değeri olan Allee eşik değeri
α_{12}, α_{21}	Bir habitat içinde rekabet halinde bulunan iki türün birbirlerine karşı uyguladıkları türler arası rekabet katsayısı
$\det(J)$	Jakobiyen matrisinin determinantı
$\frac{dN}{dt}$	Bir popülasyondaki türün nüfusunun zamana bağlı değişim denklemi
E_1	Stoklama etkisiyle Tür 1'in nullcline eğrisinin ekseni kestiği Allee eşiğinden daha küçük eksen denge değeri
$f_1(N_1, N_2), f_2(N_1, N_2)$	Sırayla Tür 1 ve Tür 2'nin popülasyon değişim fonksiyonları
J	Jakobiyen matrisi
K_1, K_2	Bir popülasyon türünün bulunduğu habitat içinde maksimum verimlilikle ulaşabileceği en yüksek nüfus değeri olan taşıma kapasitesi
N_1, N_2	Bir popülasyon türünün bulunduğu habitat içinde anlık nüfus değeri
N_1^*, N_2^*	Her iki türün nullcline eğrilerinin kesiştiği türlerin popülasyon büyüklüğünün içsel denge değerleri
r_1, r_2	Bir popülasyon türünün habitat içinde nüfusunun zamana bağlı büyüme oranı
S	Bir popülasyona dışarıdan suni olarak aynı türden birey eklenerek yapılan stoklama katsayısı

S_C	Kritik stoklama eşiği
S_{max}	Bir habitat içinde bir türe yapılabilecek en büyük stoklama katsayısı
S_{min}	Bir habitat içinde bir türe yapılabilecek en düşük stoklama katsayısı
T_1	Stoklama etkisiyle Tür 1'in nullcline eğrisinin ekseni kestiği taşıma kapasitesinden daha büyük olan eksen denge değeri
$\mathbf{tr}(J)$	Jakobiyen matrisinin izi
$\frac{\partial f}{\partial N}$	Tür 1 ve Tür 2'nin popülasyon değişim fonksiyonlarının her iki tür ile olan kısmi türevleri
(N_1, N_2)	İki türün bulunduğu bir rekabet sisteminin denge noktası

1. GİRİŞ

Bir habitat içinde yaşayan tüm organizmalar yaşamın bir gerekliliği olarak büyür, çoğalır ve ölür. Yaşam şartları ve kullandıkları kaynaklar büyümesini etkiler. Ancak hiçbir organizma bu habitat içinde tek başına yaşayamaz. Her bir organizma, yaşamının en azından bir kısmında, kendi türünden bireylerden oluşan bir popülasyona üyedir ve bu popülasyondaki üyelerle aynı habitatı paylaşırlar. Bu nedenle aynı türün bireylerinin tümü hayatta kalma, büyüme ve üreme gibi benzer ihtiyaçları ortaya çıkmaktadır; ancak bir kaynağa olan tüm istekleri, habitatın kaynaklar için yeterliliğini aşabilir. Bundan dolayı da bireyler kaynak için rekabet eder ve beklendik bir şekilde en azından bazıları kaynaklara yeteri kadar ulaşamazlar. Bu da tür içinde bir kaosa sebep olarak aynı türün bireylerinin birbirlerinin nüfusunu baskılama eğilimi göstermesine sebep olur ki bu aslında tür içi rekabetin bir tanımıdır. Rekabet, bireyler arasında, bir kaynağa olan isteği için ortak bir gereksinimden kaynaklanan ve en azından bu bireylerin bazılarının hayatta kalma, büyüme ve üremesinde belirli seviyede azalmaya yol açan ve hatta bazılarının yok olmasına sebep olan bir etkileşimdir. (Begon vd., 2006).

Bir ekosistem içinde yaşayan farklı türler çoğu zaman bulundukları habitatta kaynakların sınırlı olmasından dolayı birbirleriyle hem olumlu hem de olumsuz yönden bir birliktelik oluşturabilirler. Bu birliktelik türler arası rekabetin ortaya çıkmasına sebep olur. Türler arası rekabetin temelinde, bir türün bireylerinin kaynakları daha fazla tüketmesi veya başka bir türün bireylerinin etkisiyle o türde doğurganlık, büyüme ya da hayatta kalma oranlarının düşmesi yatar. Bu rekabet, rekabet halindeki türlerin popülasyon dinamiklerini etkiler ve bu dinamikler de türlerin dağılımlarını ve habitatta yaşamını sürdürmesini etkileyebilir ki bu ilişkiler çoğunlukla matematiksel modeller aracılığıyla incelenmektedir. Yapılan deney ve gözlemlerin sonuçları, türler arası rekabetin ekolojik etkilerinin incelenmesinde kritik bir soruyu vurgulamaktadır: Farklı türlerin bir arada var olmasına sağlayan genel koşullar nelerdir ve hangi koşullar rekabet sonucunda bir türün yok olmasına yol açar? Matematiksel modeller bu sorulara önemli cevaplar vermişlerdir (Begon vd., 2006).

Türler etkileşime girdiğinde, her türün popülasyon dinamikleri doğal olarak etkilenir ki bu popülasyon dinamiği, ekolojik türlerin nüfusunda zaman içindeki artış, azalma ve etkileşim süreçlerini konu alır. Doğada bulunan türlerin birey sayılarında meydana gelen değişimler, çevresel koşullar, genetik yapı, davranış özellikleri ve

fizyolojik faktörler gibi çok sayıda olgunun bir araya gelmesiyle oluşur (Begon vd., 2006). Bu tür karmaşık durumları çoğu zaman sadece deney ve gözlem ile tam anlamıyla açıklamak, zaman ve maliyet açısından sıkıntı olmasıyla birlikte mevcut örneklere ulaşmanın da çoğu zaman mümkün olmaması nedeniyle zordur. Bu nedenle durumu özetleyip genelleyecek matematiksel modellerin oluşturulup kullanılması tüm bu zorlukları ortadan kaldırarak daha hızlı ve güvenli bilgiler elde etmeyi sağlar. Bu tür matematiksel modeller kullanmak, biyolojik süreçlerin daha doğru anlaşılmasını ve türlerin birbirleriyle olan durumlarını özetlemesi açısından çalışmalarda vazgeçilmez bir yaklaşım olmuştur.

Canlı türleri arasındaki yoğun ve karmaşık ilişkilerin hâkim olduğu ekolojik yapılar, zaman içinde değişen dinamik süreçler barındırır. Bu süreçleri anlamak için kullanılan matematiksel modeller, bilim insanlarına sistemin davranışlarını öngörme ve analiz etme olanağı sunar. Popülasyon dinamiği, bu bağlamda tek bir türün ya da birden fazla türün belirli bir zaman aralığındaki nüfus değişimlerini inceleyen önemli bir araştırma konusudur (Murray, 2002). Çevresel değişkenler, kaynakların kısıtlılığı ve türler arası ilişkiler, popülasyon büyüklüklerinde dalgalanmalara yol açar. Bu durum hem teorik ekoloji hem de biyoçeşitliliğin korunması ve sürdürülebilir doğal kaynak yönetimi açısından kritik önem taşır.

Matematiksel modeller, popülasyonların büyüklüklerinin zamanla nasıl değiştiğini tahmin etmeyi sağlar. Bu tahminler, ekosistemi koruma çabaları, doğal kaynak yönetimi, salgın hastalıkların yayılması gibi pek çok uygulamada büyük bir yere sahiptir (Hastings,1997). Yani ister türlerin yaş dağılımı ister nesli tükenme tehlikesi altında olan bir türün popülasyonu, ister bakteri veya virüs gibi mikroskobik canlıların büyümesi olsun, popülasyon biyolojisinde gerçeğe daha yakın ve pratik olarak kullanışlı matematiksel modellerin artan bir şekilde çalışılması, bu modellerin ilgili dinamik süreçlerini daha iyi anlamayı ve gerçekçi tahminlerde bulunmayı sağlamada önemli bir yere sahiptir (Murray, 2002).

Popülasyon dinamikleri, popülasyon sayılarının zaman ve mekânda nasıl ve neden değiştiğini inceleyen bir alandır. Bu nedenle popülasyon dinamiklerini incelemek amacıyla geliştirilen matematiksel modeller, çoğunlukla diferansiyel denklemler biçiminde ifade edilir. Bu modellerin temel hedefi, birey sayısının zaman içerisindeki değişimini belirleyen etkenleri ortaya koymak, uzun vadede ortaya çıkabilecek eğilimleri

analiz etmek ve popülasyonların gelecekteki durumuna ilişkin tahminler yapmaktır (Turchin, 2003).

Tarihsel olarak popülasyon büyümesini tanımlamak için kullanılan en basit yaklaşım, bir popülasyondaki tüm bireylerin aynı çevresel koşullara maruz kaldığı durumda büyümenin üssel olarak gerçekleştiğini kabul eder; buna göre popülasyon, nüfus arttıkça daha hızlı büyür ya da tam tersine azalır. (Turchin, 2003). Bu model matematiksel olarak şu şekilde gösterilir:

$$\frac{dN}{dt} = rN \tag{1.1}$$

Eşitlik (1.1) bir üstel büyüme modelidir. Burada N popülasyon büyüklüğünü, r ise birey başına büyüme oranını ifade eder. Bu model, sınırsız kaynak ve ideal çevre koşulları altında geçerlidir, ancak doğal ortamda böyle ideal koşullar nadiren görülür.

Popülasyon büyümesinin daha gerçekçi modellenebilmesi için, sınırlı kaynaklar, çevresel zorluklar ve alanın kısıtlı olması gibi bileşenlerin de modele dahil edilmesi gerekir. Tüm bu beklentileri karşılamak açısından, 19. yüzyılda Pierre-François Verhulst tarafından ortaya konulan lojistik büyüme modeli Eşitlik (1.2) ile formüle edilir:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{1.2}$$

Burada N ile popülasyonun büyüklüğü, t ile geçen zaman, r ile de birey başına düşen sabit büyüme oranı ve K ile popülasyonun taşıma kapasitesi verilmektedir. Popülasyonun büyüklüğü K'ya yaklaştıkça, büyüme oranı sıfıra yaklaşır. Bu nedenle model, doğada sıklıkla gözlenen büyüme-doygunluk ilişkisini matematiksel olarak temsil eder (Murray, 2002).

Doğal ekosistemlerde farklı türlerin bir arada yaşaması, bu türlerin aynı kaynaklar için yarışmasına ve dolayısıyla rekabet etmesine yol açar. Rekabet, canlılar arasında hayatta kalma ve üreme başarısını etkileyen temel etkileşim biçimlerinden biridir. Kaynakların sınırlı olması durumunda, bir türün popülasyonu arttıkça diğer türlerin

kaynaklara erişimi azalır. Bu da doğrudan popülasyon büyüme oranlarını etkiler (Begon vd., 2006).

Popülasyon dinamiği ile ilgili belirtilen tüm modeller, yalnızca tek bir türün büyümesini değil, aynı zamanda birden fazla tür arasındaki etkileşimleri de inceleyebilir. Yani gerçek popülasyonlar ekosistem içinde izole bir şekilde var olmazlar, aksine diğer tür popülasyonların barınma ve beslenme alanlarını paylaşırlar. Çoğu durumda, aynı habitatı paylaşan türler arasında mutualizm, parazitlik, avlanma, rekabet veya diğer birçok ekolojik etkileşimlerle bir araya gelirler. Bu nedenle, gerçekçi modeller bu tür ekolojik etkileşimleri de hesaba katmalıdır. Özellikle mutualizm, yırtıcı–av ilişkisi ve rekabet gibi popülasyon etkileşimleri, ekolojik dengeyi önemli ölçüde etkileyebilir. Bunlardan en yaygın biçimde çalışmalara konu olanı rekabet etkileşimidir. İki türün aynı sınırlı kaynak için rekabet ettiği durumlarda, türlerin büyüme oranları karşılıklı olarak etkilenir. Bu etkileşimi açıklamak üzere geliştirilen Lotka–Volterra rekabet modeli, her iki türün büyümesini hem kendi iç dinamikleri (doğal büyüme ve taşıma kapasitesi) hem de diğer türle olan etkileşimleri üzerinden tanımlar (Begon vd., 2006).

1920'lerde, Alfred J. Lotka (1925) ve Vito Volterra (1926) bağımsız olarak, türler arası rekabeti matematiksel olarak modellemek için iki önemli model geliştirmişlerdir. Bu modeller, biyolojik popülasyonların dinamiklerini anlamada matematiğin gücünü gösteren ilk örneklerdendir. Lotka-Volterra rekabet modeli olarak bilinen bu yaklaşım, iki türün aynı ekosistemde kaynaklar için rekabet etmesini, her bir türün kendi iç dinamikleri ve karşı tarafın etkileriyle birlikte tanımlar. Lotka-Volterra rekabet modeli, iki türün popülasyon büyüklüklerinin zamana bağlı değişimini aşağıdaki Eşitlik (1.3) 'teki diferansiyel denklemlerle ifade eder:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12}\frac{N_2}{K_2}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21}\frac{N_1}{K_1}\right) \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Burada, N_1 ve N_2, sırasıyla Tür 1 ve Tür 2'nin popülasyon büyüklüklerini, r_1 ve r_2 her iki türün birey başına büyüme oranlarını, K_1 ve K_2 türlerin taşıma kapasitelerini, α_{12} ve α_{21} türler arası rekabet katsayılarını ifade eder. α_{12} ve α_{21} parametreleri, bir türün diğer tür üzerindeki rekabet baskısının, kendi türü içindeki rekabet baskısına oranıdır. Örneğin,

α_{12} büyüklüğü, Tür 2 bireylerinin, Tür 1 bireyleri üzerindeki rekabet etkisini gösterir. Burada rekabet, hem tür içi (aynı türün bireyleri arasında) hem de türler arası (farklı türler arasında) olarak iki temel şekilde incelenir.

Modelin temel varsayımı, her bir tür en fazla kendi taşıma kapasitesine kadar büyür ve ayrıca diğer türlerin nüfusunda artış yaşanması, bahsi geçen türün nüfusunu baskılayarak azaltabilir. Eğer α_{12} ve α_{21} değerleri küçük ise, türler arası rekabet zayıftır ve türler bir arada yaşayabilir. Ancak yüksek rekabet katsayıları, bir türün diğerini baskılayarak yok etmesine neden olabilir.

Lotka-Volterra modeli aynı zamanda ekolojik rekabetçi dışlama ilkesinin matematiksel bir temsili olarak da kabul edilir. Bu ilkeye göre, iki tür aynı nişi yani türlerin büyümesine etki eden habitat, kaynaklar, çevresel koşullar ve yaptıkları tüm faaliyetleri paylaşırsa ve rekabet çok şiddetliyse, zamanla sadece biri hayatta kalır (Begon vd., 2006). Lotka-Volterra rekabet modeli, türlerin birbirleriyle etkileşimlerini anlamada temel bir araçtır. Ekoloji, koruma biyolojisi, kaynak yönetimi ve istilacı türlerin kontrolü gibi birçok alanda uygulanmıştır (Begon vd., 2006). Ayrıca, model sayesinde ekolojik sistemlerin kararlılık analizleri yapılabilir, hangi parametrelerde türlerin birlikte yaşayabileceği veya birinin yok olacağı tahmin edilebilir. Bu sayede doğal popülasyonların sürdürülebilirliği için stratejiler geliştirilebilir (Murray, 2002).

Lotka-Volterra modeli basit ve sezgiseldir; ancak doğadaki karmaşık ilişkileri tam olarak yansıtmayabilir. Model, ortam heterojenliğini, mevsimsel değişiklikleri, yaş ve cinsiyet yapısını, genetik çeşitliliği ve Allee etkisi gibi düşük popülasyon yoğunluğunda ortaya çıkan dinamikleri içermez (Courchamp vd., 2008). Bu nedenle, günümüzde Lotka-Volterra temelli modeller sık sık ek faktörler ve daha gerçekçi bileşenlerle zenginleştirilmekte ve geliştirilmekte, böylece hem temel hem de uygulamalı ekoloji için güçlü araçlar ortaya konmaktadır (Kuperman ve Abramson, 2007).

Lotka–Volterra modeliyle birlikte, popülasyon dinamiği modellemelerinde göz ardı edilen bir diğer önemli unsur Allee etkisidir. Popülasyon dinamiğinde klasik büyüme modelleri, küçük popülasyon büyüklüklerinin genellikle hızlı büyüme fırsatı sunduğunu varsayar. Ancak doğada bu durum her zaman geçerli değildir. Bazı türlerde birey sayısı çok azaldığında, hayatta kalma ve üreme başarısı da önemli ölçüde düşer. Bu tür durumlar, Allee etkisi olarak bilinen özel bir popülasyon dinamiği fenomeniyle açıklanır. İlk olarak 1930'larda Warder Clyde Allee tarafından tanımlanan bu kavram, türlerin birey

sayısı kritik bir eşik değerin altına düştüğünde, popülasyon büyüme oranlarının negatif etkilenmesini ifade eder. (Allee, 1938). Allee etkisi, özellikle küçük popülasyonlar, nesli tükenme tehlikesi altında olan türler ve koruma biyolojisi açısından kritik bir öneme sahiptir (Courchamp vd., 2008).

Allee etkisi, bireylerin az sayıda olduğu durumlarda karşılaşılan çeşitli biyolojik zorlukları içerir. Bunlar arasında şunlar sayılabilir: (a) Eş bulma zorluğu**:** Özellikle üreme için eş arayan türlerde düşük birey sayısı eşlerin bulunmasını zorlaştırır, bu da üreme başarısını azaltır. (b) Kollektif savunma eksikliği**:** Sürü halinde yaşayan hayvanlar, yırtıcılara karşı topluca savunma mekanizmaları geliştirir. Birey sayısı azaldığında bu savunma zayıflar. (c) Sosyalleşme ve iş birliği eksikliği**:** Bazı türler için sosyal etkileşimler, beslenme, barınma veya yavruların bakımı için kritiktir. Düşük nüfus bu işlevleri zorlaştırır. (d) Genetik çeşitlilik kaybı**:** Küçük popülasyonlarda genetik çeşitlilik azalır, bu da hastalıklara karşı direncin ve adaptasyon yeteneğinin düşmesine yol açar. Bu nedenlerle, popülasyon büyüklüğü belli bir kritik değerin altına düştüğünde büyüme oranı azalır hatta negatif olabilir. Böylece popülasyon yok olma riskine girer.

Kuperman ve Abramson (2007), etkileşimli türler arasında Allee etkisinin varlığını araştırdıkları çalışmalarında, bu etkinin yalnızca tek başına değil, aynı zamanda diğer türlerle olan ilişkilerde de belirleyici olduğunu göstermiştir. Özellikle çift yönlü rekabet ilişkilerinde Allee etkisinin dahil edilmesi, sistemin çoklu denge noktalarına, bistabilitelere yani bir parametreye bağlı olarak denge noktalarının kararlılık durumunun değişmesi ve yok oluş senaryolarına yol açabileceğini ortaya koymuştur. Bu bağlamda modelin parametrelerine ve başlangıç koşullarına bağlı olarak sistemin kaderi dramatik şekilde değişebilmektedir.

Buna bağlı olarak Lotka-Volterra rekabet modeline Allee etkisi dahil edildiğinde model aşağıdaki Eşitlik (1.4)' e evrilmiş olur:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right)(N_1 - A_1) - \frac{r_1 \alpha_{12} N_2 N_1}{K_1} \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right)(N_2 - A_2) - \frac{r_2 \alpha_{21} N_1 N_2}{K_2}\end{aligned} \tag{1.4}$$

Burada, N_1 ile Tür 1'in popülasyonunun birey sayısı, N_2 ile Tür 2'nin popülasyonunun birey sayısı, r_1 ile Tür 1'in büyüme hızı, r_2 ile Tür 2'nin büyüme hızı, K_1 ile Tür 1'in

popülasyonunun taşıma kapasitesi, K_2 ile Tür 2'nin popülasyonunun taşıma kapasitesi, α_{12} ile Tür 2'in Tür 1 üzerine uyguladığı rekabet katsayısı, α_{21} ile Tür 1'in Tür 2 üzerine uyguladığı rekabet katsayısı, A_1 ile Tür 1'in kritik Allee eşik değeri ve A_2 ile Tür 2'nin kritik Allee eşik değeri belirtilmektedir.

Allee etkili rekabet modellerinde popülasyon dinamikleri, birey sayısına bağlı olarak iki farklı biyolojik mekanizmanın etkisi altında şekillenir: (i) Düşük popülasyon yoğunluklarında pozitif Allee etkisi ve (ii) Yüksek yoğunluklarda ise rekabetin neden olduğu negatif yoğunluğa bağımlılığın etkisi. Bu yapı, bir türün büyüme oranının düşük yoğunlukta artış göstermesini, ancak belirli bir yoğunluğun üzerinde rekabet nedeniyle azalmasını ifade eder. Yani türler arası rekabet ortamında Allee etkisi, popülasyonların uzun vadeli sürdürülebilirliği üzerinde kritik bir rol oynamaktadır. Allee etkisi, bir popülasyonun yoğunluğu belirli bir eşik değerin altına düştüğünde büyüme oranının negatif etkilenmesi şeklinde tanımlanır. (Courchamp vd., 2008).

Popülasyon dinamiğini etkileyen önemli dışsal faktörlerden biri stoklama (stocking) uygulamalarıdır. Stoklama, doğaya insan eliyle birey ekleyerek popülasyon büyüklüğünü artırmayı amaçlayan bir müdahale yöntemidir. Özellikle balıkçılık, ekosistem restorasyonu ve nesli tehlike altında olan türlerin desteklenmesinde yaygın olarak uygulanmaktadır. Ancak stoklama, sadece hedef türü değil, aynı zamanda rekabet halinde olduğu diğer türleri de etkileyebilir. Bu durum, yerli türlerin baskılanmasına, ekolojik dengenin bozulmasına veya beklenmedik ekosistem tepkilerine yol açabilir (Lorenzen, 2005).

