

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP YARDIMIYLA BİR LİNEER GRAFA İZOMORF OLAN
GRAFLARIN SAYISININ BELİRLENMESİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Gürçin UVAÇIN
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

VAN - 2006

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP YARDIMIYLA BİR LİNEER GRAFA İZOMORF OLAN
GRAFLARIN SAYISININ BELİRLENMESİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Gürçin UVAÇIN

VAN - 2006

ÖZET

GRUP YARDIMIYLA BİR LİNEER GRAFA İZOMORF OLAN GRAFLARIN SAYISININ BELİRLENMESİ ÜZERİNE

UVAÇIN, Gürgin

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

Eylül 2006, 24 Sayfa

Graf Teorisi veya Çizge Kuramı olarak da tanımlanan bu kuram matematiğin çeşitli dallarında ile fizikte elektrik devreleri problemlerinde, kimyada organik bağların gösterimi ve çözümlerinde ve mühendislik alanında çok sık kullanılan bir kuramdır. Özellikle fuzzy graflar günümüzde hemen hemen tüm bilim dallarında kullanılmaktadır. Bu yöntemin kullanılması son derece kullanışlı olmakla birlikte problemler daha kolay çözülebilmektedir.

Bu çalışmamız beş bölümden oluşmakta olup birinci bölümde graf kuramının oluşumu ve süreci verilerek yapılmış çalışmalar öncüleri ile birlikte verilmiştir.

İkinci bölümde konu ile ilgili yazılmış makaleler derlenip toparlanarak kaynak bildirisi kısmı oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde graf ve gruplarla ilgili temel tanımlara yer verilmiştir.

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde, verilen bir buklesiz lineer G grafa izomorf olan G_f grafin sayısı bu grafa ait grubun mertebesine eşit olduğu gösterildi.

Son bölüm, beşinci bölümde, ise bulduğumuz bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: İzomorf grafların sayısı, Lineer grafin grubu

ABSTRACT

ON THE DETERMINATION OF THE NUMBER OF GRAPHS WHICH ARE ISOMORPHIC TO A LINEAR GRAPH WITH THE HELP OF THE GROUP

UVAÇIN, Gürçin

Msc, Mathematics Main Science Branch

Supervisor: Assist. Prof. Dr. M. Şerif ALDEMİR

September 2006, 24 pages

Graph Theory is a theory which is used on a widespread scale in various branches of mathematics, in the problems of electrical circuits in physics, in the illustrations and solutions of organic bonds in chemistry and in various applications of engineering fields, namely in fuzzy graphs. In almost every branch of sciences, it has a widespread use. Means and modes based this application are very useful, and problems can be solved with ease.

This study is composed of five sections. In the first section, the constitution of graph theory together with its process has been demonstrated, and studies related with this topic have been referred.

In the second section, articles related with the topic have been compiled and bibliographic accounts have been given.

In the third part, fundamental definitions on graphs and groups have been made.

In the fourth section of this study, the number of G_I graph which is isomorphic to linear G graph which has no loop has been shown to be equal to the level of the group belonging to this graph.

In the fifth section some of the data belonging to our conclusions have been presented.

Key words: The number of isomorphic graphs, Linear graph group.

ÖNSÖZ

Bu çalışmamızda, verilen bir buklesiz Lineer $G(m, n)$ grafa izomorf olan G_I grafin sayısı bu grafa ait grubun mertebesine eşit olduğu gösterilmiştir.

Bu tez çalışmamda, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve çok büyük fedakarlıklarda bulunan danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ADEMİR' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmam süresince beni yönlendiren, yazım ve dizgin konularının oluşturmada yardımlarını esirgemeyen bölümümüz Arş. Gör. Dr. Sabahattin ŞEVGİN' e teşekkürü bir borç bilirim.

Gürgin UVAÇIN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	2
3. TEMEL TANIMLAR	3
3.1. Graflarla İlgili Temel Tanımlar	3
3.2. Gruplarla İlgili Temel Tanımlar	9
3.3. Graf ve Gruplarla İlgili Temel Tanımlar	11
4. GRAFIN GRUBU	12
4.1. Grafın Otomorfizm Grubu	12
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	20
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Königsberg köprüsünün graf ile gösterimi	1
Şekil 3.1.1. n - tepeli sıralı ayırıt	4
Şekil 3.1.2. $G(3, 4)$ Bipartite Grafi	5
Şekil 4.1. ($K_4 - x$ grafi) 4 tepeli tam grafın x ayrıtının çıkarılmasıyla elde edilen graf	13
Şekil 4.2. $K_4 - x$ grafi; 4 tepeli tam grafın x ayrıtının çıkarılması ile elde edilen graf	14
Şekil 4.3. $K_4 - x$ grafıda v_2 ve v_4 tepelerinin yer değiştirmesiyle elde edilen graf	14
Şekil 4.4. $K_4 - x$ grafında v_1 ve v_3 tepelerinin yer değiştirmesiyle elde edilen graf	14
Şekil 4.5. $K_4 - x$ grafında v_1 ve v_3 ile v_2 ve v_4 tepelerinin yer değiştirmesiyle elde edilen graf	14
Şekil 4.6. $K_4 - x$ grafi	17
Şekil 4.7. $K_4 - x$ grafının sol tarafından 180 derece dönmesiyle oluşan graf	17
Şekil 4.8. $K_4 - x$ grafının sol tarafından 360 derece dönmesiyle oluşan graf	17
Şekil 4.9. $K_4 - x$ grafının $y = -x$ doğrusuna göre simetrik olan grafi	18
Şekil 4.10. $K_4 - x$ grafının $y = x$ doğrusuna göre simetrik olan grafi	18

ÇİZELGELER DİZİNİ

	sayfa
Çizelge 3.1.1. Permütasyon grupları üzerinde işlemler	8
Çizelge 3.1.2. p dereceli permütasyon grupları	8

SİMGELER DİZGİNİ

Simgeler

$A \cong B$	:	A ve B kümeleri izomorftur.
α_n	:	Tepelerin permütasyon grupları
Çizge	:	Graf
D_n	:	Dihedral grup
e	:	Etkisiz eleman
E	:	Ayrıt kümesi
	:	G(m, n) grubun mertebesi
G(m, n)	:	Graf
$G_1 G_2$	:	$G_1 o G_2$ (grafların bileşkesi)
K_n	:	n tepeli tam graf
$K_n - X$	:	n tepeli tam graftan X
	:	ayrıtının çıkarılmasıyla elde edilen graf
	:	G(m, n) grafinin ayrıtları
V	:	Tepe kümesi
	:	G(m, n) grafin tepeleri
$\Gamma(K_4 - x)$	:	K_4 ' te X ayrıtının çıkarılmasıyla elde edilen permütasyon grubu
$1 \notin S$	:	Buklesiz graf

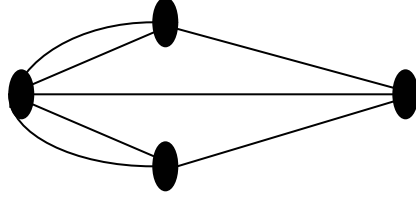
1. GİRİŞ

Son zamanlarda Matematik, Fizik, Kimya bilimleri ile Mühendislik alanında sıklıkla kullanılan graf teorisi 1736 yılında Euler' in Königsberg Köprü problemiyle ortaya çıkmıştır.

Günümüzde hemen hemen tüm bilim dallarında kullanılmaktadır.

Bu problem ‘‘Königsberg’ deki Pregel nehrinin ve karalar arasındaki geçişi sağlayan yedi köprüden her birinden bir kez geçecek şekilde bir yolculuk mümkün müdür?’’ sorusu idi.

Euler (1736) buna graf yöntemini uygulayarak (Şekil 1.1.) böyle bir geçişin mümkün olmadığını ispatlamıştır.



Şekil 1.1. Königsberg köprüsünün graf ile gösterimi

Harary' nin (1972) belirttiğine göre Euler geçişin mümkün olabilmesi için bütün tepelerin derecesinin çift olması gerektiğini ispatlamıştır.