Özellikle yerli türler gibi daha az yaygın ve daha dar habitat aralığına sahip türler için bu durum, popülasyon çöküşü riskini artırmaktadır. Bu noktada Allee etkisini aşmak ve nesli tehlike altındaki popülasyonları desteklemek amacıyla stoklama stratejileri uygulanmakta, yani kuluçka merkezlerinde üretilen bireyler doğaya salınarak popülasyon yoğunluğu artırılmaya çalışılmaktadır. Ancak bu uygulama, istilacı türlerin lehine dengesizlikler yaratarak yerli türlerle olan rekabeti daha da artırabilmekte ve bu durum ekosistem dengesini olumsuz etkileyebilmektedir. Sonuç olarak istilacı türler ve nispeten zayıf diğer türler arasındaki etkileşimler, yalnızca ekolojik değil aynı zamanda evrimsel ve yönetimsel açıdan da önemli sonuçlar doğurmakta olup, Allee etkisinin popülasyon dinamikleri üzerindeki rolü dikkate alındığında stoklama gibi müdahale stratejilerinin ekosistem temelli ve uzun vadeli bir yaklaşımla planlanması gereklidir. Stoklama

yöntemi, alabalık gibi türlerin popülasyonlarını artırmak ve ekosistem dengesini sağlamak amacıyla yaygın olarak kullanılan bir stratejidir. Bu yöntem, balıkların yavru aşamasında yetiştirilip doğal su ortamlarına bırakılmasını içerir. Stoklama işlemi, balıkların üreme dönemine girmeden önce gerçekleştirilir; bu sayede popülasyonların hızla gelişmesi sağlanır ve türlerin sürdürülebilirliği artar (Lassiter, 2007).

Stoklama sürecinde, yavru balıklar uygun yaş ve büyüklüğe ulaştığında hedeflenen su alanlarına bırakılır. Bu aşamada, yavru balıkların doğal ortamda, diğer balık türlerinin etkisiyle daha hızlı büyüyüp, uygun üreme için gerekli popülasyon yoğunluğuna ulaşmaları beklenir. Eğer stoklama, daha büyük balıklar için yapılıyorsa, bu balıklar belirli sularda serbest bırakılır. Ancak genellikle, stoklama, balıkların büyüme aşamasına gelene kadar kontrollü bir ortamda yapılır (Almeida vd., 2015).

Balık popülasyon dinamiklerinin anlaşılmasında stok ve alım ilişkisi, türlerin sürdürülebilirliği açısından temel bir kavram olarak kabul edilmektedir. Bu çerçevede Ricker (1954), "Stock and Recruitment" başlıklı klasik çalışmasında balık popülasyonlarının büyüklüğü ile bu popülasyonlardan elde edilen yavru bireylerin sayısı arasındaki ilişkiyi inceleyerek alana önemli katkılar sağlamıştır. Ricker, stok seviyelerinin ve bu stoklardan üretilen yavru miktarının, türlerin devamlılığı ve sürdürülebilir üretkenliği için belirleyici olduğunu vurgulamış; özellikle popülasyon yoğunluğunun yavru sayısı üzerindeki etkisini ele alarak üretkenlik kapasitesinin yoğunluk bağımlı süreçlerle şekillendiğini ortaya koymuştur. Bu çalışma, stok–alım dinamiklerini açıklayan modellerin geliştirilmesine öncülük etmiş ve sonraki yıllarda yapılan birçok ekolojik ve balıkçılık biyolojisi araştırmasının teorik temelini oluşturmuştur.

Stoklama işlemi, balıkların üreme dönemine girmeden önce yapılır. Bu şekilde, popülasyonların hızla gelişmesi sağlanır ve türlerin sürdürülebilirliği artar. Stoklama, sadece doğal türleri desteklemekle kalmaz, aynı zamanda rekabetçi etkileşimleri yönetmek ve ekosistem sağlığını korumak için de önemli bir stratejidir. Bu uygulamalar, uzun vadeli ekosistem yönetimi ve biyolojik çeşitliliğin korunması açısından kritik bir rol oynamaktadır (Gonzalez ve Thompson, 2012).

Tehdit altındaki sucul türlerde genetik çeşitliliğin korunması, türün uzun vadeli sürdürülebilirliği açısından kritik bir öneme sahiptir. Bu kapsamda Nock ve arkadaşları (2011), Avustralya'nın doğusundaki Clarence Nehri sisteminde yaşayan ve nesli tükenme

tehlikesi altında bulunan Doğu Tatlı Su Morinası üzerinde yürüttükleri çalışmada, popülasyonun mekânsal ve zamansal genetik çeşitliliğini mikrosatelit belirteçleri kullanarak incelemiştir. Araştırma, kuluçkahane temelli yetiştirme ve stoklama programlarının, yerel olarak yok olmuş popülasyonların yeniden oluşturulması ve mevcut popülasyonların desteklenmesi amacıyla yaygın biçimde uygulandığını göstermektedir. Bununla birlikte çalışma, genetik çeşitlilik ve popülasyon yapısının dikkate alınmadığı yanlış stoklama uygulamalarının, koruma hedeflerinin aksine, doğal popülasyonların genetik bütünlüğünü zayıflatabileceğine dikkat çekerek, koruma biyolojisinde genetik bilginin yönetim stratejilerine entegre edilmesinin önemini açıkça ortaya koymaktadır.

Tüm bu nedenlerden dolayı stoklama etkileri matematiksel modellerde dikkatle incelenmeli ve analiz edilmelidir.

Matematiksel modellerde denge noktalarının kararlılık analizi, sistemin uzun dönem davranışını anlamada temel bir araçtır. Kararlılık analizi, denge noktalarının küçük sarsıntılara karşı direnç gösterip göstermediğini değerlendirir. Kararlı denge noktaları sistemin bu durumlara geri dönmesini sağlarken, kararsız denge noktaları sistemin farklı dinamik davranışlar göstermesine neden olur (Strogatz, 2018). Popülasyon dinamiği modellerinde bu analiz, türlerin kalıcı olarak varlığını sürdürebilme ya da yok olma yönündeki kaderini belirler (Murray, 2002).

Kararlılık durumları, sistemin Jakobiyen matrisinin özdeğerlerine bağlıdır. İki boyutlu sistemlerde, Jakobiyen matrisinin iz (trace) ve determinant değerleri kararlılığı hızlıca belirlemeye olanak tanır (Kuznetsov, 2004). Özellikle;

(i) Pozitif determinant ve negatif iz değerleri, özdeğerlerin negatif reel kısma sahip olduğunu gösterir ve denge noktası asimptotik olarak kararlıdır; yani sistem küçük sarsıntılardan sonra dengeye geri döner (Kuznetsov, 2004).

(ii) Negatif determinant ise zıt işaretli özdeğerler anlamına gelir ve bu durumda denge noktası kararsızdır (Kuznetsov, 2004).

(iii) İz sıfır olduğunda sistem sınır duruma gelir ve bu noktada çatallanma gibi karmaşık dinamikler ortaya çıkabilir (Kuznetsov, 2004; Strogatz, 2015).

Asimptotik kararlılık, sistemin başlangıç koşullarındaki küçük farklılıklara rağmen zamanla denge noktasına dönmesini ifade eder ve popülasyonların sürdürülebilirliği için kritik öneme sahiptir (Murray, 2002). Diğer kararlılık türleri ise

sistemin denge çevresinde kalmasını (yalnızca kararlılık) ya da kararsız hale gelerek popülasyonun kontrol dışı değişimine yol açabilir (Strogatz, 2015).

Ayrıca kararlılık durumları faz portresindeki değişime bağlı olarak aşağıdaki şekillerde görülebilir.

Sınır Tipinde stabilite değişimi: bir denge noktasının sistemin tanımlı olduğu faz uzayının sınırında yer aldığı ve bir parametrenin kritik bir değerinde bu denge noktasının kararlılık özelliğinin değiştiği bifurkasyon türüdür. Bu tür stabilite değişiminde, denge noktası faz uzayının içinden sınırına taşınabilir ya da sınır üzerindeki bir denge, kararlı durumdan kararsız duruma (veya tersi) geçebilir. Sınır tipindeki stabilite değişimleri özellikle biyolojik ve ekolojik modellerde, türlerin yok oluşu veya tek başına kalıcılığı gibi durumları temsil eden köşe denge noktalarında ortaya çıkar.

Kararsız eyer noktası: Bir denge noktası, bazı yönlerde çözümlerden uzaklaşılıp bazı yönlerde dengeye yaklaşılıyorsa eyer (saddle) noktası olarak adlandırılır. Lineerleştirilmiş sistemin Jakobiyen matrisinin özdeğerlerinden en az biri pozitif gerçek kısma ve en az biri negatif gerçek kısma sahipse, bu denge noktası kararsızdır ve kararsız eyer noktası olarak sınıflandırılır.

Kararsız düğüm noktası: Bir denge noktası, lineerleştirilmiş sistemin Jakobiyen matrisinin tüm özdeğerlerinin gerçek kısmı pozitif olduğunda kararsızdır. Özdeğerler reel ve aynı işaretliyse, bu denge noktası bir düğüm (node) olarak sınıflandırılır. Bu durumda çözümler denge noktasından tüm yönlerde uzaklaşır ve denge noktası kararsız düğüm olarak adlandırılır

Kararlı düğüm noktası: Bir denge noktası, lineerleştirilmiş sistemin Jakobiyen matrisinin tüm özdeğerlerinin gerçek kısmı negatif olduğunda asimptotik olarak kararlıdır. Özdeğerler reel ve aynı işaretliyse, bu denge noktası bir düğüm (node) olarak sınıflandırılır ve kararlı düğüm adı verilir.

Çatallanma analizi ise model parametrelerindeki kritik değerlerde sistem davranışında ani ve niteliksel değişikliklerin ortaya çıkmasını inceler. Bu kritik noktalar, yeni denge noktalarının oluşmasına, periyodik döngülere veya kaotik hareketlere yol açabilir (Kuznetsov, 2004). Ekolojik modellerde sıkça karşılaşılan çatallanma türleri arasında süperkritik ve subkritik pitchfork, saddle-node (eyer-düğüm) ve Hopf çatallanmaları yer alır (Strogatz, 2015). Bu çatallanmalar, tür popülasyonlarının kritik eşiklerin altına düşmesi veya parametre değişiklikleriyle sistemin aniden yok olma veya

patlayıcı büyüme gibi karmaşık davranışlar göstermesini anlamada büyük önem taşır (Courchamp vd., 2008).

Bu bağlamda, bu çalışmada iki türün rekabet ilişkisini tanımlayan klasik Lotka–Volterra modeli, iki önemli faktörle genişletilmiştir: her iki türde Allee etkisinin varlığı ve bir tür üzerinde stoklama uygulanması. Bu şekilde hem küçük popülasyonların karşılaştığı zorluklar hem de stoklamanın etkileri eşzamanlı olarak modellenmektedir.

Bu tez çalışmasında, Allee etkisi ve stoklamayı içeren Lotka–Volterra rekabet modelinde denge noktalarının yerel kararlılık analizleri detaylı olarak gerçekleştirilecektir. Buna bağlı olarak çeşitli parametre değerleri kullanılarak çeşitli simülasyonlar kullanılarak elde edilen bulgular doğrulanacaktır. Böylece ekolojik sistemlerde türlerin birlikte varlığını sürdürebilme koşulları ve insan müdahalelerinin etkileri kapsamlı biçimde değerlendirilecektir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bu bölümde çalışma boyunca faydalanılan ve model için literatürdeki eksiklerin ortaya çıkarılması ve modelin oluşturulmasında faydalanılan kaynaklar verilmiştir.

Tilman (1982), ekosistemlerdeki türlerin hayatta kalma ve çeşitliliğini, kaynak rekabeti açısından incelemiştir. Türlerin popülasyon büyüklüğünün, sınırlı kaynaklar üzerindeki rekabetle nasıl şekillendiğini araştırmış ve bu rekabetin türlerin topluluk yapıları üzerindeki etkilerini modellemiştir. Kaynakların sınırlı olduğu ortamlarda, farklı türlerin rekabet üstünlükleri ve zayıflıkları belirginleşir. Türlerin kaynak kullanımı üzerindeki farklı stratejilerinin, ekosistemlerdeki tür çeşitliliği ve topluluk yapısını nasıl belirlediğine dair önemli bulgular sunmuştur. Bu çalışmanın, ekosistem dinamikleri ve tür çeşitliliği üzerine yapılan pek çok sonraki araştırma için temel bir kaynak oluşturduğu söylenebilir.

Burgman vd. (1993), nüfus yaşayabilirlik analizinin türlerin hayatta kalma olasılıklarını değerlendirmek için güçlü bir araç olduğunu ve belirsizliklerin yönetilmesinin önemli olduğunu vurgulamışlardır. Bu yöntem, türlerin yok olma risklerini belirlemek ve etkili koruma stratejileri geliştirmek için bilimsel bir temel sağlamaktadır. Rekebet modellerinde kitlesel yok oluş üzerine odaklanarak istilacı türlerin bulunduğu habitat içinde zayıf türlerin daha çabuk yok olacağını bununla birlikte türün çevresel etkilere karşı dirençsiz duruma düşecek şekilde evrileceği bir süreç oluşacağına değinmiştir.

Stephens vd. (1999), Allee etkisinin net bir tanımının olmaması sebebi ile olayı açıklamaya çalışmışlardır. Allee etkisini aynı türden bireylerin varlığının bir bireyin zindeliği ve popülasyondaki nüfus büyüklüğünün üzerindeki pozitif ilişkisi olarak yeniden tanımlamış, tanımdaki karmaşıklığı gidermek için bu etkilerin zindeliğin tek bir bileşeninin aynı bileşen Allee etkisi olan eş bulma ve bir araya gelme gibi durumlarla nüfus sayısının birlikte arttığı ve toplam zindeliğin hayatta kalma ve üreme gibi demografik seviyeleri nüfusla birlikte iyileşmesi gibi iki bileşene ayrılması gerektiğini önermişlerdir. Ayrıca ortamda artan yırtıcı gibi etkilerinde Allee eşiğini etkilediğine değinmişlerdir.

Courchamp vd. (2008), iş birliği ve rekabet ortamlarında Allee etkisine değinmişler. Yok oluş tehdidine karşı iş birliği geliştirme mekanizmasının Allee etkisinden kaynaklandığını, Allee etkisinin ekoloji ve koruma biyolojisindeki kritik Bu

bölümde çalışma boyunca faydalanılan ve model için literatürdeki eksiklerin ortaya çıkarılması ve modelin oluşturulmasında faydalanılan kaynaklar verilmiştir.

Tilman (1982), ekosistemlerdeki türlerin hayatta kalma ve çeşitliliğini, kaynak rekabeti açısından incelemiştir. Türlerin popülasyon büyüklüğünün, sınırlı kaynaklar üzerindeki rekabetle nasıl şekillendiğini araştırmış ve bu rekabetin türlerin topluluk yapıları üzerindeki etkilerini modellemiştir. Kaynakların sınırlı olduğu ortamlarda, farklı türlerin rekabet üstünlükleri ve zayıflıkları belirginleşir. Türlerin kaynak kullanımı üzerindeki farklı stratejilerinin, ekosistemlerdeki tür çeşitliliği ve topluluk yapısını nasıl belirlediğine dair önemli bulgular sunmuştur. Bu çalışmanın, ekosistem dinamikleri ve tür çeşitliliği üzerine yapılan pek çok sonraki araştırma için temel bir kaynak oluşturduğu söylenebilir.

Burgman vd. (1993), nüfus yaşayabilirlik analizinin türlerin hayatta kalma olasılıklarını değerlendirmek için güçlü bir araç olduğunu ve belirsizliklerin yönetilmesinin önemli olduğunu vurgulamışlardır. Bu yöntem, türlerin yok olma risklerini belirlemek ve etkili koruma stratejileri geliştirmek için bilimsel bir temel sağlamaktadır. Rekebet modellerinde kitlesel yok oluş üzerine odaklanarak istilacı türlerin bulunduğu habitat içinde zayıf türlerin daha çabuk yok olacağını bununla birlikte türün çevresel etkilere karşı dirençsiz duruma düşecek şekilde evrileceği bir süreç oluşacağına değinmiştir.

Stephens vd. (1999), Allee etkisinin net bir tanımının olmaması sebebi ile olayı açıklamaya çalışmışlardır. Allee etkisini aynı türden bireylerin varlığının bir bireyin zindeliği ve popülasyondaki nüfus büyüklüğünün üzerindeki pozitif ilişkisi olarak yeniden tanımlamış, tanımdaki karmaşıklığı gidermek için bu etkilerin zindeliğin tek bir bileşeninin aynı bileşen Allee etkisi olan eş bulma ve bir araya gelme gibi durumlarla nüfus sayısının birlikte arttığı ve toplam zindeliğin hayatta kalma ve üreme gibi demografik seviyeleri nüfusla birlikte iyileşmesi gibi iki bileşene ayrılması gerektiğini önermişlerdir. Ayrıca ortamda artan yırtıcı gibi etkilerinde Allee eşiğini etkilediğine değinmişlerdir.

rolünü vurgulayarak, küçük popülasyonların dinamikleri, yok olma riskleri ve türlerin hayatta kalma olasılıkları üzerindeki etkilerini detaylı bir şekilde ele almışlardır. Özellikle, nesli tükenme tehlikesi altındaki türlerin korunmasında Allee etkisinin dikkate alınmasının önemine dikkat çekmişlerdir.

Livadiotis ve Elaydi (2012), iki türlü popülasyon dinamiklerinde genel Allee etkisinin sistemin uzun vadeli davranışına nasıl etki ettiğini incelemiş ve her iki türde de Allee etkisinin bulunması durumunda popülasyonun yok olma riskinin arttığını göstermişlerdir. Çalışmalarında, belirli parametreler altında türlerin birlikte var olabileceğini veya rekabetin bir türün baskın hale gelmesine neden olabileceğini ortaya koymuşlardır. Tüm bu durumları faz portreleri üzerinde göstermiş ve durumu Allee etkisi altında ayrıca simüle etmiştir. Bu bağlamda, Allee etkisi yalnızca bireysel türlerin hayatta kalma ihtimali açısından değil, ekosistemlerin genel kararlılığı üzerinde de belirleyici bir rol oynamaktadır.

Elaydi ve Yakubu (2002), Lotka-Volterra rekabet modeline stoklama etkisini dahil ederek, stoklamanın popülasyon dinamikleri üzerindeki rolünü ve döngülerin küresel kararlılığını incelediklerini belirtmişlerdir. Çalışmada, stoklamanın uygun stratejilerle uygulanması durumunda rekabet eden türlerin yok olmasını önleyerek, popülasyonların sürdürülebilirliğini sağlayabileceği vurgulanmıştır.

AlSharawi ve Rhouma (2008), rekabetçi dışlama ortamında zayıf türün yok olmasını önlemek için stoklama ve hasat stratejilerini incelemiş ve dikkatli stoklamanın türlerin bir arada varlığını sürdürebileceğini göstermiştir. Ayrıca, belirli parametreler altında baskın türün sürekli hasat edilmesinin zayıf türün hayatta kalmasını garanti edebileceğini vurgulamışlardır.

Chen vd. (2023) Allee ve korku etkilerinin birlikte bulunduğu iki türe sahip rekabetçi sistemin dinamiklerini incelemişler. Çalışmalarını

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right)(x - m)$$

ile verilen Allee etkisinin dahil olduğu lojistik modeli kullanarak başlamışlardır. Burada $(x - m)$ Allee mekanizması olarak belirtilmiştir. Daha sonra korku etkisini de dahil ederek aşağıdaki modele ulaşmışlardır:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right)(x - m) - axu$$

$$\frac{du}{dt} = -bu + cx$$

Burada axu ifadesi ile x türüne ait korku durumu gösterilmiş olup, korku etkisi nüfusa orantılı olarak verilmiştir. Bu da türünün korku katsayısındaki artışla nüfusun azalacağını göstermiştir. Ayrıca model için çatallanma incelemesi yapılarak sistemin korku etkisine bağlı birlikte yaşama durumlarının nasıl farklılaştıklarını gösterilmiştir. Allee etkisinin ve korku etkisinin sistemin yok olma dinamiklerini ve pozitif denge noktalarının sayısını değiştirdiği, ancak pozitif dengelerin kararlılığını etkilemediği sonucuna ulaşılmış ve Allee veya korku parametresini değiştirerek sistemde çatallanmalara neden olan bazı özel dinamikler de gösterilmiştir. Bununla birlikte, Allee etkisinin korku etkisiyle birlikte çalışarak, yalnızca korku etkisinin mevcut olduğu küçük korku rejimlerinde sistemin dinamik davranışında çeşitli nitel değişikliklere yol açabileceğini, yani, korku parametresinin küçük miktarları için, rekabetçi dışlanmanın türü daha güçlü rekabet eden bir türe dönüştürebilir olduğunu göstermişlerdir. Bununla birlikte sistemin Allee etkisine sahip olmasıyla korku durumunun daha yüksek nüfuslu popülasyonlara karşı türü daha güçsüz hale getirdiği gösterilmiştir.

Gavina vd. (2017) Allee ve kalabalık etkilerinin birlikte bulunduğu iki türe sahip rekabetçi sistemin dinamiklerini incelemiş ve Allee etkisi ve kalabalık etkisini aşağıdaki şekilde modellemiştir:

$$\frac{dx_1}{dt} = b_1 x_1(1 - x_1 - a_{12}x_2) - m_1 x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = b_2 x_2(1 - x_2 - a_{21}x_1) - m_2 x_2$$

Her iki türünde taşıma kapasitesi 1'e eşit olarak belirlenen dönüştürülmüş bu Lotka-Volterra rekabet modelinde yazar b_1 ve b_2 ile türün doğum oranını, a_{12} ve a_{21} ile türlerin birbirine karşı uyguladığı rekabet oranını ve m_1 ve m_2 ile türlerin kalabalık etkisene ait olan katsayıyı ifade etmiştir. Yazarlar klasik Lotka-Volterra Rekabet modelinde birlikte var olma durumunun sadece türler arası rekabetin tür içi rekabetten küçük olması gerekliliğinden dolayı kalabalık etkisini de modele dahil ederek daha fazla türün bir arada yaşamasını garanti altına almışlardır. Burada kalabalıklaşan habitatta nüfusun gittikçe azaldığı yani olumsuz sonuçlara sebep olan bir sonuca ulaştığına değinilmiştir. Başka bir deyişle nüfusun artmasıyla ölüm oranı da artmaktadır. Ayrıca sistemi yüksek yoğunlukta kalabalık etkisi düşük yoğunlukta da Allee etkisinin devreye girdiği bir formda

sunmuşlardır. Bu durum sistemi türlerin birlikte yaşama elverişli bir sistematik kazandırmaya çalışmıştır. Dahası doğrusal olmayan rekabet terimlerini de kalabalık etkisine dahil ederek modeli sadece doğum oranları değil ölüm oranlarının da dahil edildiği genelleyici bir modelle türlerin birbirleriyle olan rekabet durumunu özetlemişlerdir.

Wang vd. (1999) doğum ve ölüm durumunu gösteren,

$$\frac{dN}{dt} = N(B - D)$$

modelini kullanarak çalışmalarına temel oluşturmuşlardır. Burada N ile nüfus büyüklüğü, B ile yetişkin bireylerin doğum oranı ve D ile de ölüm oranı temsil edilmiştir. Bu bir ortak habitat için yeterli bir model olmadığı için,

$$\frac{dN}{dt} = bN\left(1 - \frac{N}{R}\right) - DN$$

modelini kullanmışlardır. Burada b diğer bireylerin etkisi olmaksızın kişi başına düşen doğum oranı yani rekabetin olmaması durumu, R ile kişi başına düşen doğum oranının sıfır olduğu değer olarak belirlemişler ve bu modele Allee etkisinide dahil edince iki türlü rekabet modelini aşağıdaki şekilde ifade etmişlerdir:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1\left[b_1\left(1 - \frac{N_1 + \alpha N_2}{R_1}\right)\left(\frac{N_1}{N_1 + C_1}\right) - D_1\right]$$
$$\frac{dN_2}{dt} = N_2\left[b_2\left(1 - \frac{N_2 + \beta N_1}{R_2}\right)\left(\frac{N_2}{N_2 + C_2}\right) - D_2\right]$$

Burada $i = 1{,}2$ için $\frac{N_i}{N_i + C_i}$ Allee etkisi için kullanılan terim iken C Allee sabitidir. Bu Allee eşik değeri ne kadar küçük olursa Allee etkisi bireyi o kadar fazla etkileyecektir. Bu çalışma boyunca her iki türün de rekabet ile nüfus durumları incelenmiş, Allee etkisinin iki tür arasındaki rekabetçi sistemlerde alternatif kararlı durumlara yol açabileceğini kanıtlanmıştır. Bununla birlikte böyle sistemlerde, türler arası rekabet yoğun olduğunda, popülasyon yoğunlukları yüksek olsa bile her iki tür de yok olabilir

iken, Lotka-Volterra rekabet sistemleriyle karşılaştırıldığında, Allee etkisini içeren sistemlerin belirgin şekilde dengesizleştiği gösterilmiştir.

Kuperman ve Abramson (2007), Allee etkisinin etkileşim halindeki türlerin popülasyon dinamikleri üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Önce Allee etkisini lojistik modele entegre etmişler ve aşağıdaki modele ulaşmışlardır:

$$\frac{dx}{dt} = rx(x-a)\left(1-\frac{x}{K}\right)$$

Sadece tür içi rekabeti baz alan modellerine Allee etkisini dahil etmeleri türün çevresel etkiler ve habitat yeterliliği göz önüne alınarak nüfusun Allee eşik değeri altına düşme durumundaki farklılaşmalar incelenmiştir. Daha sonra Allee etkisini aşağıdaki şekilde Lotka-Volterra rekabet modeline dahil etmişlerdir. Bunu yaparken de modeli boyutsuzlaştırarak sistemi daha düşük parametre değerlerine aşağıdaki gibi uygun hale getirmişlerdir:

$$\dot{u}_1 = u_1(1-u_1-\alpha_{12}u_2)(u_1-t_1)$$
$$\dot{u}_2 = u_2(1-u_2-\alpha_{21}u_1)(u_2-t_2)$$

Burada Allee etkisinden dolayı sistemin Lotka-Volterra rekabet modeline ek olarak 5 yeni denge noktası ortaya çıktığını göstererek sistem için kritik durumlar incelenmiş ve Allee etkisinin varlığının, düşük popülasyon yoğunluğunda türlerin büyüme oranlarını olumsuz şekilde etkileyebileceğini ve bu durumun türlerin yok olma riskini artırabileceğini göstermişlerdir. Sonuç olarak, Allee etkisinin türlerin hayatta kalma şansını azaltarak, popülasyonların kararsız hale gelmesine ve yok olmasına yol açabileceği sonucuna ulaşmışlardır.

Jang (2013) her iki rakip popülasyonun da Allee etkilerine maruz kaldığı klasik Lotka-Volterra rekabet modelini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$$x' = r_1 x\left(1-\frac{x}{K_1}\right)(x-a_1) - \frac{r_1 c_1 xy}{K_1}$$
$$y' = r_2 y\left(1-\frac{y}{K_2}\right)(y-a_2) - \frac{r_2 c_2 xy}{K_2}$$

Burada $r_1$ve r_2 parametreleri türlerin büyüme katsayıları, K_1 ve K_2 türlerin popülasyonlarına ait taşıma kapasiteleri, c_1 Tür 2'nin Tür 1 üzerindeki rekabet katsayısı, c_2 Tür 1'nin Tür 2 üzerindeki rekabet katsayısı iken a_1 ve a_2 türlerin kritik Allee eşik değerleri olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada her iki türünde nullcline eğrileri belirlenmiş ve allee eşik değerinden dolayı nullcline eğrileri her iki ekseni de iki farklı bölgede kesmiştir. Bu nedenle sistemin 5 köşe denge noktası olmasının yanında sistemin en fazla dört iç denge noktası belirlenmiştir. Farklı parametre değerleri için sistemin asimptotik dinamikleri incelenmiştir. Böyle bir durumda, başlangıç koşullarına bağlı olarak her iki popülasyonun da yok olabileceği, birlikte var olabileceği veya bir popülasyonun diğerini yok oluşa sürükleyebileceği kanıtlanmıştır.

De Silva 2014 yılında yaptığı tez çalışmasında tek bir türe Allee etkisi uygulamış diğer türü ise lojistik model formunda vermiştir. Bu durumda Tür 1 daha güçsüz duruma düştüğü ve rekabette kazanma ve birlikte var olmada başarısız olduğu için bu türe stoklama terimini uygulamış ve bu nedenle diğer türe karşı rekabet edebilecek bir nüfus gücü eklemiştir. Model aşağıdaki formda sunulmuştur:

$$x' = r_1 x(1-x)(x-a_1) + s_1 x - c_1 xy$$
$$y' = y(1-y) - c_2 xy$$

Modele başlangıçta her iki türede türler arası ve tür içi rekabetin etki ettiği vurgulanması açısından $(1-x)$, $(1-y)$, $c_1 xy$ ve $c_2 xy$ parametreleri kullanmış ve x türünün yoğun kaybını engellemek için $s_1 x$ ile sürekli stoklama yapmıştır. Yazar daha sonra sistemin denge noktalarını belirlemiş ve bu denge noktalarının kararlılık durumunu göstererek her iki türünde birlikte var olacağı $s_1 > a_1 r_1$ değerlerin varlığını simülasyonlar ile göstermiştir. Ayrıca rekabetçi dışlama ilkesi nedeniyle çok yüksek stoklamaların x türünün her zaman kazanacağı y türünün her zaman kaybedeceği bir senaryoya sebep olan stoklama değerleri belirlemiş ve her iki türünde birlikteliği olan içsel birlikte noktalarına değinmiştir. Burada elde edilen sonuçlar, De Silva ve Jang (2015) çalışmasında sunulmuştur.

3. ALLEE ETKİSİ VE STOKLAMAYA SAHİP BİR LOTKA-VOLTERRA REKABET MODELİ

3.1 Modelin oluşturulması

İki farklı türün aynı habitat içinde yaşamını sürdüğü bir sistem düşünelim. Bu türlerden birisi genetik yatkınlık ve nüfus yoğunluğunun fazla olmasıyla birlikte yüksek üreme potansiyeline sahip bir istilacı tür olsun. Diğer tür ise bu istilacı türe karşı çok fazla şansı olmayan daha az üreme potansiyeli olan ve habitat için bulunması gerekli bir tür olsun. Bu iki tür de belli bir değerin altındaki nüfuslarda hızla yok olma eğiliminde olduğu Allee eşik değerlerinin olduğu bir yapıya sahiptir. O halde, bu iki türde aynı ortamda olması sebebi ile hem besin hem üreme hem de uygun çevresel koşulları elde etmede daha istekli olması halinde, zaten kısıtlı olan kaynaklar için rekabet etmeye başlayacak ve ne yazık ki istilacı tür her konuda daha güçlü olmasından dolayı bu rekabeti kazanacaktır. Bu durumda diğer tür yok olma sürecine girecektir. Ancak bu türün istilacı tür karşısında hayatta kalabilmesi için dışarıdan aynı türden erişkin bireylerin sürekli olarak bu ortama dahil edilmesi gerekir. Bu noktada Allee etkisini aşmak ve nesli tehlike altındaki popülasyonları desteklemek amacıyla stoklama stratejileri uygulandığını, yani kuluçka merkezlerinde üretilen bireylerin doğaya salınması yoluyla popülasyon yoğunluğunun artırılmaya çalışıldığını kabul edelim.

Burada ana amaç istilacı tür ile rekabet halinde olan türün popülasyonundaki düşüşle Allee eşiğine inmeden bu türü hayatta tutmak, bununla birlikte de zayıf yerli türün stoklama ile nüfusunun ani artışı ile istilacı türü Allee eşiğine çekmeden birlikte yaşam formu oluşturmaktır. Bu sayede ekosistemin sürekliliği sağlanacağı ön görülmektedir.

Model, Lotka-Volterra rekabet denklemlerine Allee etkisini dahil ederek, türler arasındaki rekabetin ve popülasyon büyümesinin stoklama stratejisiyle nasıl etkileşime girdiğini matematiksel olarak analiz edecektir. Bu sayede, stoklamanın her iki tür üzerinde yaratacağı etkilerin yanı sıra, ekosistem dinamiklerinin nasıl şekillendiği daha net bir şekilde öngörülebilecektir.

Bu durumda model aşağıda verilen biçimde olacaktır:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1\left(1-\frac{N_1}{K_1}\right)(N_1-A_1)-\frac{\alpha_{12}N_2N_1}{K_1}+SN_1\\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2\left(1-\frac{N_2}{K_2}\right)(N_2-A_2)-\frac{\alpha_{21}N_1N_2}{K_2}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada, N_1 ve N_2 ile sırasıyla Tür 1 ve Tür 2'nin popülasyon büyüklükleri, K_1 ve K_2 ile sırasıyla Tür 1 ve Tür 2 popülasyonlarının taşıma kapasiteleri, A_1 ve A_2 ile sırasıyla Tür 1 ve Tür 2 popülasyonlarının kritik Allee eşik değerleri, r_1 ve r_2 ile sırasıyla Tür 1 ve Tür 2 popülasyonlarının büyüme oranları, α_{12} ve α_{21} ile sırasıyla Tür 1 ve Tür 2 popülasyonlarının birbirleriyle olan rekabet katsayısı ve S ile Tür 1'e eklenen stok katsayısı temsil edilmekte olup tüm bu parametreler pozitif değere sahiptir. Ayrıca stoklama katsayısı $S > 0$ olarak kabul edilerek hasat durumu konu dışı bırakılmıştır.

O halde modelin önemli yapısal özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Popülasyon büyüklükleri $N_1, N_2 > 0$ koşuluyla pozitif dörtte birlik $\mathbb{R}^2_+$ bölgesinde değişmezdir. Yani popülasyon dinamikleri negatif değerlere inemez.
2. Her iki tür de stoklama dışındaki kısımlarda kübik büyüme yapısına sahiptir: Allee etkisi $(N_i - A_i)$ ile düşük yoğunlukta yok oluş riski, taşıma kapasitesi $\left(1-\frac{N_i}{K_i}\right)$ ile de yüksek yoğunlukta doyma etkisi birlikte modellenmiştir.
3. Rekabet etkileşimi $-\frac{\alpha_{12}N_iN_j}{K_i}$ biçimindedir ve türler arası simetrik olmayabilir.
4. Stoklama yalnızca Tür 1 üzerinde etkilidir ve SN_1 terimiyle modele dahil edilmiştir.

Stoklama terimi, Tür 1 nüfusuyla orantılı olacak şekilde ve popülasyonun sürekliliğini sağlamak amacıyla stoklama katsayısı S ile çarpılarak modellenmiştir. Böylece, Tür 1'in Allee etkisinden kaynaklanan kritik nüfus eşik değerinin altına düşmesi engellenmiş, düşük nüfus seviyelerinde bile hayatta kalabilme imkânı sağlanmış olacağı düşünülmektedir.

Bu mekanizma, Tür 1'i Tür 2 karşısında daha dayanıklı hale getirebilirken, Tür 1'in sürekli stoklama sonucu habitatta aşırı çoğalması, Tür 2 üzerindeki rekabet baskısını artırmakta ve Tür 2'nin Allee eşiğinin altına düşerek yok olma riskiyle karşılaşmasına

neden olacağı öngörülmektedir. Bu istenmeyen senaryo, stoklama katsayısının uygun parametre değerleriyle gerçekleştirilen simülasyonlar yoluyla açıkça ortaya konulacaktır.

Modelde amaçlardan biri de stoklama katsayısının artmasıyla Tür 1 popülasyonunun büyüme hızı artarken, Tür 2'nin nüfusu Allee eşiği A_2'nin altına düşerek azalmaya başlayacaktır. Bu durum, ekosistem dengesinin bozulmasına ve biyolojik çeşitliliğin azalmasına neden olacaktır.

Stoklama katsayısının optimizasyonu, ekosistem dinamiklerinin sürdürülebilirliği açısından kritik öneme sahiptir. Uygun stoklama katsayısı değerleri,

$$S_{\min} < S < S_{\max}$$

şeklinde bir aralıkta seçilerek, Tür 1'in popülasyonunun Allee eşik değerinin altına inmesi engellenirken, Tür 2'nin ekolojik nişi de korunmaktadır. Böylelikle, türler arası rekabet dengede tutulmakta ve her iki türün uzun vadeli varlığı desteklenmektedir.

Bununla birlikte, stoklama katsayısının aşırı yüksek değerleri, Tür 1'in aşırı çoğalmasına yol açarak kaynakların tükenmesine ve Tür 2'nin kritik seviyelerin altına inerek yok olma riskinin artmasına sebep olabilir. Bu nedenle, model parametrelerinin hassas bir şekilde düzenlenmesi ve stoklama etkisinin türler arası rekabet üzerindeki etkilerinin kapsamlı simülasyonlarla değerlendirilmesi gerekmektedir.

Sonuç olarak, geliştirilen model, türler arası rekabet dinamikleri ve Allee etkisini bütüncül biçimde ele alarak, istilacı türler karşısında daha zayıf olan türlerin hayatta kalma stratejilerini incelenecek ve stoklama mekanizmasının ekosistem dengesi üzerindeki etkisini matematiksel olarak ortaya koyacaktır. Bu yaklaşım, koruma biyolojisi ve ekolojik yönetim uygulamalarında önemli çıkarımlar sağlayacaktır.

Alternatif senaryolarda ise, stoklama teriminin Tür 1 nüfusunun aşırı artmasına neden olarak Tür 2 üzerindeki rekabet baskısını önemli ölçüde artırdığı düşünülmektedir. Bu durum, Tür 2'nin nüfusunun Allee eşiğinin altına inmesine ve yok olma riskinin ortaya çıkmasına yol açmaktadır. Böyle bir sonucun, ekosistem dengesinin bozulması ve biyolojik çeşitliliğin azalması sonuçlarını doğuracağı tahmin edilmektedir.

Tür 1'in aşırı dayanıklı hale gelmesi, istilacı tür olarak Tür 2'nin doğal ekosistem içindeki rolünü zayıflatmakta ve rekabet dengesini tek taraflı olarak Tür 1 lehine

kaydırarak, bu istenmeyen ekolojik durumun, stoklama katsayısının yüksek değerlerde seçilmesinin zararlı etkilerini ortaya koyacağı amaçlanmıştır.

Bu nedenle, stoklama mekanizmasının türler arası rekabet dinamikleri üzerindeki etkileri dikkatle incelenmeli ve parametrelerin aşırı uç değerlerden kaçınılarak dengeli bir şekilde optimize edilmesi sağlanmalıdır. Sürdürülebilir ekosistem yönetimi açısından bu yaklaşım büyük önem taşımaktadır.

Modelde, yok olma tehlikesi altında bulunan Tür 1 popülasyonuna belirli bir stoklama seviyesi uygulandığında, bu türün Allee eşiğinin üzerine çıkarak Tür 2 popülasyonuna karşı daha dirençli hale geldiği varsayılmaktadır. Bu varsayım doğrultusunda, türler arası rekabet dinamiklerini ve stoklamanın etkisini inceleyebilmek amacıyla modelimize ilişkin hem niteliksel hem de grafiksel analizler gerçekleştirilecektir. Bu kapsamda, ilk olarak her iki tür için nullcline (sıfır çizgi) eğrileri belirlenecek, ardından denge noktaları tespit edilerek bu noktaların kararlılığı doğrusal kararlılık analizi yöntemiyle incelenecektir. Böylece sistemin uzun vadeli dinamik davranışları ve stoklamanın türlerin sürdürülebilirliğine etkisi değerlendirilecektir.

3.2 Modelin Niteliksel Analizi

Matematiksel bir modelin niteliksel analizi, sistemin dinamik davranışlarını anlamak ve gelecekteki olası senaryoları tahmin etmek için temel bir yaklaşımdır (Strogatz, 2018). Bu analiz süreci, modelin denge noktalarının belirlenmesi, bu noktaların stabilite özelliklerinin incelenmesi ve faz portresi kullanılarak kararlılık bölgeleri ile çekicilerin görselleştirilmesini kapsar (Perko, 2013). Ayrıca, çatallanma analizi yardımıyla parametre değişimlerinin sistem dinamikleri üzerindeki etkileri değerlendirilebilir (Kuznetsov, 2004).

Bu yöntemler sayesinde, modelin uzun dönemli davranışları hakkında önemli çıkarımlar yapılabilir. Örneğin, Murray (2002), niteliksel analizlerin biyolojik sistemlerde denge noktalarının kararlılıklarını, popülasyonların devamlılığını veya yok oluşunu ve parametre değişimleriyle ortaya çıkabilecek çatallanmaları anlamak için temel bir gereklilik olduğunu vurgulamaktadır. Benzer şekilde, Kot (2001) ekolojik modellerde niteliksel davranışların, nüfusların çevresel değişimlere nasıl tepki vereceğini tahmin etmekte önemli olduğunu belirtmektedir. Bu, modellerin açık çözümlerinin çoğunlukla mümkün olmadığı durumlarda büyük bir avantaj sağlamaktadır.

Niteliksel analizler, sayısal çözümlerden daha genelleyici sonuçlar sunarak, sistemde ortaya çıkabilecek kritik eşik değerlerin, kararlılık değişimlerinin ve potansiyel karmaşık davranışların belirlenmesine olanak tanır (Kuznetsov, 2004; Strogatz, 2018). Ayrıca, parametre duyarlılıklarının değerlendirilmesi, ekosistem yönetimi ve koruma stratejilerinin geliştirilmesi açısından sağlam bir bilimsel temel oluşturur (Murray, 2002; Kot, 2001).

Bu nedenle, bir modelin niteliksel analizinin yapılması yalnızca matematiksel doğruluk açısından değil, aynı zamanda biyolojik ve ekolojik yorumların güvenilirliği açısından da büyük önem taşımaktadır (Perko, 2013).

Tüm bu durumların neticesinde, Model (3.1)'in niteliksel analizinin yapılması büyük önem taşımaktadır. Bu analiz, stoklama teriminin türler üzerindeki etkisini daha iyi anlamamıza olanak sağlayacak; ayrıca her iki türün kritik Allee eşiklerine sahip olması durumunun sistem dinamiklerine nasıl yansıdığını daha doğru ve kapsamlı biçimde değerlendirmemize imkân tanıyacaktır.

Modelin niteliksel analizine başlarken, öncelikle her iki tür için nullcline eğrilerinin belirlenmesi gerekmektedir. Nullcline eğrileri, sistemdeki bir türün zamanla değişiminin sıfır olduğu durumları temsil eder ve bu sayede denge noktalarının tespitinde kritik rol oynar (Perko, 2013; Strogatz, 2018). Elde edilen denge noktaları üzerinde yapılan kararlılık analizi ile, sistemin uzun vadeli davranışları ve popülasyonların gelecekteki dinamikleri hakkında çıkarımlar yapılabilir (Kuznetsov, 2004; Murray, 2002).

Bu süreç, yalnızca popülasyonların sürdürülebilirliğini anlamak açısından değil, aynı zamanda ekosistem yönetimi ve koruma biyolojisi bağlamında da önemli veriler sunar.

Bu yöntem, modelin stoklama etkisi altında türler arası rekabet ve Allee etkisini bütüncül bir şekilde ortaya koyarak hem teorik hem de uygulamalı ekoloji alanında değerli çıkarımlar sunacaktır.

3.2.1 Model için nullcline eğrileri ve buna bağlı olarak denge noktalarının belirlenmesi

Bir dinamik sistemde, denklemlerin sağ tarafındaki türevlerin sıfır olduğu yerler nullcline yani sıfır çizgi olarak adlandırılır. Bu noktalar, belirli bir türün popülasyon

büyüklüğünde değişiklik olmadığında (yani, o türün büyüme hızı sıfır olduğunda) yer alır. Bu, türlerin popülasyonlarının sabit olduğu veya dengeye ulaştığı noktaları ifade eder (Murray, 2002; Kot, 2001).