Nesim ve arkadaşlarının (2003) belirttiğine göre Cayley, tepelerinin adlandırılmamış graf ayısını $n \geq 2$ olmak üzere;

$\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ olsun. Adsız nokta sayısı $2^{n(n-1)/2}$ olduğunu ispatlamış ve n -noktalı n^{n-2} tane noktaları adlandırılmamış ağacın var olduğunu göstermiştir.

Lineer graflara ilişkin tüm temel kavram ve teoremleri bir arada Seshu (1961) tarafından derlenip toparlanmıştır.

Graflarla ilgili temel tanım ve teoremleri ilk olarak toplu halde Harary (1972) bir arada vermiştir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Graf ve gruplarla ilgili temel tanım ve toremleri bir arada Jacobsan (1984) derleyip toparlayarak ve kitap halinde sunmuştur.

Abelyan gruplarının Cayley grupların izomorflarına ilişkin çalışmayı Meng ve Xu (1997), Otomorfizmalarının çözülmez bir grup ile 4 değerlikli yarı geçişli graflar Marusic ve Xu (1997) tarafından yaptıkları çalışmayla göstermişlerdir.

Gruplarla ilgili temel tanım ve ifadeleri Çalhıalp (1998) yapmıştır.

Basit gaflar içeren ve bunların otomorfizm gruplarını meydana getiren alt gruplar verilen bir sonlu grubun alt grubuna izomorf olduğunu Sridharan ve Ramachandran (1999) göstermişlerdir.

İzomorfik olmayan gruplar üzerinde izomorfik Cayley grupları ile ilgili çalışmayı Morris (1999), non - Cayley graflarının bir limite ilişkin konjektörünü Diestel ve Leader (2000) tarafından yapıldı.

Hamilton grupları üzerinde Hamilton bağlantılı Cayley gafları üzerinde Alpach ve Quin (2001) tarafından çalışma yapıldı.

Grup ve yarı grupların geçişli Cayley grafları ile ilgili çalışmayı Kelarev ve Preager (2003) yapmışlardır.

Çözülemez otomorfizma grupları ile kübik bir düzgün grafin sonsuz ailesi ile ilgili çalışması Feng ve Kwak (2003) tarafından yapılmıştır.

Nesim ve ark. graflarla ilgili çalışmaları derleyip toparlayarak Matematik Dünyasında çizge özel sayısı (2003) dergisinde yayınlamışlardır.

Kuvvetli giriş grafları giriş iki parçalı graflarına yönelik graf izomorfizmalarının tamlığına yönelik çalışmayı Uehara ve ark. (2005) yapmışlardır. Çevresel grafların Adam izomorfizması ve bunların bazı özelliklerinin incelenmesini Coppersmith ve ark.(baskıda) yapmışlardır.

Biz de bu çalışmamızda; verilen bir buklesiz lineer grafa izomorf olan grafin sayısı ve bu grafa ait grubun mertebesine eşit olduğunu gösterdik.

3. TEMEL TANIMLAR

3.1. Graf ile İlgili Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. (Graf)

$V \neq \emptyset$ ve V, E iki küme, g de E ' nin her elemanını V ' nin kesinlikle (farklı veya aynı) iki elemanına eşleyen bir bağlantı ise (V, E, g) üçlüsü bir graftır denir ve $G=(V, E, g)$ veya kısaca G ile gösterilir. Yani

$$E \xrightarrow{g} V$$
$$e_k \longrightarrow g(e_k)$$

olarak ifade edilir.

Buna basit graf da denilebilmektedir.

Tanım 3.1.2. (Ayrıt ve Tepe)

Bir (V, E, g) grafında E ' nin her bir elemanına ayrıt, V ' nin her bir elemanına tepe denir. Ayrıca “n” ayrıt ve “m” tepe olmak üzere; n ayrıtlı m tepeli graf $G(n,m)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3. (Bukle)

Yalnız bir tepe ile bağlantılı olan ayrıta bukle denir.