O halde modelimizin Nullcline eğrilerini bulmak için sırasıyla her iki türün nüfusunun da zamana bağlı değişim denklemlerini sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right)(N_1 - A_1) - \frac{\alpha_{12} N_2 N_1}{K_1} + S N_1 = 0$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right)(N_2 - A_2) - \frac{\alpha_{21} N_1 N_2}{K_2} = 0$$

Bu durumda Tür 1 popülasyonu için nullcline eğrileri birinci denklemden

$$\begin{gathered} N_1 = 0 \\ N_2 = \frac{r_1}{\alpha_{12}}(K_1 - N_1)(N_1 - A_1) + S\frac{K_1}{\alpha_{12}} \end{gathered} \tag{3.2}$$

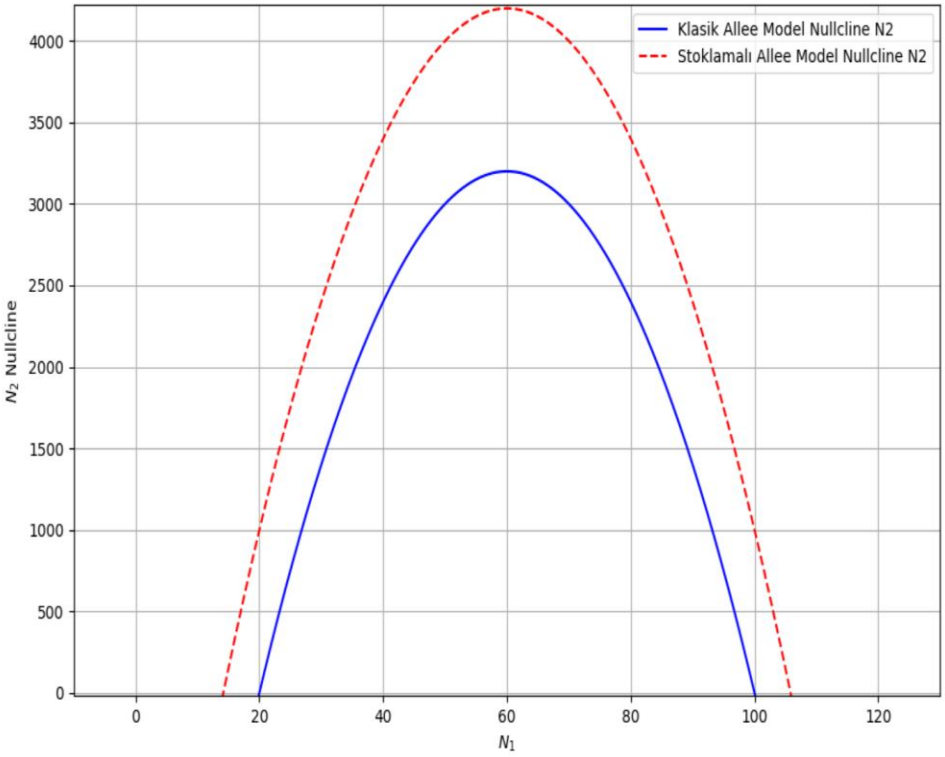
elde edilir. Benzer şekilde Tür 2 için ikinci denklemden

$$\begin{gathered} N_2 = 0 \\ N_1 = \frac{r_2}{\alpha_{12}}(K_2 - N_2)(N_2 - A_2) \end{gathered} \tag{3.3}$$

ile (3.1) Modelinin tüm nullcline eğrileri elde edilir. Burada (1.4) Modelinin nullcline eğrileri ve (3.1) Modelinin nullcline eğrileri arasında şöyle bir durum oluşur: Stoklama etkisi (S) sadece N_1 denklemini etkiler, nullcline'de ek bir sabit pozitif terim olarak çıkar. (1.4) Modelinde N_2 nullcline eğrisi doğrudan $r_1\left(1 - \frac{N_1}{k_1}\right)(N_1 - A_1)$ ile orantılıdır. Stoklama etkisi nullcline eğrisini yukarı kaydırır, yani:

$$N_2^{Model\,(3.1)} = N_2^{Model\,(1.4)} + \frac{K_1}{a_{12}} S$$

Bu yukarı kayma N_2 değerlerinin artmasına neden olur, dolayısıyla stoklamalı modelde N_2 için popülasyon dengeleri daha yüksek olabilir. Aşağıda bu durum nulcline eğrilerinin belirli parametre değerleri için daha anlaşılır hale getirilmiştir.



Şekil 3.1 (3.1) Modelinin ve (1.4) modelinin farklılık gösteren N_2 nullcline eğrilerinin $r_1 = 1,\ K_1 = 100,\ A_1 = 20,\ \alpha_{12} = 0.5$ ve $S = 5$ parametre değerleri için çizilmiş parabol görünümleridir.

(Şekil 3.1)'deki eğrilerden mavi renkli eğri (1.4) modeli yani klasik Allee etkili Lotka-Volterra rekabet modelinin Tür 1 için mevcut olan nullcline eğrisidir. Kırmızı kesikli eğri ise (3.1) Modelinin yani Stoklamanında dahil edildiği Allee etkili Lotka-Volterra rekabet modelinin Tür 1 yani stoklamanın yapıldığı tür için oluşan nullcline eğrisidir. Bu durumda Tür 1'e aşağıdaki durumları kazandırmış olur.

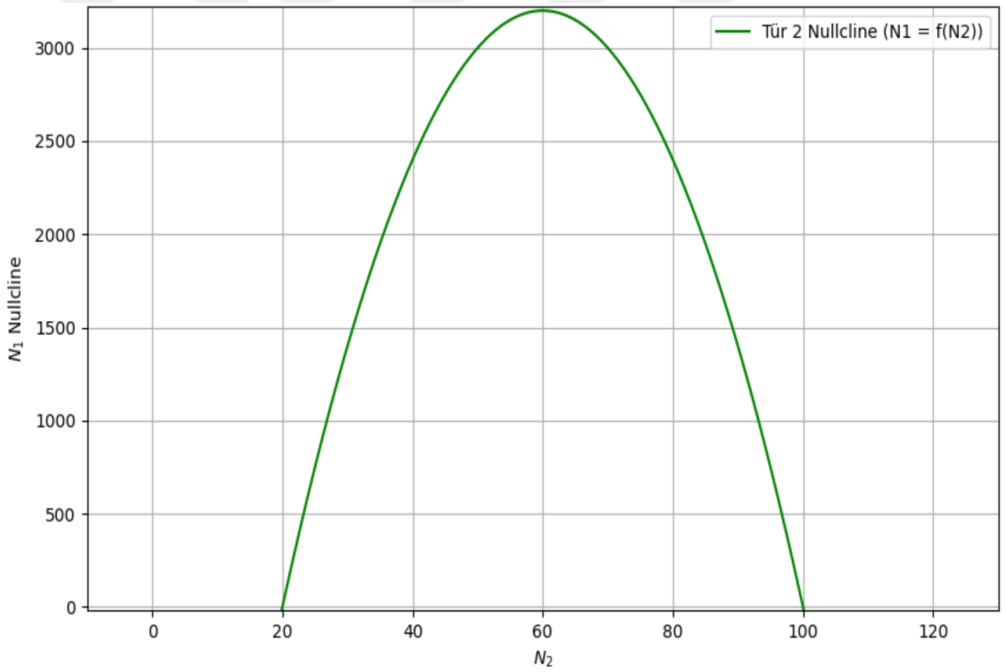
Allee etkisi nedeniyle küçük popülasyonlarda bireylerin hayatta kalması ve çoğalması zorlaşacaktır. Stoklama (ek ilave birey veya destek) nullcline eğrisini yukarı

kaydırır; bu da küçük popülasyon yoğunluklarında bile büyüme hızını pozitif tutabilir. Yani Tür 1'in kritik minimum popülasyon eşiği etrafında tükenme riski azalmış olur.

Nullcline eğrisi yukarı kayınca, Tür 1'in büyüme oranı artar veya negatif baskı daha az hissedilir. Bu durum Tür 1'in Tür 2 ile rekabet ederken üstünlük kurmasına yardımcı olur. Özellikle stoklama tür 1'e sürekli bir destek sağladığı için, rekabet baskısına rağmen tür 1'in popülasyonu dengede kalabilir veya artabilir.

Popülasyonlar, çevresel dalgalanmalara ve rekabet stresine karşı daha dayanıklı olur. Stoklama sayesinde Tür 1'in denge noktaları (kararlılık bölgeleri) genişler. Bu da Tür 1'in yok olma riskini düşürür.

Eğer Tür 1 popülasyonu azalırsa, stoklama sayesinde büyüme koşulları iyileşir. Böylece Tür 1, çevresel veya rekabet kaynaklı zararlardan sonra daha hızlı toparlanabilir.



Şekil 3.2 (3.1) Modelinin Tür 2 için oluşan nullcline eğrisinin $r_2 = 1$, $K_2 = 100$, $A_2 = 20$ ve $\alpha_{21} = 0.5$ parametre değerleri için çizilmiş parabol görünümüdür.

(Şekil 3.2)'den anlaşılacağı üzere Tür 2'ye stoklama yapılmadığı için (1.4) ile gösterilen klasik Allee etkili Lotka-Volterra Rekabet modelindeki nullcline görünümüne devam etmektedir. Bu durum Tür 2'ye aşağıdaki dezavantajları kazandırmıştır:

Tür 2'nin nullcline eğrisi (1.4) modeli ile aynı kaldığı için onun büyüme koşulları ve denge noktaları değişmemiş olacaktır.

Tür 1'in nullcline eğrisi yukarı çıktıkça, faz düzleminde Tür 2 için uygun denge noktaları küçülebilir. Bu, Tür 2'nin popülasyonunun denge değerlerinin azalması ya da popülasyonunun baskı altında kalması anlamına gelir.

Tür 1'in büyümesini destekleyen stoklama etkisi, Tür 2'yi rekabet ortamında daha baskı altına alır. Tür 2'nin Allee eşiği ve nullcline eğrisinin şekli değişmediğinden, stoklama etkisi olmayan Tür 2 popülasyonu küçük yoğunluklarda yok olma riskine daha açık kalabilir.

Stoklama, Tür 1'in ekolojik dayanıklılığını artırırken, Tür 2'nin rekabet gücünü görece düşürür. Bu durum ekosistemde Tür 1'in hakimiyetini pekiştirir.

Denge noktaları, sistemin zamana bağlı değişim göstermediği durumlar olarak tanımlanır. Denge noktaları, her iki türün popülasyon değişim hızlarının sıfır olduğu noktalar olup, genellikle bu türlerin birbirleriyle rekabet ettikleri ve kaynakları paylaştıkları bir dengeyi temsil eder. Lotka-Volterra rekabet modeline dayalı tüm modellerde denge noktaları, her iki türün popülasyonlarının da sabit olduğu ve bir türün popülasyonunun diğerinin etkileşimiyle değişmediği noktaları temsil eder. Yani denge noktaları her iki türün nullcline eğrilerinin kesim noktalarıdır (Murray, 2002; Kot, 2001).

O halde (3.1) modeli için elde edilen denge noktaları aşağıdaki şekildedir:

(a) Başlangıçta iki türünde olmadığı aşikâr denge durumu, yani $N_1 = 0$ için $N_2 = 0$ olduğu $(N_1, N_2) = (0,0)$ denge noktası,

(b) Başlangıçta Tür 1 in olmadığı, Tür 2'nin Allee eşiğinde olduğu ve burada hayatını sürdürebildiği denge noktası, yani $N_1 = 0$ için $N_2 = A_2$ olduğu $(N_1, N_2) = (0, A_2)$ denge noktası,

(c) $N_1 = 0$ ve $N_2 = K_2$ için Tür 1 yok iken Tür 2'nin taşıma kapasitesinde olduğu $(N_1, N_2) = (0, K_2)$ denge noktası,

(d) Başlangıçta Tür 2'nin olmadığı, stoklama etkisiyle Tür 1'in aşağıdaki gibi iki köşe denge noktası oluşur.

(*i*) Tür 1'e stoklama yapılınca Tür 2'nin olmadığı durumda asla Allee eşiğinde bir denge noktası oluşmaz, çünkü stoklama arttıkça denge değeri Tür 1 için Allee eşiğinin soluna kayar bu nedenle yeni ve geçici bir Allee eşik değerinden küçük köşe denge noktası oluşur.

(*ii*) Tür 2'nin yokluğu durumunda stoklamanın büyüklüğüne bağlı olarak Tür 1'in denge noktası ya taşıma kapasitesi yani $(K_1, 0)$ noktası olur ya da stoklama ile taşıma kapasitesinden daha yüksek bir değere çıkabileceği için taşıma kapasitesinden daha büyük bir denge noktasını geçici süreli olarak verebilir. Çünkü biyolojik taşıma kapasitesi (K) ekosistemin doğal kaynaklarına ve çevresel koşullara bağlıdır. Bu, stoklamayla kalıcı olarak artmaz, besin miktarı, yaşam alanı ve çevre koşulları değişmediği sürece K sabit kalır. Ancak taşıma kapasitesi stoklama ile geçici olarak aşılabilir.

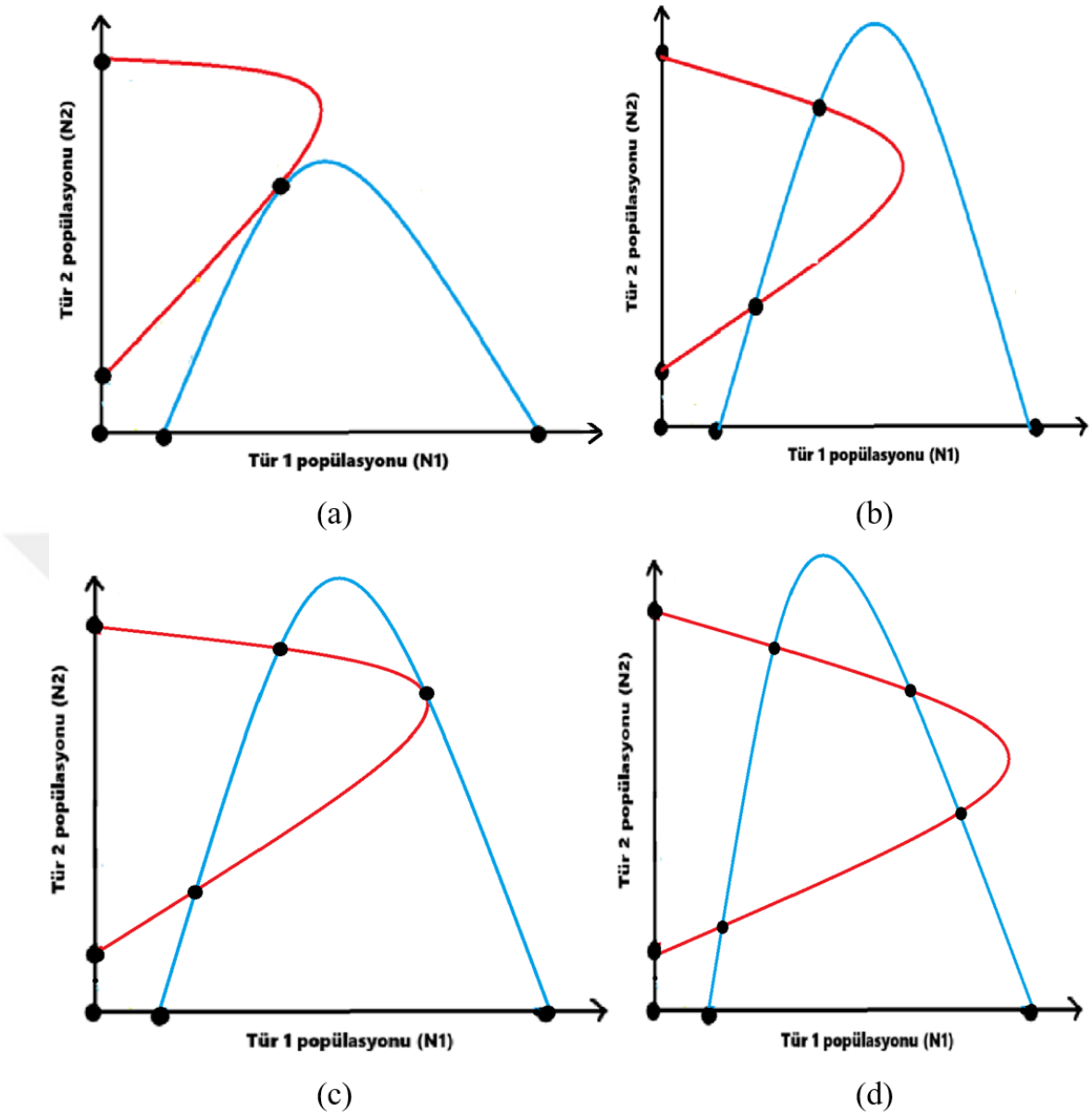
Yukarıda bulduğumuz köşe denge noktalarına ek olarak, nullcline eğrilerinin parabolik yapısı nedeniyle model en fazla dört içsel denge noktasına sahip olabilir. Ancak, stoklamalı Allee etkili Lotka-Volterra rekabet modelinde, stoklama Tür 1'in nullcline eğrisini yukarı kaydırdığından, içsel denge noktalarının konumları ve değerleri klasik modele kıyasla yukarı doğru değişim gösterir.

İçsel denge noktalarını belirlemek için her iki tür için de nullclinelerin sıfır olmaması gerekir, yani Eşitlik (3.2) de N_1 gördüğümüz yere Eşitlik (3.3) ü yazarak Tür 1 için iç denge durumlarını belirlerken tam tersini yaparak ta Tür 2'nin içsel denge durumunu elde edeceğimiz sırasıyla N_1^* ve N_2^* içsel denge durumlarını belirleyerek (3.1) modelinin içsel denge noktalarını belirleyebiliriz. O halde sırasıyla içsel denge durumlarını veren N_1^* ve N_2^* aşağıdaki formda bulunur:

$$N_1^* = \frac{r_2}{\alpha_{12}}\left(K_2 - \frac{r_1}{\alpha_{12}}(K_1 - N_1)(N_1 - A_1) - S\frac{K_1}{\alpha_{12}}\right)\left(\frac{r_1}{\alpha_{12}}(K_1 - N_1)(N_1 - A_1) + S\frac{K_1}{\alpha_{12}} - A_2\right)$$

$$N_2^* = \frac{r_1}{\alpha_{12}}\left(K_1 - \frac{r_2}{\alpha_{12}}(K_2 - N_2)(N_2 - A_2)\right)\left(\frac{r_2}{\alpha_{12}}(K_2 - N_2)(N_2 - A_2) - A_1\right) + S\frac{K_1}{\alpha_{12}}$$

Nullcline eğrilerinin birer parabol olması nedeniyle, (N_1^*, N_2^*) içsel denge noktaları en fazla dört tanedir. Aşağıdaki grafikler bu durumları göstermektedir.



Şekil 3.3 (3.1) modelinin nullcline eğrilerinin kesişmesiyle oluşan içsel denge noktalarının sembolik görünümleridir.

(Şekil 3.3)'te (a) her iki tür için sadece tek bir içsel denge durumu oluşturacak bir denge noktasını, (b) iki denge noktasını, (c) üç denge noktasını, (d) 4 içsel denge noktasını göstermektedir. Elde edilen bu içsel denge noktalarının hem Allee eşiği hem de taşıma kapasitesine olan uzaklıkları dikkate alındığında, bu denge noktalarının bileşenleri ile Allee eşiği ve taşıma kapasitesi arasında aşağıda verilen ilişkiler elde edilir:

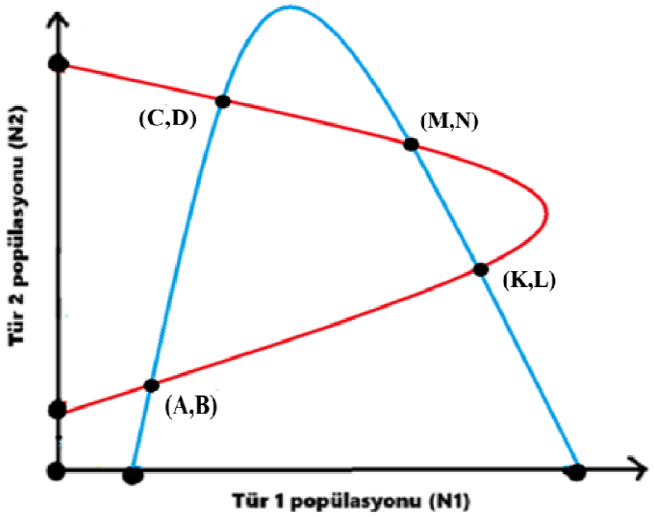
Birinci içsel denge noktası için: $N_1^* - A_1 < K_1 - N_1^*$ ve $N_2^* - A_2 < K_2 - N_2^*$

İkinci içsel denge noktası için: $N_1^* - A_1 < K_1 - N_1^*$ ve $N_2^* - A_2 > K_2 - N_2^*$

Üçüncü içsel denge noktası için: $N_1^* - A_1 > K_1 - N_1^*$ ve $N_2^* - A_2 < K_2 - N_2^*$

Dördüncü içsel denge noktası için: $N_1^* - A_1 > K_1 - N_1^*$ ve $N_2^* - A_2 > K_2 - N_2^*$

Bu içsel denge noktalarının yerleri aşağıdaki Şekil (3.4) ile görselleştirilmiştir.



Şekil 3.4 (3.1) modelinin nullcline eğrilerinin kesişmesi ile ortaya çıkan tüm içsel denge noktalarının temsili gösterimidir.

Sistemin yukarıdaki gibi 4 içsel denge noktasını anlaşılırlığı artırmak için sırasıyla (A,B), (C,D), (K,L), (M,N) şeklinde temsili harflendirme ile vereceğiz.

Yukarıdaki tüm bilgiler dikkate alındığında, 5 köşe ve en fazla 4 tane de içsel denge noktası barındıran (3.1) modeli, stoklama yapılmadığı (1.4) modeli ile aynı sayıda denge noktasına sahip olmasına rağmen, içsel denge noktalarının yerlerinin farklı olacağı görülür. Çünkü, Tür 1 in stoklanması nedeniyle Nullcline eğrisi (Şekil 3.1)'deki gibi yukarı değerlere çıkacağından, bu içsel denge noktaları da stoklama katsayısının alacağı değerle orantılı bir şekilde yukarı kayacaktır

3.2.2 Model için denge noktaların kararlılık durumlarının incelenmesi

Bir sistemin kararlılığı, sistemin denge noktasına yakın bir başlangıç koşulu ile zaman içinde dengeye yaklaşma ya da denge noktasından uzaklaşma eğiliminde olup olmadığını ifade eder. Eğer bir denge noktası kararlı ise, sistem başlangıç koşuluna yakın bir değerden sapma gösterdiğinde zamanla tekrar denge noktasına geri döner. Buna

karşılık, denge noktası kararsız ise, sistem başlangıç koşulundan uzaklaştıkça sapma artar ve sistem denge noktasından daha da uzaklaşır (Murray, 2002; Kot, 2001).

Lotka–Volterra rekabet modeli gibi iki lineer olmayan diferansiyel denklemin oluşturduğu sistemler için kararlılık analizi yapılırken, denge noktalarının etrafındaki davranışı incelemek amacıyla sistemin Jakobiyen matrisi (J) kullanılır. Bu analiz, sistemin yerel kararlılığını değerlendirmeye olanak tanır (Murray, 2002; Kot, 2001).

Jakobiyen matrisin sistemin bir denge noktasındaki determinantının pozitif ($\det(J) > 0$) ve izinin negatif ($\mathrm{tr}(J) < 0$) olması durumunda bu denge noktası asimptotik olarak kararlıdır. Bu durumda, eğer bu jakobiyen matrisin özdeğerleri negatif ve reel ise denge kararlı bir düğüm noktasıdır, yani yörüngeler bu noktaya doğrudan yaklaşır. Eğer özdeğerler negatif reel kısımlı karmaşık sayılar ise denge noktası kararlı bir odak olur ve yörüngeler sarmal çizerek dengeye ulaşır.

Eğer $\det(J) > 0$ ve $\mathrm{tr}(J) = 0$ ise denge noktası nötr kararlıdır ve bir merkezdir; yörüngeler kapalı eğriler oluşturur ve sistem sonsuz döngüler halinde hareket eder. Bu durumda özdeğerler karmaşık ve reel kısımları sıfırdır. O halde nötr kararlı bir denge noktası olur.

$\det(J) > 0$ ve $\mathrm{tr}(J) > 0$ olduğunda ise denge noktası kararsızdır ve bir itici düğüm noktası olur. Bu durumda özdeğerler pozitif ve reeldir. O halde denge noktası kararsız bir düğüm noktası haline gelir.

$\det(J) = 0$ olması durumunda $\mathrm{tr}(J)$'nin işaretine bakmaksızın denge noktasının kararlılık durumu merkezi manifold teoremi uygulanarak belirlenir.

Son olarak, $\det(J) < 0$ olduğunda denge noktası kararsız bir eyer noktasıdır (saddle point) ve bu durumda özdeğerlerden biri pozitif, diğeri negatiftir (Murray, 2002; Strogatz, 1994).

Teorem 3.1 (Merkezi Manifold Teoremi):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklindeki otonom dinamik sistemde $f \in C^r(R^n, R^n)(r \geq 0)$ ve $x = 0$ sistemin bir denge noktası olsun. Lineerleştirilmiş sistemin Jakobiyen matrisinin özdeğerleri, gerçek kısımlarına göre kararlı, kararsız ve merkez spektruma ayrılmış olsun. Bu durumda, merkeze karşılık gelen öz uzay T^c ile $x = 0$ noktasında teğet olan düzgün bir η_0-boyutlu değişmez manifoldu $W^c_{loc}(0)$ mevcuttur.

Ayrıca $x_0 = 0$'ın bir açık $U \subset R^n$ komşuluğu vardır, Burada $\varphi^t x$, başlangıç değeri $x \in U$ olan çözümün zamana göre akışını göstermek üzere, her $x \in U$ için çözüm tüm $t \geq 0 (t \leq 0)$ için tanımlıysa,

$$t \to +\infty (t \to -\infty) \text{ için } \varphi^t x \to W^c_{loc}(0)$$

olur. Bu nedenle $W^c_{loc}(0)$, sistemin merkezi manifoldu olarak adlandırılır (Kuznetsov, 2004).

O halde (3.1) modelinin kararlılık analizini yapabilmek için, öncelikle denge noktalarının etrafındaki davranışın incelenmesi gerekir (Murray, 2002; Kot, 2001). Bunun için öncelikle modelin

$$f_1(N_1, N_2) = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right)(N_1 - A_1) - \frac{\alpha_{12} N_2 N_1}{K_1} + S N_1 \qquad (3.4)$$

$$f_2(N_1, N_2) = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right)(N_2 - A_2) - \frac{\alpha_{21} N_1 N_2}{K_2} \qquad (3.5)$$

ile verilen sağ taraf fonksiyonlarının

$$\frac{\partial f_1}{\partial N_1} = r_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right)(N_1 - A_1) + r_1 N_1 \left[-\frac{1}{K_1}(N_1 - A_1) + \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right)\right] - \frac{\alpha_{12} N_2}{K_1} + S,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial N_2} = -\frac{\alpha_{12} N_1}{K_1},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial N_1} = -\frac{\alpha_{21} N_2}{K_2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial N_2} = r_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right)(N_2 - A_2) + r_2 N_2 \left[-\frac{1}{K_2}(N_2 - A_2) + \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right)\right] - \frac{\alpha_{21} N_1}{K_2}$$

kısmi türevleri ile oluşturulan

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial N_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial N_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial N_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial N_2} \end{bmatrix}$$

Jacobian matrisi elde edilir.

Şimdi sırasıyla önce köşe denge noktalarının ve ardından içsel denge noktalarının kararlılık durumlarını inceleyelim.

$(N_1, N_2) = (0,0)$ noktasının kararlılığı: Bu denge noktası için Jakobiyen matrisi

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -A_1 r_1 + S & 0 \\ 0 & -A_2 r_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Jakobiyen matrisine bağlı olarak,

$$\det(J) = A_1 A_2 r_1 r_2 - A_2 r_2 S = A_2 r_2 (A_1 r_1 - S)$$
$$\mathrm{Tr}(J) = -A_1 r_1 - A_2 r_2 + S$$

elde edilir. O halde (0,0) noktasının kararlılık durumu şu şekilde farklılaşabilir:

1. Eğer, $S < A_1 r_1$ olursa, $\det(J) > 0$ ve $\mathrm{Tr}(J) < 0$ olacağından bu şart için (0,0) denge noktası yerel asimptotik kararlı olur.

2. Eğer, $S > A_1 r_1$ olursa, $\det(J) < 0$ olacağından bu şart için (0,0) denge noktası kararsız bir eyer noktası olur.

3. Eğer $S = A_1 r_1$ olursa, (3.1) modelinin (0,0) denge noktasındaki Jakobiyen matrisi için $\det(J) = 0$ ve $\mathrm{Tr}(J) < 0$ olarak bulunur. Bu durumda, sistemin lineer analizle kararlılığı belirlenemez ve dolayısıyla Merkezi Manifold Teoremi uygulanmalıdır.

O halde Teorem 3.1 aşağıdaki adımların uygulanmasını gerektirir.

Sistemde orijinde determinant sıfır olduğundan kararlılık belirlenemez. O halde orijin etrafındaki durumu anlamak için merkezi manifold $W^c_{loc}(0)$ kurulur. Bu da sıfır özdeğere karşılık gelen doğrultuların oluşturduğu manifold olur ki çözümler bu manifold boyunca hareket eder veya uzaklaşır. Bu akışı temsil eden $\varphi^t x$ çözümü, eğer U içinde kalırsa çözüm zamanla belirlenen bu merkezi manifolda yaklaşmış olur, yani sistemin orijindeki uzun dönem davranışları merkezi manifold üzerinden belirlenir. Ardından kararlılık için merkezi manifold üzerindeki indirgenmiş sistemdeki davranışa bakılır. Eğer bu davranıştaki çözümler orijine yaklaşırsa orijin yerel kararlı, tam tersi durumda ise orijin kararsız olur (bkz. Teorem 3.1).

O halde $S = A_1 r_1$ için durumu inceleyelim.

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N_1}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial N_2}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial N_1}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial N_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

için,

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -A_1 r_1 \end{pmatrix}$$

köşegen matrisi elde edilir. $\det(J) = 0$ ve $\mathrm{Tr}(J) = -A_1 r_1 < 0$ olduğundan Merkezi Manifold Teoremi kullanılabilir.

Şimdi orijinin kararlılık durumunu belirlemek için Merkezi Manifold Teoremini kullanalım. Burada Wiggins (2003) çalışmasında kullanılan yol takip edilecektir. Merkezi Manifold Teoreminden, orijin etrafında $N_2 = h(N_1)$ biçiminde tanımlanabilen $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 0$ koşullarını sağlayan, yani

$$W^c_{loc}(0) = \{(N_1, N_2) \in \mathbb{R}^2 : N_2 = h(N_1), h(0) = 0, h'(0) = 0\}$$

kümesi ile temsil edilen bir merkezi manifold mevcuttur.

Şimdi $W^c_{loc}(0)$ kümesini belirleyelim. Öncelikle

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = h'(N_1)\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t},$$

yani

$$f_2\big(N_1, h(N_1)\big) = h'(N_1) f_1(h(N_1), N_1) \qquad (3.6)$$

olduğuna dikkat edelim ve $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ olduğu dikkate alınarak, küçük değerli N_1 için $h(N_1)$'i aşağıdaki gibi yazabileceğimizi kabul edelim:

$$h(N_1) = aN_1^2 + bN_1^3 + \mathcal{O}(N_1^4)$$

Bu çalışmada kullanılan $\mathcal{O}(.)$ notasyonu şu anlamdadır: $N_1 \to 0$ iken bir $g(N_1)$ fonksiyonu için,

$$g(N_1) = \mathcal{O}(N_1^{\mathrm{k}})$$

ifadesi, pozitif sabitler $C > 0$ ve $\delta > 0$ mevcut olacak şekilde

$$|g(N_1)| \leq C|N_1|^k \text{ tüm } |N_1| < \delta \text{ için}$$

Sağlanıyorsa kullanılır.

Şimdi $h(N_1)$ ifadesini Eşitlik (3.6) de yazılırsa,

$$f_2(N_1, h(N_1)) = r_2(aN_1^2 + bN_1^3)\left(1 - \frac{aN_1^2}{K_2} + \mathcal{O}(N_1^4)\right)\left((aN_1^2 + bN_1^3) - A_2\right) - \frac{\alpha_{21}(aN_1^2 + bN_1^3)N_1}{K_2}$$

elde edilir. Burada küçük N_1 nüfus değerleri için baskın terim

$$f_2(h(N_1), N_1) = -A_1 r_1 aN_1^2 - A_1 r_1 bN_1^3 + \mathcal{O}(N_1^4) \qquad (3.7)$$

olarak belirlenir. Eşitlik (3.7) in sağ tarafı için $h'(N_1) = 2aN_1 + 3bN_1^2 + \mathcal{O}(N_1^3)$ ve $S = A_1 r_1$ olduğundan

$$f_1(h(N_1), N_1) = r_1\left(1 + \frac{A_1}{K_1}\right)N_1^2 - \frac{r_1}{K_1}N_1^3 - \frac{\alpha_{12}}{k_1}(aN_1^3) + \mathcal{O}(N_1^4)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$f_1(h'(N_1), N_1) = (2aN_1)(cN_1^2) + \mathcal{O}(N_1^4) \qquad (3.8)$$

olarak bulunur. Burada $c = r_1\left(1 + \frac{A_1}{K_1}\right)$ dir.

Elde edilen iki eşitlik için düzenleme yapacak olursak

Sol taraflı: $-r_2A_2aN_1^2 - r_2A_2bN_1^3 + \cdots$

Sağ taraflı: $2acN_1^3 + \cdots$

Şeklinde elde edilir. Şimdi Eşitlik (3.7) ve Eşitlik (3.8) deki ifadelerin katsayılarını eşitleyelim. Eşitlemeyi sağlamak için katsayıları sıfırlayalım,

N_1^2'li terim için; $-r_2A_2a = 0$ ise $a = 0$,

N_1^3'lü terim için; $-r_2A_2b = 0$ ise $b = 0$ olur.

Sonuç olarak $h(N_1) = 0 + \mathcal{O}(N_1^4)$ bulunur. Bu nedenle merkezi manifold,

$$W_{loc}^{c} = \{(N_1, N_2) \in \mathbb{R}^2 : N_2 = 0\}$$

şeklinde bulunur. Başka bir deyişle merkezi manifold N_1 eksenidir. Burada merkezi manifold üzerinde $N_2 = 0$ olduğundan N_1- denklemi:

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = r_1N_1\left(1 - \frac{N_1}{k_1}\right)(N_1 - A_1) + SN_1$$

şeklini alır. Burada $S = A_1r_1$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= r_1N_1\left(1 - \frac{N_1}{k_1}\right)(N_1 - A_1) + A_1r_1N_1 \\ &= r_1\left(N_1^2 - A_1N_1 - \frac{N_1^3}{K_1} + \frac{A_1}{K_1}N_1^3\right) + A_1r_1N_1\end{aligned}$$

olur. Burada $-A_1r_1N_1 + A_1r_1N_1 = 0$ olduğundan,

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = r_1\left(1 - \frac{A_1}{k_1}\right)N_1^2 - \frac{r_1}{k_1}N_1^3$$

bulunur. Burada orijine en yakın bölgede en baskın terim en küçük katsayılı terim olan kuadratik terim yani $\frac{dN_1}{dt} = r_1\left(1 - \frac{A_1}{K_1}\right)N_1^2$ olur ki bu terim sıfırdan büyük olduğundan (0,0) denge noktası N_1 ekseni yönünde kararsız olur. O halde sınır-tipinde kararlılık değişimi gerçekleşir. Burada öz değerlerden biri muhakkak sıfır olur. Yani (0,0) denge

noktasında kararlılık stoklama teriminin verilen şartı için değişir. Dahası bu noktada yeni denge durumları ortaya çıkar ve kaybolur. Dolayısıyla $S = A_1 r_1$ değerinde bir transkritik (değiş-tokuş) çatallanma gerçekleşir.

$(N_1, N_2) = (0, A_2)$ noktasının kararlılığı: Bu denge noktası için Jakobiyen matrisi

$$J(0, A_2) = \begin{bmatrix} -A_1 r_1 - \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1} + S & 0 \\ -\frac{\alpha_{21} A_2}{K_2} & r_2 A_2 \left(1 - \frac{A_2}{K_2}\right) \end{bmatrix}$$

olup,

$$\det(J) = \left(-A_1 r_1 - \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1} + S\right) r_2 A_2 \left(1 - \frac{A_2}{K_2}\right)$$

$$\mathrm{Tr}(J) = -A_1 r_1 - \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1} + S + r_2 A_2 \left(1 - \frac{A_2}{K_2}\right)$$

elde edilir. Burada $S > A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda $\det(J) > 0$ ve $\mathrm{Tr}(J) > 0$ olur. Bu durumda denge noktası kararsız bir itici düğüm noktası olur. $S < A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda $\det(J) < 0$ olur. Bu durumda ise denge noktası bir eyer noktasıdır. O halde denge noktasının kararsız ve kararlılık durumunda her zaman değişim gözlenmez. Bu nedenle çatallanma durumu gözlenmez, çünkü parametreye bağlı kararlılık durumunda değişme olmamıştır.

Burada elde edilen tüm sonuçlar aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir:

Teorem 3.2: (3.1) modelinin (0,0) denge noktası $S < A_1 r_1$ olması durumunda asimptotik kararlı, $S > A_1 r_1$ olması durumunda kararsız eyer noktası olur. $(0, A_1)$ denge noktası $S > A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda kararsız eyer, $S < A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda kararsız düğüm noktası olur. $(0, K_2)$ denge noktası $S < A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda asimptotik kararlı, $S > A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda kararsız eyer noktası olur.

Şimdi de $(N_1, N_2) = (0, K_2)$ noktası için kararlılık durumunu inceleyelim. Bu denge noktası için Jakobiyen matrisi

$$J(0,K_2)=\begin{bmatrix} -r_1\left(A_1+\frac{\alpha_{12}K_2}{K_1}\right)+S & 0 \\ -r_2\alpha_{21} & -r_2(K_2-A_2) \end{bmatrix}$$

olup,

$$\det(J)=(-A_1r_1-\frac{\alpha_{12}K_2}{K_1}+S)(-r_2(K_2-A_2)-\alpha_{21})$$
$$\mathrm{Tr}(J)=-A_1r_1-\frac{\alpha_{12}K_2}{K_1}+S-r_2(K_2-A_2)-\alpha_{21}$$

olur. Lotka-Volterra rekabet modelinde türlerden birinin olmaması durumunda mevcut olan tür taşıma kapasitesine ulaşma eğiliminde olacağı için taşıma kapasitesinin bulunduğu eksen üzerindeki denge noktası kararlı bir denge noktası olur. O halde stoklama yapılmayan Tür 2'nin bu denge noktasının kararlı olması gerekmektedir. Bu da $S<A_1r_1+\frac{\alpha_{12}A_2}{K_1}$ şartının olması ile mümkündür. Bu şart sayesinde $\det(J)>0$ ve $\mathrm{Tr}(J)<0$ olacağından denge noktası asimptotik kararlı olur. Şartın aksi olması durumunda bu denge noktası kararsız hale gelecektir. Bu nedenle $S=A_1r_1+\frac{\alpha_{12}A_2}{K_1}$ değerinde bir transkritik (değiş-tokuş) çatallanma gerçekleşir. Çünkü denge noktası verilen şartın büyüklük ve küçüklüğüne göre denge noktasının kararlılığını değiştirir ancak burada yok olma söz konusu olmadan karalı denge noktası durumundan kararsız denge noktası durumuna geçiş mevcuttur.

Bu denge noktaları (0,0) hariç Tür 2'nin kendine ait denge noktalarıdır ve stoklama uygulaması yoktur. Ancak Tür 2'nin olmadığı durumda Tür 1'in stoklama etkisiyle denge noktaları aşağıdaki şekilde incelenmiştir.

$N_2=0$ olsun. Bu durumda, (3.1) modelindeki birinci denklem

$$\frac{dN_1}{dt}=r_1N_1\left(1-\frac{N_1}{K_1}\right)(N_1-A_1)+SN_1$$

biçimini alır. Bu denklemin sağ tarafı sıfıra eşitlenirse,

$$N_1 = 0 \text{ veya } r_1\left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right)(N_1 - A_1) + S = 0$$

olur. Buradan $(0,0)$ ın bir denge noktası olduğu kolayca görülür. Diğer denge noktalarını belirlemek için ikinci denklem

$$r_1\left(N_1 - A_1 - \frac{N_1^2}{K_1} + \frac{A_1}{K_1}N_1\right) + S = N_1^2 - (K_1 + A_1)N_1 - \frac{K_1(S - r_1A_1)}{r_1} = 0$$

şeklinde yazılırsa, kökler

$$N_1^{\pm} = \frac{K_1 + A_1 \pm \sqrt{(K_1 + A_1)^2 + 4K_1(S - r_1A_1)}}{2}$$

olacaktır. Bu durumda,

(i) Eğer $(K_1 + A_1)^2 = -4K_1(S - r_1A_1)$ ise $N_1 = \frac{K_1 + A_1}{2}$ olur. Fakat, $K_1 > A_1$, $K_1 > 0, A_1 > 0, r_1 > 0$ ve $S > 0$ için bu eşitlik mümkün olmadığından, $\left(\frac{K_1 + A_1}{2}, 0\right)$ noktası sistemin bir denge noktası olamaz.

(ii) Eğer $(K_1 + A_1)^2 + 4K_1(S - r_1A_1) > 0$ ise

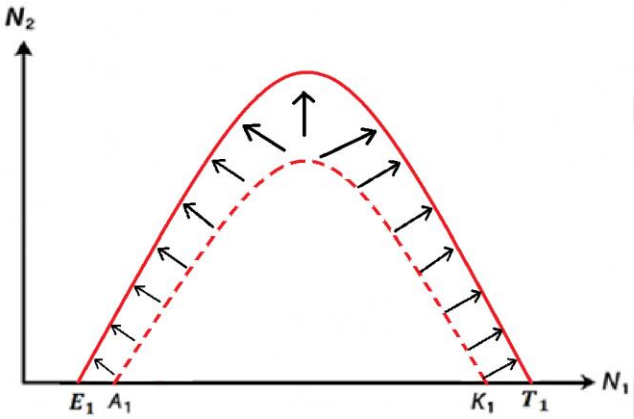
$$N_1^+ = \frac{K_1 + A_1 + \sqrt{(K_1 + A_1)^2 + 4K_1(S - r_1A_1)}}{2}$$

ve

$$N_1^- = \frac{K_1 + A_1 - \sqrt{(K_1 + A_1)^2 + 4K_1(S - r_1A_1)}}{2}$$

elde edilir. $N_1^+ > K_1$ olduğundan, denge noktasının taşıma kapasitesinden yüksek bir değer olduğu görülür. Ayrıca $N_1^- < A_1$ olduğundan, bu denge noktası Allee eşiğinden daha düşüktür.

Tür 2'nin habitat içinde bulunmaması durumunda (1.4) modeli gereği denge noktaları $(A_1, 0)$ ve $(K_1, 0)$ olması gerekirdi, ancak stoklama Tür 1'in sahip olduğu nullcline eğrisini yukarı taşıdığı için denge noktalarından biri Allee eşiğinden daha küçük, diğeri ise taşıma kapasitesinden daha büyük olmaktadır. (Bkz. (Şekil 3.1)) Bu durumda Allee eşiğinden küçük olarak ortaya çıkan denge noktasının N_1 ekseni üzerindeki noktayı E_1 ile ve taşıma kapasitesinden büyük olarak ortaya çıkan denge noktasını T_1 ile gösterelim.



Şekil 3.5 Tür 2'nin olmaması durumunda Tür 1'in stoklama etkisiyle oluşan eksen denge noktalarının gösterimidir.