Tanım 3.1.4. (Bir Tepenin Derecesi)

Bir tepeye bağlantılı olan ayrıt sayısına bu tepenin derecesi denir.

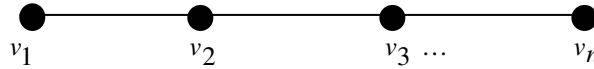
Tanım 3.1.5. (Komşuluk)

Bir G grafında aynı ayrıtın son tepelerine komşu iki tepe komşu tepelerdir denir.

Bir G grafında aynı tepe ile bağlantılı olan ayrıtlara komşu ayrıtlardır denir.

Tanım 3.1.6 (Sıralı Ayrıt)

Bir grafın ayrıtları art arda dizilerek elde edilen alt grafa sıralı ayrıt denir. Bir sıralı ayrıtta bir tepeden önce ayrıt yoksa buna başlangıç tepesi, bir tepeden sonra ayrıt yok ise buna da son tepe denir. Şekil 3.1.' de v_1 ilk tepe; v_n ise son tepedir.



Şekil 3.1.1. n- tepeli sıralı ayrıt.

Tanım 3.1.7. (Ayrıt Katarı)

Bir sıralı ayrıtta her ayrıttın tekrarı bir ise bu sıralı ayrıta ayrıt katarı denir.

Tanım 3.1.8. (Yol)

Bir ayrıt katarının her bir iç tepesinin derecesi 2 ve uç tepelerinin derecesi 1 ise bu ayrıt katarına yol denir.

Tanım 3.1.9. (Çevre)

Bir ayrıt katarındaki her tepelerinin derecesi 2 ise bu ayrıt katarına çevredir denir.

Tanım 3.1.10. (Birleştirilmiş Graf)

Bir grafın her iki tepesi arasında bir yol var ise bu grafa birleştirilmiş graftır denir.

Tanım 3.1.11. (Euler Grafı)

Grafın bir ayrıt katarı, grafın tüm ayrıtlarını kapsıyorsa bu grafa Euler grafıdır denir.

Tanım 3.1.12. (Ağaç)

Birleştirilmiş bir grafın tüm tepelerini içeren fakat hiçbir çevresini kapsamayan birleştirilmiş bir alt grafa ağaç denir. Buna göre;

- i- Ağaç birleştirilmiş bir alt graftır.
- ii- Grafın tüm tepeleri ağacın da tepeleridir.
- iii- Ağacın kendisi ve hiç bir alt grafı çevre içermez.
- iv- Ağaçta yalnızca $v-1$ tane ayrıt vardır.

Tanım 3.1.13. (Hamilton Çevresi)

G bir graf olsun. G ' deki tüm tepeleri içeren çevreye Hamilton Çevresi denir.

Tanım 3.1.14. (Hamilton Grafı)

İçinde en az bir Hamilton çevresi bulunan grafa Hamilton Grafı denir.

Tanım 3.1.15. (Tam Graf)

Her tepe çifti sadece bir ayrıt ile bağlantılı olan graflara tam graf denir.

Tanım 3.1.16. (Yönlü Ayrıt)

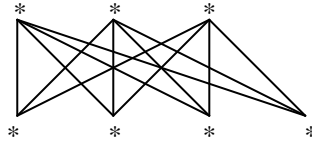
Bir grafın son noktalarının sıralanmasıyla ayrıtta bir yön saptanmış olur. Böyle yönü saptanmış ayrıtlara yönlendirilmiş ayrıt veya yönlü ayrıt denir.

Tanım 3.1.17. (Yönlü Graf)

Yönlendirilmiş ayrıt veya ayrıtlara sahip olan graflara yönlendirilmiş graf denir. Yönlü tam graflara turnayment denir.

Tanım 3.1.18. (Bipartite Graf)

G grafının tepeler kümesi V_1 ve V_2 tepeler kümesine ayrıştırılsın. Burada G 'nin her bir ayrıtın tepelerinden biri V_1 'de diğeri V_2 'de ise G grafına bipartite graf denir ve $G(V_1, V_2)$ ile gösterilir.