$N_2 = 0$ iken Tür 1 için denge noktaları; Öncelikle $(E_1, 0)$ denge noktasının kararlılık durumunu inceleyelim. Bu denge noktasındaki Jakobiyen matris

$$J(E_1, 0) = \begin{bmatrix} r_1 E_1 \left(1 - \frac{E_1}{K_1}\right) + S & -\frac{\alpha_{12} E_1}{K_1} \\ 0 & -A_2 r_2 - \frac{\alpha_{21} E_1}{K_2} \end{bmatrix}$$

olacağından,

$$\det(J) = -r_1 r_2 E_1 \left(1 - \frac{E_1}{K_1}\right)\left(A_2 + \frac{\alpha_{21} E_1}{K_2}\right) - S\left(A_2 r_2 + \frac{\alpha_{21} E_1}{K_2}\right),$$

$$\mathrm{Tr}(J) = r_1 E_1 \left(1 - \frac{E_1}{K_1}\right) - A_2 r_2 \ - \frac{\alpha_{21} E_1}{K_2} + S$$

elde edilir. $\det(J) < 0$ olduğundan $(E_1, 0)$ noktası kararsız bir düğüm noktası, yani bir itici olur. Kararlılık durumu sabit kaldığı için bu denge noktasında çatallanma görülmez.

Şimdi de $(T_1, 0)$ denge noktasının kararlılık durumunu inceleyelim. Bu denge noktasındaki Jakobiyen matris

$$J(T_1, 0) = \begin{bmatrix} -r_1(T_1 - A_1) + S & -r_1 \alpha_{12} \\ 0 & -r_2(A_2 + \frac{\alpha_{21} T_1}{K_2}) \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\det(J) = r_2 \left(A_2 + \frac{\alpha_{21} T_1}{K_2}\right)(r_1(T_1 - A_1) - S),$$

$$\mathrm{Tr}(J) = - r_1(T_1 - A_1) + S - r_2(A_2 + \frac{\alpha_{21} T_1}{K_2})$$

elde edilir. Burada $S < r_1(T_1 - A_1)$ ise $\det(J) > 0$ ve $\mathrm{Tr}(J) < 0$ olacağından, bu durumda denge noktası yerel asimptotik kararlı olur. Burada denge noktasının kararlılığı stoklama parametresine bağlı olarak yeniden oluşur ya da kaybolur bu nedenle bu denge noktası eyer-düğüm çatallanma belirtir.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 3.3: (3.1) modelinde oluşan temsili $(E_1,0)$ denge noktası tüm pozitif stoklama değerleri için kararsız düğüm noktası olur. Temsili $(T_1,0)$ denge noktası $S < r_1(T_1 - A_1)$ olması durumunda asimptotik kararlı, $S > r_1(T_1 - A_1)$ olması durumunda kararsız düğüm noktası olur.

Şimdi içsel denge noktalarının kararlılık durumunu daha önce verdiğimiz şartlara uygun olarak sırayla inceleyelim.

Modeldeki içsel denge noktaları,

$$f_1(N_1, N_2; S) = 0 \text{ ve } f_2(N_1, N_2) = 0$$

nullcline eğrilerinin kesişim noktaları olarak tanımlanır. Parabolik şekle sahip olan bu nullcline eğrileri en fazla dört kesişim noktası oluşturabilir. Stoklama terimi S arttıkça N_1 nullcline eğrisi yukarı doğru kayar ve kararlılık durumu farklılaşabilir.

(N_1^*, N_2^*) herhangi bir içsel denge noktası olsun. Bu denge noktasının kararlılık durumlarını inceleyelim.

$$N_1^* = \frac{r_2}{\alpha_{12}}\left(K_2 - \frac{r_1}{\alpha_{12}}(K_1 - N_1)(N_1 - A_1) - S\frac{K_1}{\alpha_{12}}\right)\left(\frac{r_1}{\alpha_{12}}(K_1 - N_1)(N_1 - A_1) + S\frac{K_1}{\alpha_{12}} - A_2\right)$$

$$N_2^* = \frac{r_1}{\alpha_{12}}\left(K_1 - \frac{r_2}{\alpha_{12}}(K_2 - N_2)(N_2 - A_2)\right)\left(\frac{r_2}{\alpha_{12}}(K_2 - N_2)(N_2 - A_2) - A_1\right) + S\frac{K_1}{\alpha_{12}}$$

olduğundan, Jakobiyen matrisi

$$\frac{\partial f_1}{\partial N_1} = r_1\left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)(N_1^* - A_1) + r_1 N_1^*\left[-\frac{1}{K_1}(N_1^* - A_1) + \left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)\right] - \frac{\alpha_{12}N_2^*}{K_1} + S,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial N_2} = -\frac{\alpha_{12}N_1^*}{K_1},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial N_1} = -\frac{\alpha_{12}N_1^*}{K_1},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial N_2} = r_2\left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)(N_2^* - A_2) + r_2 N_2^*\left[-\frac{1}{K_2}(N_2^* - A_2) + \left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)\right] - \frac{\alpha_{21}N_1^*}{K_2}$$

olmak üzere

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N_1} & \frac{\partial f_1}{\partial N_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial N_1} & \frac{\partial f_2}{\partial N_2} \end{bmatrix}$$

olur. O halde,

$$\det(J(N_1^*,N_2^*)) = \left(r_1\left(1-\frac{N_1^*}{K_1}\right)(N_1^*-A_1) + r_1N_1^*\left[-\frac{1}{K_1}(N_1^*-A_1)+\left(1-\frac{N_1^*}{K_1}\right)\right]\right.$$
$$\left. -\frac{\alpha_{12}N_2^*}{K_1}+S\right).\left(r_2\left(1-\frac{N_2^*}{K_2}\right)(N_2^*-A_2)\right.$$
$$\left. + r_2N_2^*\left[-\frac{1}{K_2}(N_2^*-A_2)+\left(1-\frac{N_2^*}{K_2}\right)\right] - \frac{\alpha_{12}N_1^*}{K_2}\right) - \frac{\alpha_{21}N_2^*}{K_2}\frac{\alpha_{12}N_1^*}{K_1}$$

ve

$$\mathrm{tr}(J(N_1^*,N_2^*)) = r_1\left(1-\frac{N_1^*}{K_1}\right)(N_1^*-A_1) + r_1N_1^*\left[-\frac{1}{K_1}(N_1^*-A_1)+\left(1-\frac{N_1^*}{K_1}\right)\right]$$
$$-\frac{\alpha_{12}N_2^*}{K_1}+S + r_2\left(1-\frac{N_2^*}{K_2}\right)(N_2^*-A_2)$$
$$+ r_2N_2^*\left[-\frac{1}{K_2}(N_2^*-A_2)+\left(1-\frac{N_2^*}{K_2}\right)\right] - \frac{\alpha_{21}N_1^*}{K_2}$$

olarak bulunur. Bu bilgilere dayanarak içsel denge noktalarının kararlılık durumları aşağıdaki şekilde olur.

(i) (Şekil 3.4)'teki (A,B) içsel denge noktasının kararlılık durumu: Bu denge noktasının konumu $N_1^*-A_1 < K_1-N_1^*$ ve $N_2^*-A_2 < K_2-N_2^*$ koşulu ile belirlendiği için bu denge noktasının kararlılık durumuna bakarken bu şart kullanılır. O halde bu şart altında $\det(J)>0$ olarak bulunur, ancak $\mathrm{tr}(J)$'nin işareti

$$S > \frac{\alpha_{12}N_2^*}{K_1}+\frac{\alpha_{21}N_1^*}{K_2} - r_1\left(1-\frac{N_1^*}{K_1}\right)(N_1^*-A_1) - r_2\left(1-\frac{N_2^*}{K_2}\right)(N_2^*-A_2)$$
$$- r_1N_1^*\left[-\frac{1}{K_1}(N_1^*-A_1)+\left(1-\frac{N_1^*}{K_1}\right)\right] - r_2N_2^*\left[-\frac{1}{K_2}(N_2^*-A_2)+\left(1-\frac{N_2^*}{K_2}\right)\right]$$

koşulu için sıfırdan büyük olur ki bu şekilde kararsız bir denge noktası olur. Bu şartın tersini uygulamak doğru değildir, çünkü $N_1^*-A_1 < K_1-N_1^*$ ve $N_2^*-A_2 < K_2-N_2^*$ sınırları içinde bulunan denge noktası kararlı olamaz. Ayrıca bu şartın tersi olması durumunda da denge noktası kararsız düğüm noktasıdır. Ayrıca,

$$\Delta = \mathrm{tr}(J)^2 - 4\det(J) > 0$$

olduğundan bu 1. İçsel denge noktası kararsız bir düğüm noktası olur. Denge noktasının kararlılığı değişmediği için bu denge noktasında çatallanma durumu gözlenmez.

(ii) (Şekil 3.4)'teki (C,D) İçsel denge noktasının kararlılık durumu: Bu denge noktasının konumu $N_1^* - A_1 < K_1 - N_1^*$ve $N_2^* - A_2 > K_2 - N_2^*$ koşulu ile belirlendiği için bu denge noktasının kararlılık durumuna bakarken bu şart kullanılır. O halde bu şart için $\det(J) < 0$ olarak bulunur ki bu da 2. içsel denge noktası olan $(N_1, N_2) = (\mathrm{C}, \mathrm{D})$ noktasının kararsız bir eyer noktası olduğunu gösterir. Bu denge noktasının kararlılık durumu sabit kaldığı için çatallanma durumu gözlenmez

(iii) (Şekil 3.4)'teki (K,L) İçsel denge noktasının kararlılık durumu: Bu denge noktasının konumu $N_1^* - A_1 > K_1 - N_1^*$ve $N_2^* - A_2 < K_2 - N_2^*$ koşulu ile belirlendiği için bu denge noktasının kararlılık durumuna bakarken bu şart kullanılır. O halde bu şart için $\det(J) < 0$ olarak bulunur ki bu da 3. içsel denge noktası olan $(N_1, N_2) = (\mathrm{K}, \mathrm{L})$ noktasının kararsız bir eyer noktası olduğunu gösterir. Bu denge noktasının kararlılık durumunda değişiklik olmadığı için çatallanma durumu gözlenmez.

(iv) (Şekil 3.4)'teki (M,N) İçsel denge noktasının kararlılık durumu: Bu denge noktasının konumu $N_1^* - A_1 > K_1 - N_1^*$ve $N_2^* - A_2 > K_2 - N_2^*$ koşulu ile belirlendiği için bu denge noktasının kararlılık durumuna bakarken bu şart kullanılır. O halde bu şart için $\det(J) > 0$ ancak

$$S > \frac{\alpha_{12}N_2^*}{K_1} + \frac{\alpha_{21}N_1^*}{K_2} - r_1N_1^*\left[-\frac{1}{K_1}(N_1^* - A_1) + \left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)\right] - r_2N_2^*\left[-\frac{1}{K_2}(N_2^* - A_2) + \left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)\right]$$

şartı için $\mathrm{tr}(J) > 0$ olacağından 4. içsel denge noktası olan $(N_1, N_2) = (\mathrm{M}, \mathrm{N})$ noktası kararsız bir düğüm noktası olur. Ancak sistemin diğer üç içsel denge noktası kaybolur. Yani nullcline eğrileri sadece bir noktada çakışırlar ki burada elde edilen tek içsel denge noktası kararsız olur. (bkz. (Şekil 3.3) (a))

$$\begin{aligned} S > \frac{\alpha_{12}N_2^*}{K_1} + \frac{\alpha_{21}N_1^*}{K_2} - r_1N_1^*\left[-\frac{1}{K_1}(N_1^* - A_1) + \left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)\right] \\ - r_2N_2^*\left[-\frac{1}{K_2}(N_2^* - A_2) + \left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)\right] - r_1\left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)(N_1^* - A_1) \\ - r_2\left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)(N_2^* - A_2) \end{aligned}$$

olması durumunda $\mathrm{tr}(J) < 0$ olur ki bu denge noktası asimptotik kararlı olur. İçsel denge noktalarının kararlılık durumu stoklama etkisiyle Model (1.4)'ten farklılık göstermemiş; ancak stoklama, denge noktalarının daha yüksek değerlere taşınmasına neden olmuştur. Burada stoklama şartına bağlı olarak denge noktasının kararlılık durumu değişmiş ve bu şart için determinant sıfır olmuştur. Yani denge noktası bu noktada teğetlik göstermiş ve iki denge noktası birleşerek yok olmuştur. Bu nedenle bu denge noktasında yukarıdaki stoklama şartına bağlı codimension-1 saddle-node çatallanması görülür.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar aşağıdaki teoremde verilmiştir:

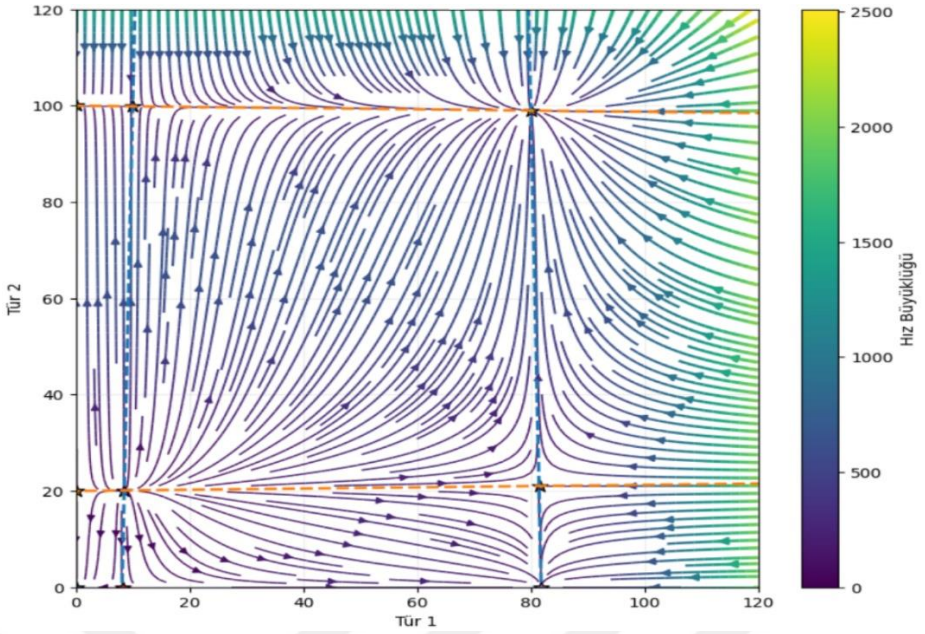
Teorem 3.4 (3.1) modeli için

$$S > \frac{\alpha_{12}N_2^*}{K_1} + \frac{\alpha_{21}N_1^*}{K_2} - r_1N_1^*\left[-\frac{1}{K_1}(N_1^* - A_1) + \left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)\right] - r_2N_2^*\left[-\frac{1}{K_2}(N_2^* - A_2) + \left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)\right]$$

olması durumunda sistem tek bir içsel denge noktası sahip olur. Bu durumda türlerin birlikte yaşayabilecekleri nüfus değer aralıklarını daraltarak türlerden birinin yok oluşu hızlanmış olacaktır.

3.2.3 Modelin Faz portresi ve Isı Haritası gibi simülasyonlarla analizi

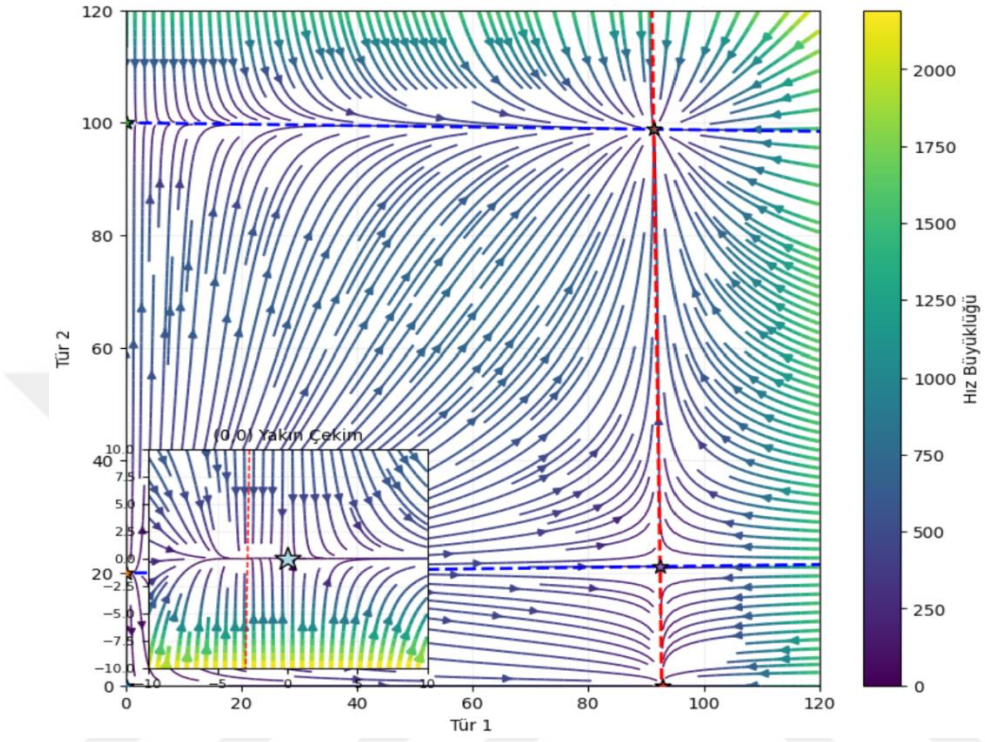
Otonom bir sistemin çözümlerini temsil etmenin en uygun yolu faz portresi oluşturmaktır. Faz portresi sistemin çözümlerinin izlediği yönlendirilmiş akışın yani yörüngelerin temsili bir gösterimidir. Yani sadece sistemin çözümlerinin yönünü göstererek çözümün nitel davranışı hakkında bilgiler verir. O halde otonom bir sistem, çözümlerinin çoğu, zamanla sonsuza yaklaşıyorsa kararsız, t, ∞'a doğru giderken tüm çözümleri 0'a yaklaşıyorsa asimptotik olarak kararlı, son olarak, çözümlerinin hiçbiri zamanla sonsuza yaklaşmıyorsa, ancak çoğu da sıfıra yaklaşmıyorsa nötr olarak kararlıdır (Miller ve Mattuck, 2010).



Şekil 3.6 (3.1) modelinin $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.4$, $K_1 = 100$, $K_2 = 80$, $A_1 = 20$, $A_2 = 15$, $\alpha_{12} = 0{,}8$, $\alpha_{21} = 0.6$ ve $S = 0.7$ parametreleri için çizilmiş hız skalalı genel faz portresidir.

Burada mavi kesikli çizgi ile Tür 1'in nullcline eğrisi, turuncu kesikli çizgi ile Tür 2'nin nullcline eğrisi temsil edilmiştir. (0,0) denge noktası tüm akış oklarını kendine doğru çektiği için asimptotik kararlı bir denge noktası olmuş ancak nüfus yoğunluğunun bu denge noktası yakınında düşük olması nedeniyle akış hızı daha düşük durumdadır. $(0, A_2)$ denge noktası Tür 1'in olmadığı ancak Tür 2'nin Allee eşiğinde olduğu denge noktası olup faz portresinde akış okları bu noktaya ulaşmama eğiliminde olup kararsız bir eyer görünümündedir. $(0, K_2)$ denge noktası Tür 1'in olmadığı ancak Tür 2'nin taşıma kapasitesinde olduğu denge noktası olup faz portresinde akış okları tamamen bu noktaya ulaşma eğiliminde olduğundan asimptotik kararlı bir denge noktası olmuştur. Tür 1'in Allee eşiğinden küçük olan eksen denge noktası karasız, taşıma kapasitesinden büyük olan köşe denge noktası kararlı olduğu görülmektedir. Ayrıca içsel denge noktalarından her iki türünde Allee eşik değerlerine daha yakın olduğu denge noktasında tamamen bir kaçış formu olduğu için kararsız düğüm, biri Allee eşik değeri diğeri taşıma kapasitesi değerine yakın olan iki içsel denge noktası kararsız eyer görünümünde olup her iki türün de taşıma kapasitesine daha yakın olduğu içsel denge noktasında ise tüm akış çizgileri

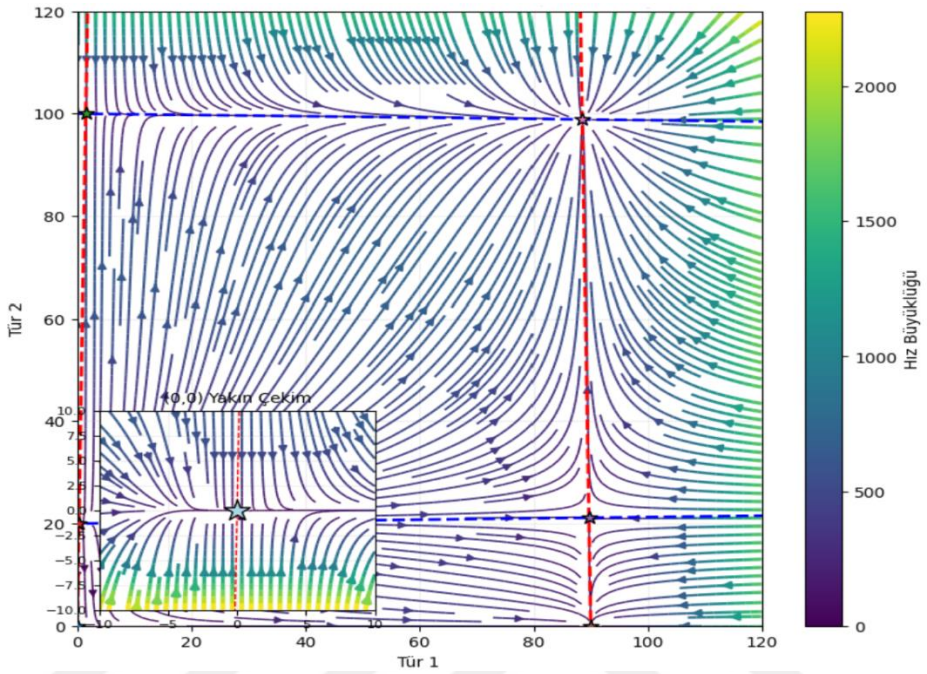
bu noktaya ulaşma eğiliminde olduğundan kararlı bir düğüm noktası görünümündedir.



Şekil 3.7 (3.1) modelinin $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.6$, $K_1 = 80$, $K_2 = 100$, $A_1 = 10$, $A_2 = 20$, $\alpha_{12} = 0.4$, $\alpha_{21} = 0.6$ ve $S = 4$ parametreleri için çizilmiş hız skalalı genel faz portresidir.

Burada mavi kesikli çizgi ile Tür 1'in nullcline eğrisi, turuncu kesikli çizgi ile Tür 2'nin nullcline eğrisi temsil edilmiştir. Burada stoklama katsayısı arttığı için kırmızı nullcline eğrisi(parabol) daha geniş bir zemine denk gelecek şekilde yukarı taşındığından bir denge noktası 0 değerinden daha düşük bir seviyeye geldiği için pozitif dörtte birlik bölgede sadece 6 tane denge noktası görülmektedir. Burada parametre değerleri $S > A_1 r_1$ olacak şekilde belirlendiği için (0,0) denge noktası yukarıdaki faz durumunun tersine kararsız bir eyer görünümü almıştır. Bunun sebebi Tür 1'in stoklamanın büyüklüğünden kaynaklı Allee eşik değeri 0'dan daha küçük bir noktada dengeye ulaştığı için (0,0) aslında bir Allee eşik dengesi formuna

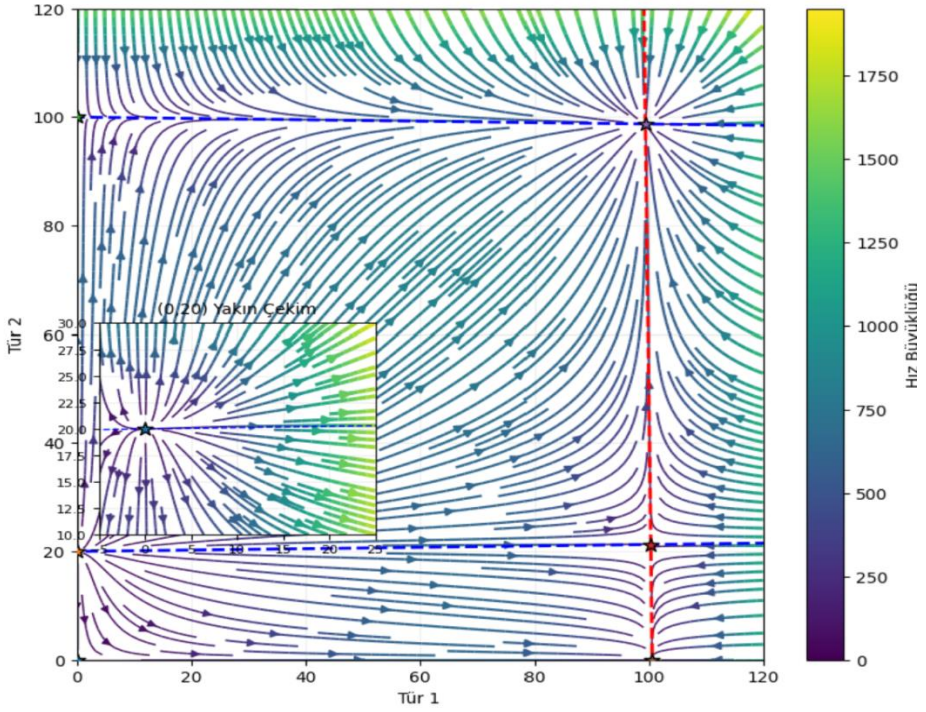
dönüşmüştür. Bu durum faz portresindeki (0,0) yakın çekim bölgesinde daha net görülmektedir. O halde daha önceki matematiksel incelememiz doğrulanmıştır.



Şekil 3.8 (3.1) modelinin $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.6$, $K_1 = 80$, $K_2 = 100$, $A_1 = 10$, $A_2 = 20$, $\alpha_{12} = 0.4$, $\alpha_{21} = 0.6$ ve $S = 3$ parametreleri için çizilmiş hız skalalı genel faz portresidir.

Burada mavi kesikli çizgi ile Tür 1'in nullcline eğrisi, turuncu kesikli çizgi ile Tür 2'nin nullcline eğrisi temsil edilmiştir. Belirlenen stoklama parametresi ile $S = A_1 r_1$ olması durumunda kararlılık durumu gösterilmiştir. Burada yine Tür 2'ye ait olan nullcline eğrisinde herhangi bir değişme olmamasına rağmen stoklama ile Tür 1'e ait nullcline eğrisi yine eksen denge noktalarından biri taşıma kapasitesinden daha yüksek bir değer, diğeri Allee eşiğinden küçük bir noktada hatta stoklama katsayısının büyüklüğünden dolayı teorik olarak sıfırdan küçük olduğu için pozitif dörttebirlik bölümde görülememiştir. Tüm bu durumlar ile birlikte parametreler $S = A_1 r_1$ olacak şekilde seçildiği için (0,0) denge noktası yarı kararlı bir görünüm göstermiştir. Dikkatli bakıldığında (0,0) yakın çekim bölgesinde Tür 2'ekseni üzerindeki yörünge okları (0,0) denge noktasına ulaşma eğiliminde yani kararlı

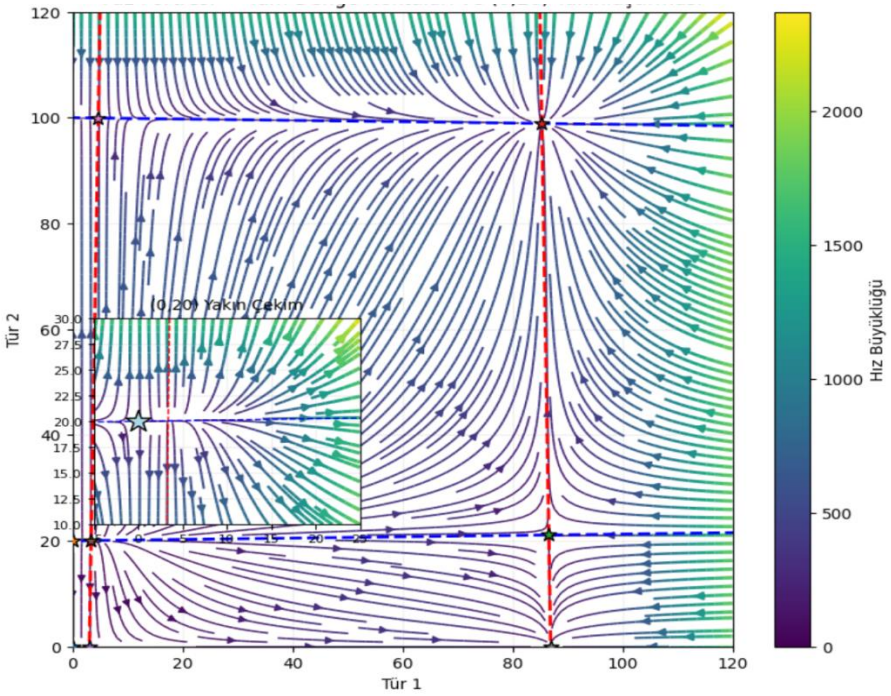
görünüm gösterirken Tür 1 ekseni üzerindeki yörünge okları $(0,0)$ denge noktasından uzaklaşma eğiliminde yani kararsız görünüm göstermiştir. Bundan dolayı orijin denge noktası yarı kararlı bir denge noktası olmuştur. Bu durum daha önce merkezi manifold teoremi uygulanarak kanıtlanmıştır. Diğer denge noktalarının kararlılığında herhangi bir değişim olmamıştır. O halde stoklama katsayısı belirtilen değer için seçilirse Tür 1 rakibi karşısında daha dirençli olacak hatta rakibi kitlesel yok oluşa girse bile stoklamanın etkisiyle Tür 1 asla yok olmayacağı bir dirence sahip olmuştur.



Şekil 3.9 (3.1) modelinin $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.6$, $K_1 = 80$, $K_2 = 100$, $A_1 = 10$, $A_2 = 20$, $\alpha_{12} = 0.4$, $\alpha_{21} = 0.6$ ve $S = 7$ parametreleri için çizilmiş hız skalalı genel faz portresidir.

Burada mavi kesikli çizgi ile Tür 1'in nullcline eğrisi, turuncu kesikli çizgi ile Tür 2'nin nullcline eğrisi temsil edilmiştir. Belirlenen stoklama parametresi ile $S > A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda kararlılık durumu gösterilmiştir. Burada önemli olan nokta Tür 2'nin Allee eşik değerinin olduğu $(0, A_2)$ denge noktasının

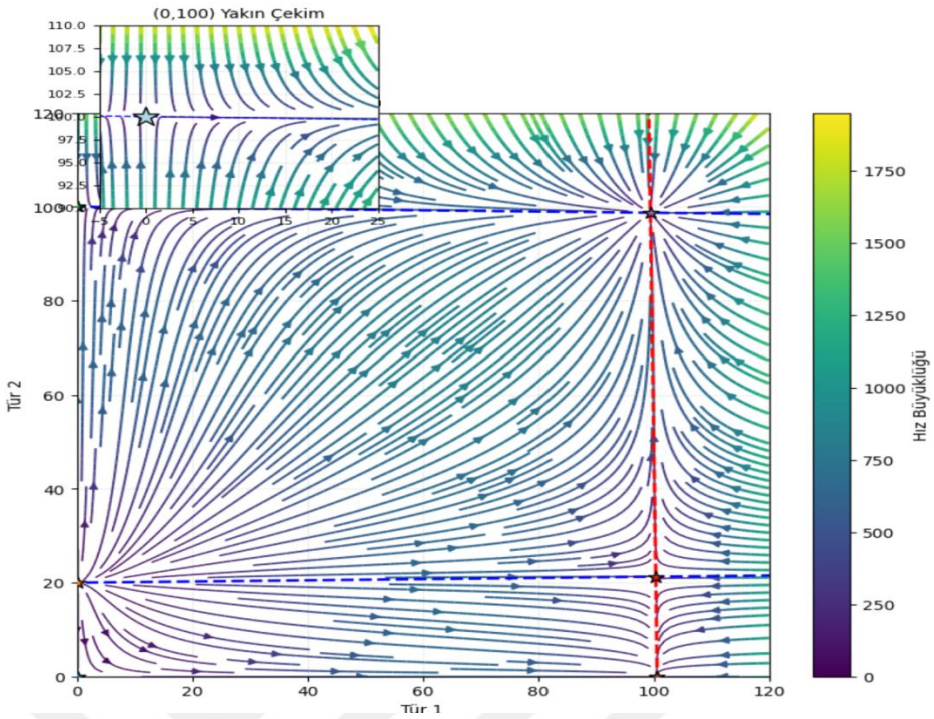
durumudur, stoklama katsayısı $S > A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olarak seçildiğinde bu denge noktasında görüldüğü üzere tamamen bir kaçış olduğu için, burası kararsız bir düğüm noktası durumundadır.



Şekil 3.10 (3.1) modelinin $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.6$, $K_1 = 80$, $K_2 = 100$, $A_1 = 10$, $A_2 = 20$, $\alpha_{12} = 0.4$, $\alpha_{21} = 0.6$ ve $S = 2$ parametreleri için çizilmiş hız skalalı genel faz portresidir.

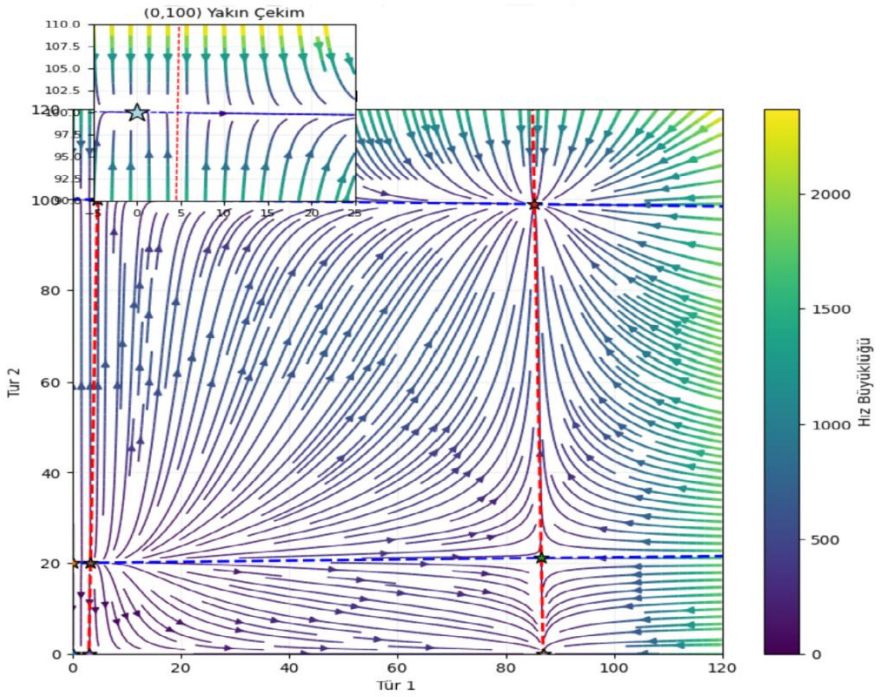
Burada mavi kesikli çizgi ile Tür 1'in nullcline eğrisi, turuncu kesikli çizgi ile Tür 2'nin nullcline eğrisi temsil edilmiştir. Belirlenen stoklama parametresi ile $S < A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda kararlılık durumu gösterilmiştir. Burada önemli olan Tür 2'nin Allee eşik değerinin olduğu $(0, A_2)$ denge noktasının durumudur. Çünkü belilenen stoklama değeri için yıldız sembolü ile belirtilen bu denge noktası kararsız bir eyer görünümündedir.

O halde (Şekil 3.9) ve (Şekil 3.10) faz portrelerinde de görüldüğü gibi yapılan matematiksel kanıtımız doğru çıkmıştır.



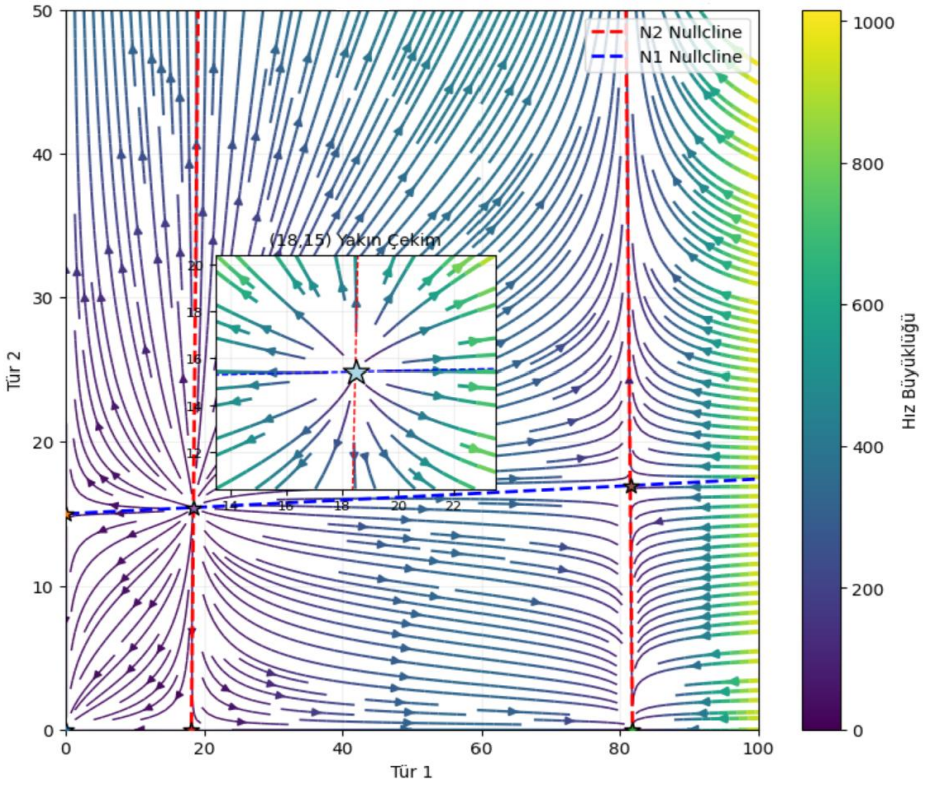
Şekil 3.11 (3.1) modelinin $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.6$, $K_1 = 80$, $K_2 = 100$, $A_1 = 10$, $A_2 = 20$, $\alpha_{12} = 0.4$, $\alpha_{21} = 0.6$ ve $S = 7$ parametreleri için çizilmiş hız skalalı genel faz portresidir.

Burada mavi kesikli çizgi ile Tür 1'in nullcline eğrisi, turuncu kesikli çizgi ile Tür 2'nin nullcline eğrisi temsil edilmiştir. Belirlenen stoklama parametresi ile $S > A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda kararlılık durumu gösterilmiştir. Burada önemli olan Tür 2 'nin taşıma kapasitesinde olduğu $(0, K_2)$ denge noktasının durumudur. Bu denge noktasına yakın çekimle baktığımızda yıldız ile temsil edilen bu noktadan yörünge okları eyer görünümü ile kaçmaktadır. Yani kararsız bir eyer formu vardır. Ancak bu durum Allee etkili Lotka-Volterra rekabet modeline aykırı bir durumdur çünkü herhangi bir tür taşıma kapasitesine ulaşma eğilimindedir.



Şekil 3.12 (3.1) modelinin $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.6$, $K_1 = 80$, $K_2 = 100$, $A_1 = 10$, $A_2 = 20$, $\alpha_{12} = 0.4$, $\alpha_{21} = 0.6$ ve $S = 2$ parametreleri için çizilmiş hız skalalı genel faz portresidir.

Burada mavi kesikli çizgi ile Tür 1'in nullcline eğrisi, turuncu kesikli çizgi ile Tür 2'nin nullcline eğrisi temsil edilmiştir. Belirlenen stoklama parametresi ile $S < A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$ olması durumunda kararlılık durumu gösterilmiştir. Burada önemli olan Tür 2 'nin taşıma kapasitesinde olduğu $(0, K_2)$ denge noktasının durumudur. Bu denge noktasına yakın çekimle baktığımızda yıldız ile temsil edilen bu noktaya tüm yörünge okları ulaşma eğiliminde olduğu için asimptotik kararlı bir denge noktasıdır.



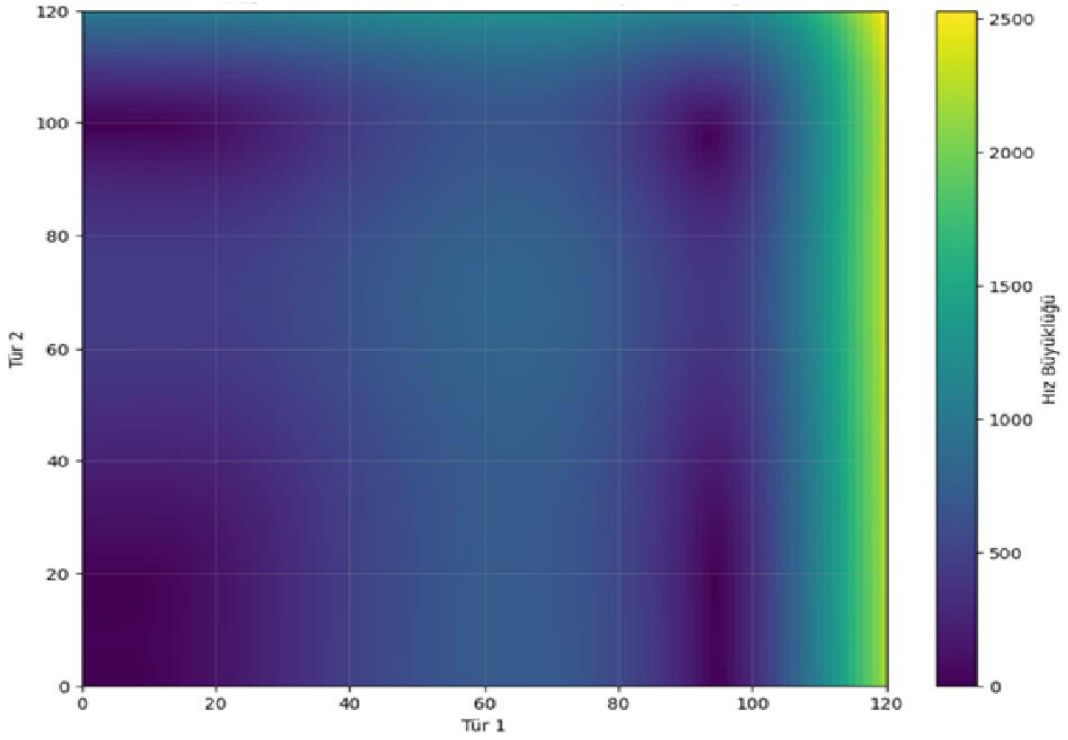
Şekil 3.13 (3.1) modelinin $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.4$, $K_1 = 80$, $K_2 = 100$, $A_1 = 20$, $A_2 = 10$, $\alpha_{12} = 0.6$, $\alpha_{21} = 0.8$ ve $S = 0{,}7$ parametre değerleri için çizilmiş faz portresidir.

Burada daha önce yukarıda kararlılık durumu incelenen ve yıldız ile temsil edilen ilk içsel denge noktasının kararlılık durumu yakın çekim ile gösterilmiştir.

Burada

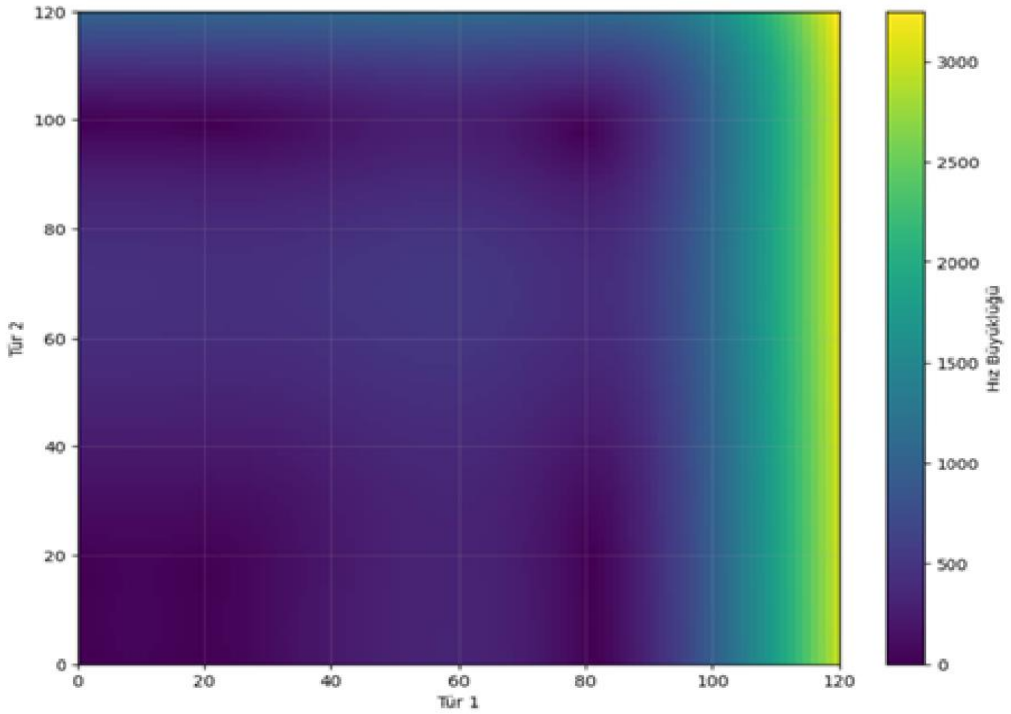
$$S > \frac{\alpha_{12}N_2^*}{K_1} + \frac{\alpha_{21}N_1^*}{K_2} - r_1\left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)(N_1^* - A_1) - r_2\left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)(N_2^* - A_2)$$
$$- r_1N_1^*\left[-\frac{1}{K_1}(N_1^* - A_1) + \left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)\right] - r_2N_2^*\left[-\frac{1}{K_2}(N_2^* - A_2) + \left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)\right]$$

şartı sağlanacak şekilde çizildiğinde bu içsel denge noktasından tamamen bir kaçış görünümü söz konusudur. Bu durum denge noktasının karasız bir düğüm noktası olduğunu gösterir. Ancak bu şartın tersi durumunda da bu içsel denge noktası kararsız bir düğüm noktası olur. Bu denge noktası için söylenebilir ki denge noktası her durumda kararsız bir düğüm noktasıdır. Bu şart ise matematiksel olarak bu içsel denge noktasının kararsız düğüm noktası olması durumunu kesin hale getirmiştir.



Şekil 3.14 (3.1) modelinin $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.4$, $K_1 = 80$, $K_2 = 100$, $A_1 = 20$, $A_2 = 15$, $\alpha_{12} = 0.6$, $\alpha_{21} = 0.8$ ve $S = 7$ değerleri için çizilmiş ısı haritasıdır.

Burada sarı ve daha açık renkler sistemin çok hızlı hareket ettiğini yani çok hızlı değiştiğini gösterirken daha koyu olan siyah ve mor renkli kısımlar sistemin daha yavaş hareket ettiğini yani artık dengeye ulaşma eğiliminde olduğunu gösterir. Bu nedenle ısı haritasında görülen koyu renkli bölmelerde denge noktaları mevcuttur ve nüfus artış-azalışları daha yavaştır, ancak denge noktalarının dışındaki bölgelerde daha açık renkler görülmektedir. Yani sistem için buralarda nüfus artış-azalışı daha fazla değişim gösterdiği için bir denge durumu söz konusu değildir.



Şekil 3.15 (3.1) modelinin $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.4$, $K_1 = 80$, $K_2 = 100$, $A_1 = 20$, $A_2 = 15$, $\alpha_{12} = 0.6$, $\alpha_{21} = 0.8$ ve $S = 0.5$ değerleri için çizilmiş ısı haritasıdır.

Burada bir önceki ısı haritası ile kıyaslama yapıldığında stoklama katsayısı daha düşük bir değer aldığında koyu renkli bölgeler birbirine daha fazla yakınlaşmaya başlamış ve denge noktaları daha yakın hale gelmiştir. Bu durum Tür 1'i Tür 2 karşısında daha küçük nüfus alanlarında rekabet edebilir hale getirirken nüfus artmaya başlayınca Tür 1 diğer tür karşısında rekabet edemeyecek duruma gelerek yok olmaya başlayacaktır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Allee etkisi ve stoklamayı dikkate alan bir Lotka-Volterra modeli oluşturulmuş ve niteliksel olarak analiz edilerek değerlendirilmiştir. Niteliksel analiz yapılarak elde edilen sonuçlar faz portresi ve ısı haritaları ile uyumlu çıkmış ve aşağıdaki değerlendirme ve sonuçlara ulaşılmıştır.

Modelin tüm denge noktalarının kararlılık durumları incelendiğinde, stoklamanın Tür 1'in uzun vadede varlığını sürdürebilmesini ve Tür 2'ye karşı belirgin bir rekabet avantajı elde etmesini sağladığı görülmektedir.

Denge noktaları (1.4) modeli ile verilen model ile kıyaslandığında, her iki türün de olmaması durumunda ortaya çıkan ve tüm sistemlerde mevcut olan (0,0) denge noktası stoklama olması durumunda bile mevcuttur. Tür 2' nin nüfusuna stoklama yapılmadığı için Tür 2'nin bağlı olduğu $(0, A_2)$ ve $(0, K_2)$ denge noktaları sistem için değişiklik göstermeden aynı formda devam etmiştir. Tür 1'in nüfusuna stoklama yapıldığı için N_1 ekseninde bulunan Allee eşik ve taşıma kapasitesi denge noktaları farklılık göstererek Allee eşiğinden küçük ve taşıma kapasitesinden yüksek olacak şekilde denge noktaları oluşmuştur.

(1.4) modeli ile verilen modelden farklı olarak, (0,0) denge noktasının kararlılık durumu stoklama etkisi ile değişmiştir. (1.4) modelinde asimptotik kararlı olan bu denge noktası, Tür 1'e ait stoklama teriminin eklenmesiyle, stoklama katsayısının büyüklüğüne bağlı olarak kararlı, kararsız ve yarı kararlı bir yapı sergilemiştir. Stoklama etkisi Tür 2 için herhangi bir denge noktası farklılaşmasına yol açmadığından, $(0, A_2)$ ve $(0, K_2)$ noktaları (1.4) modelinde olduğu gibi aynı kararlılık durumunu korumuştur. Ancak Tür 1 için stoklama, denge noktasını Allee eşiğinin altına taşıyabilmiş; buna rağmen bu durum kararlılığı değiştirmemiş ve her iki durumda da denge noktası kararsız kalmıştır. Bununla birlikte, stoklama etkisi Tür 1'i taşıma kapasitesinin üzerine çıkararak kısa süreli bir denge noktası oluşturabilmiştir. Ancak bu durumda dahi kararlılık durumu (1.4) modelindeki ile aynı kalmış ve herhangi bir değişim göstermemiştir. Köşe denge noktaları stoklama etkisiyle (1.4) modelinden farklılık göstermiş ve N_1 ekseni üzerinde kararlılık Allee eşiğinin altı ve taşıma kapasitesinin üstündeki değer bölgelerinde kayan denge durumları ile oluşmuştur. Yani Tür 1 için taşıma kapasitesinin üstünde bir denge noktası

durumu ortaya çıkmıştır. Ayrıca orijin dengesi stoklamadan dolayı eksenler üzerinde stoklamanın etili olduğu eksene doğru kayarak yarı kararlı bir görünüm almıştır.

Tür 2 için iki olası senaryo öngörülmektedir:

(a) Birlikte var olma: Tür 2, Tür 1 ile birlikte kararlı bir dengeye ulaşarak ekosistemde varlığını sürdürebilir.

(b) Kitlesel yok oluş: Tür 2, Tür 1'in artan popülasyonu karşısında rekabet üstünlüğü sağlayamayarak Allee eşiğinin altına düşebilir. Bu durumda büyüme hızı negatif hale gelecek, popülasyon giderek azalacak ve kısa sürede yok olacaktır.

Dolayısıyla, stoklama Tür 1'i istilacı tür (Tür 2) karşısında korurken, istilacı türün sistem dışına itilmesine de neden olabilir. Bu durum, stoklamanın yalnızca belirli bir türün korunmasında değil, aynı zamanda ekosistem dengesinin şekillenmesinde de kritik bir rol oynadığını göstermektedir.

Öte yandan, stoklama miktarı yalnızca Tür 1'in popülasyonunu tam olarak Allee eşiği civarına taşıyacak düzeyde olursa, bu durum kritik ve hassas bir denge yaratır. Çünkü bu noktada Allee eşiği hâlâ kararsız bir denge noktası olmaya devam edecek, ancak Tür 1 bu eşiğe daha az sıklıkla yaklaşacaktır. Böylece Tür 1, önceki duruma kıyasla yok olma riskinden daha uzak bir konuma geçer ve Tür 2 karşısında daha dirençli hale gelir.

Buna bağlı olarak, stoklama miktarının düzeyi ve etkilediği nüfus aralığı, Allee etkili rekabet sistemlerinde türlerin kaderini ve ekosistemin uzun vadeli yapısını belirleyen temel parametrelerden biri haline gelmektedir.

O halde yukarıdaki kanıtlara bağlı olarak durumu şu şekilde özetleyebiliriz: Kritik stoklama değeri $S_p = A_1 r_1$ için (0,0) dengesinin sistem Tür 1 yönünde kararlı Tür 2 yönünde kararsız yani yarı kararlı olur. Özellikle, $S < S_p$ şartı için (0,0) yerel asimtotik kararlı ve $S > S_p$ şartı için (0,0) kararsız bir eyer noktası olur.

Sonuç olarak, her iki türün de Allee etkisi nedeniyle kritik bir Allee eşik değerine sahip olması, her iki tür için de kritik nüfus seviyeleri altında yok olma riski taşıyan senaryoların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Ayrıca, türlerden birine uygulanan stoklama mekanizması, sadece bu türün popülasyon dinamiklerini değil, aynı zamanda diğer türün habitat içindeki durumunu da önemli ölçüde değiştirmektedir. Bu etkileşimler, türler arası rekabet ve Allee etkisi bağlamında ekosistem dengesinin hassasiyetini

artırmakta ve türlerin sürdürülebilirliği açısından dikkatli parametre (stoklama) yönetimi gerektirmektedir.

Ayrıca verimli bir stoklama yapılabilmesi için aşağıdaki sınırlarda stoklama yapılması hem türleri korumuş olacak hem de herhangi bir tür için kitlesel yok olmayı ortadan kaldıracaktır.

Çizelge 4.1 (3.1) modeli için her iki türünde köşe denge noktalarının kararlılık durumlarını sağlayan en verimli stoklama parametreleri

	$(0,0)$	$(0, A_2)$	$(0, K_2)$	$(E_1, 0)$	$(T_1, 0)$
$S < A_1 r_1$	yerel asimptotik kararlı				
$S > A_1 r_1$	kararsız bir eyer				
$S = A_1 r_1$	N_1 ekseni yönünde kararsız				
$S > A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$	kararsız bir eyer	kararsız bir eyer			
$S < A_1 r_1 + \frac{\alpha_{12} A_2}{K_1}$		kararsız bir düğüm	yerel asimptotik kararlı		
$S < r_1(T_1 - A_1)$					yerel asimptotik kararlı

Bu köşe denge durumlarının dışında her iki türünde birlikte yaşamasına el verişli bölgeler olan içsel denge durumları için şunlar söylenebilir:

Sistemde stoklama teriminin

$$S < \frac{\alpha_{12} N_2^*}{K_1} + \frac{\alpha_{21} N_1^*}{K_2} - r_1 \left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)(N_1^* - A_1) - r_2 \left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)(N_2^* - A_2)$$
$$- r_1 N_1^* \left[-\frac{1}{K_1}(N_1^* - A_1) + \left(1 - \frac{N_1^*}{K_1}\right)\right]$$
$$- r_2 N_2^* \left[-\frac{1}{K_2}(N_2^* - A_2) + \left(1 - \frac{N_2^*}{K_2}\right)\right]$$

koşulunu sağlaması durumunda her iki tür asla bir arada yaşayamayacak ve birbirlerine daha fazla baskı uygulayacaktır. Yani bu şart sistemi olumsuz etkileyecek ve stoklama yapılmayan türü sistemde tamamen güçsüz duruma getirecektir.

Her iki tür için çatallanma durumlarının görüldüğü kritik stoklama değerleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

Orijin Eşiğinde görülen çatallanma durumu: Kritik stoklama değeri,

$$S_C = A_1 r_1$$

için (0,0) dengesinin bir özdeğeri sıfırı geçer. Özellikle, $S < S_C$ olması durumunda (0,0) yerel asimtotik kararlı olur. $S > S_C$ olması durumunda ise (0,0) kararsız bir eyer noktası olur. Bu geçiş, (0,0) çevresinde tipik bir transkritik karakter taşır.

İç saddle–node durumunun görüldüğü çatallanma: $(N_1^*, N_2^*) > 0$ iç denge noktaları için,

$$f_1(N_1^*, N_2^*) = f_2(N_1^*, N_2^*) = 0$$

Ve

$$\det J(N_1^*, N_2^*) = 0$$

olması durumunda iç saddle–node kritik noktaları oluşur; bu kritiklerin her iki yanında iç denge sayısı bir artar veya azalır. İç dengelerden kalan tek denge, $\mathrm{Tr}\, J < 0$, $\det J > 0$ koşuluyla yerel asimptotik kararlı düğüm veya odaktır. Bu da türlerin birlikte varlığını sürdürebileceği içsel denge noktasıdır.

Eksen saddle–node durumunun görüldüğü çatallanma: $N_2 = 0$ ekseninde (pozitif N_1 için) dengeler,

$$S = r_1(T_1 - A_1)$$

değerinde saddle–node çatallanmasıyla çift halinde doğar veya yok olur.

Uygulamada stoklama $S > 0$ olduğundan, bu eksen üzerindeki saddle–node yalnız matematiksel bütünlük için kaydedilir; biyolojik anlamlı bölgede ($S > 0$) eksen üzerinde saddle–node görülmez, iç dengelere kayma olur. Yani sistem aslında bir klasik Allee etkili Lotka-Volterra rekabet modeli olduğu için stoklama yapılan Tür 1 için taşıma kapasitesi geçici olarak aşılacak ve bu denge noktası civarında kararlılık durumu değişiklik gösterecektir. Bu durumda stoklama yukarıdaki değerden küçük olursa Tür 1 istilacı tür karşısında güçsüz olmaya devam edecek ve bir müddet sonra kitlesel yok oluşa sürüklenecektir. Bu nedenle de stoklama uygulaması gereksiz hale gelecektir.

Model için Hopf çatallanması görülmez çünkü, çatallanma durumunda parametrelerin tümü pozitif değerlidir bu nedenle

$$\Delta = \mathrm{tr}(J)^2 - 4\det(J) > 0$$

olur. O halde sistemde karmaşık kök durumu gerçekleşmez. Bu da sistemde Hopf çatallanma olmadığını gösterir.

O halde stoklamanın dahil edildiği Allee etkili Lotka-Volterra rekabet modelinde sadece transkritik ve saddle node çatallanmaları görülür.

KAYNAKLAR

Allee, W. C. (1938). ***The Social Life of Animals.*** William Heinemann, University of Chicago Press, Chicago, USA.

Almeida, R. M., Ferreira, S. A., Oliveira, P. M. (2015). *Modeling population dynamics with Allee effects in ecological systems.* Ecological Modelling, 314, 41–52.

AlSharawi, A., Rhouma, M. (2008). *Modelling the Allee effect in population dynamics.* Applied Mathematical Modelling, 32(12), 2490–2503.

Begon, M., Townsend, C. R., Harper, J. L. (2006). ***Ecology: From Individuals to Ecosystems*** (4th ed.). Blackwell Publishing..

Burgman, M. A., Ferson, S., Akçakaya, H. R. (1993). ***Risk Assessment in Conservation Biology.*** Chapman and Hall, London.

Chen, S., Chen, F., Srivastava, V., Parshad, R. D. (2019). Dynamical analysis of a Lotka-Volterra competition model with both Allee and fear effects. *Mathematical Biosciences*, *314*, 1-12.

Courchamp, F., Berec, L., Gascoigne, J. (2008). ***Allee Effects in Ecology and Conservation.*** Oxford University Press, New York.

De Silva, M., Jang, S. R. J. (2015). Competitive exclusion and coexistence in a Lotka–Volterra competition model with Allee effects and stocking. *Letters in Biomathematics*, *2*(1), 56-66.

De Silva, T. M. M. (2014). *Dynamics of a Lotka-Volterra competition model with Allee effects and stocking*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Texas Tech University, Lubbock, TX, USA.

Dennis, B. (1989). Allee-effect: Population growth, critical density, and chance of extinction. *Natural Resource Modeling*, *3*(4), 481-538.

Elaydi, S., Yakubu, A. A. (2002). A global stability of cycles: Lotka-Volterra competition model with stocking. *Journal of Difference Equations and Applications*, *8*(6), 537-549.

Gavina, M. K. A., Tahara, T., Tainaka, K.-I., Ito, H., Morita, S., Ichinose, G., Okabe, T., Togashi, T., Nagatani, T., Yoshimura, J. (2018). *Multi-species coexistence in Lotka-Volterra competitive systems with crowding effects*. Scientific Reports, 8, 1198.

Gonzalez, A., Thompson, D. (2012). Allee effects and species persistence: A mathematical approach. *Journal of Theoretical Biology*, *304*, 1-10.

Hanski, I., Gilpin, M. E. (1997). ***Metapopulation Biology: Ecology, Genetics, and Evolution.*** Academic Press.Hastings, A. (1997). *Population biology: Concepts and models*. Springer. New York, USA.

Hastings, A. (1997). ***Population biology***. Springer-Verlag.

Jang, S. R. J. (2013). On the Lotka-Volterra competition system with Allee effects. *Computational and Applied Mathematics*, *32*(1), 179-189.

Kot, M. (2001). ***Elements of Mathematical Ecology.*** Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Kulenović, M. R. S., Nurkanović, M. (2012). Global behavior of a two-dimensional competitive system of difference equations with stocking. *Mathematical and Computer Modelling*, *55*(3-4), 1608-1620.

Kuperman, M. N., Abramson, G. (2007). Allee effect in models of interacting species. *Chaos, Solitons & Fractals*, *34*(2), 179-184.
Kuznetsov, Y. A. (2004). ***Elements of Applied Bifurcation Theory*** (3rd ed.). Springer.

Lassiter, R. (2007). ***Mathematical Methods for Ecology and Evolution.*** Cambridge University Press.
Livadiotis, G., Elaydi, S. (2012). General Allee effect in two-species population biology. *Journal of Biological Dynamics*, *6*(4), 959-973.
Lorenzen, K. (2005). Population dynamics and potential of fisheries stock enhancement: Practical theory for assessment and policy analysis. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, *360*(1453), 171–189. https://doi.org/10.1098/rstb.2004.1570Murray, J. D. (2002). In *Models for Interacting Populations*. ***Mathematical Biology: I. An Introduction***. (3rd ed., pp. 94-101). Springer: Germany.
Miller, H. ve Mattuck, A. (2010). Phase portraits in two dimensions (18.03 Differential Equations dersi, Supplementary Notes, Chapter 26). *MIT OpenCourseWare*. **Erişim tarihi: 14 Kasım 2025.** Erişim adresi: https://ocw.mit.edu/courses/18-03-differential-equations-spring-2010/resources/mit18_03s10_chapter_26/
Müller, J., Kuttler, C. (2014). ***A Course in Mathematical Biology: Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods.*** Springer.
Müller, J., Kuttler, C. (2014). Lecture notes on mathematical modelling in the life sciences. In V. Capasso, J. Müller, & G. Nappo (Eds.), ***Methods and models in mathematical biology: Deterministic and stochastic approaches*** (pp. 192-267). Springer. Heidelberg, Germany. _4 *biology: I. An introduction* (3rd ed.). Springer. New York, USA.
Nock, C. J., Ovenden, J. R., Butler, G., Wooden, I., Moore, A., Baverstock, J. (2011). Population structure, effective population size and adverse effects of stocking in the endangered Australian freshwater cod *Maccullochella ikei*. *Journal of Fish Biology*, *78*(1), 303-321.
Perko, L. (2013). ***Differential equations and dynamical systems*** (3rd ed.). Springer. New York, USA.
Ricker, W. E. (1954). Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, *11*(5), 559-623.
Stephens, P. A., Sutherland, W. J., & Freckleton, R. P. (1999). What is the Allee effect? *Oikos*, *87*(1), 185-190.
Strogatz, S. H. (2018). ***Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering***. CRC Press. https://doi.org/10.1201/9780429399640
Tilman, D. (1982**). *Resource competition and community structure*.** Princeton University Press. Princeton, NJ, USA.
Turchin, P. B. (2003). ***Complex population dynamics: A theoretical/empirical synthesis.*** Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400847280
Wang, G., Liang, X. G., Wang, F. Z. (1999). The competitive dynamics of populations subject to an Allee effect. *Ecological Modelling*, *124*(2-3), 183-192.
Wiggins, S. (2003). ***Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos***. Springer Science & Business Media.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Merve DELİBAŞ

Eğitim Bilgileri

Lisans

Üniversite : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Fakülte : Eğitim Fakültesi

Bölüm : İlk Öğretim Matematik Öğretmenliği

Mezuniyet Yılı : 2017

Yüksek Lisans

Üniversite :

Enstitü :

Anabilim Dalı :

Mezuniyet Yılı :

Akademik Yayınlar (Kaynakların yazım kuralları geçerlidir.)

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
[Listeden enstitünüzü seçiniz]

Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu

Tez Başlığı : ……..

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam …… (……) sayfalık kısmına ilişkin, .../……/…… tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından …….. adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı %..... (……) dır.

Orijinallik raporu, aşağıdaki filtreler kullanılarak oluşturulmuştur:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

… / … / 20..

İmza

[Öğrenci Ad Soyadı]

Öğrenci No _____

Anabilim Dalı _____

Programı ☐ Yüksek Lisans ☐ Doktora

UYGUNDUR
imza

Danışman
[Unvan Ad SOYAD]

UYGUNDUR
imza

Enstitü Onayı

(Enstitü Müdür/Müdür Yrd)