Şekil 3.1.2. $G(3, 4)$ Bipartite Grafı

Tanım 3.1.19. (Graflarda Birleşim İşlemi)

G_1 ve G_2 iki graf olsun. G_1 ve G_2 'nin bütün ayrıtlarını içeren G grafına G_1 ve G_2 'nin bileşim grafı denir ve

$G = G_1 \cup G_2$ ile gösterilir.

Burada $G = G_1 \cup G_2$, $V = v_1 \cup v_2$ ve $X = x_1 \cup x_2$ 'ye sahiptir.

Tanım 3.1.20. (Graflarda Kesişim İşlemi)

G_1 ve G_2 iki graf olsun. G_1 ve G_2 'nin ortak ayrıtlarını içeren G grafına G_1 ve G_2 'nin kesişim grafı denir ve

$G = G_1 \cap G_2$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.21. (Toplama İşlemi)

$$G=(G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$$

ifadesine G grafının toplama işlemi denir.

Tanım 3.1.22. (Kartezyen Çarpım)

$G_1 \times G_2$ yi tanımlamak için herhangi iki küme $U=(u_1 \cup u_2)$ ve $V=V_1 \times V_2$ de $V=(v_1 \cup v_2)$ kümelerini alalım $\left\{ \begin{array}{l} u_1=v_1 \text{ ve } u_2 \text{ bitişik } v_2 \\ u_2=v_2 \text{ ve } u_1 \text{ bitişik } v_2 \end{array} \right\}$ veya $\left\{ \begin{array}{l} u_1=v_1 \text{ ve } u_2 \text{ bitişik } v_2 \\ u_2=v_2 \text{ ve } u_1 \text{ bitişik } v_2 \end{array} \right\}$ olduğunda U ve V , $G_1 \times G_2$ de bitişiktirler.

Tanım 3.1.23. (Grafların Bileşimi)

$G=G_1 | G_2$ birleşimi ayrıca kendi tepe kümesi gibi $V=V_1 \times V_2$ ' ye sahiptir ve $\left\{ \begin{array}{l} u_1 \text{ bitişik } u_1 \\ u_1=v_1 \text{ ve } u_2 \text{ bitişik } v_2 \end{array} \right\}$ ya da $\left\{ \begin{array}{l} u_1=v_1 \text{ ve } u_2 \text{ bitişik } v_2 \\ u_2=v_2 \text{ ve } u_1 \text{ bitişik } v_2 \end{array} \right\}$ olduğunda $U=(u_1, u_2)$ ve $V=(v_1, v_2)$ ile bitişiktir. Buradan $G_1 | G_2$ ve $G_2 | G_1$ ile izomorf olduğu açıkça görülmektedir.

“A” $m=[A]$ ' nin permütasyon grubu olsun ve “d” derecesi $X=\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_d\}$ kümesinde hareket etsin. “B” de $n=[B]$ ' nin diğer permütasyon grubu olsun ve “e” derecesi $Y=\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_e\}$ kümesinde hareket etsin. Bu iki permütasyon grubunu burada açıklanan ikili işlemleri (Tanım 3.1.24; Tanım 3.1.25; Tanım 3.1.26.; Tanım 3.1.27) tanımlamak için kullanacağız.

Tanım 3.1.24. (Kartezyen Çarpım Grubu)

A, $B \neq \emptyset$ için AXB , XxY tepeler kümesinde hareket eden bir permütasyon gruptur. Onun permütasyonları $\alpha \in A$ ve $\beta \in B$ gibi $\alpha \times \beta$ permütasyonu ikili olarak yazılır.

$$(\alpha \times \beta)(x,y) = (\alpha x, \beta y) \text{ olarak ifade edilir.}$$

Tanım 3.1.25. (Grupların Toplamı)

$A+B$, (XUY) ayrık kümeleri üzerinde hareket eden bir permütasyon gruptur. XUY ' nin elemanları $\alpha \in A$ ve $\beta \in B$ olup $\alpha + \beta$ şeklinde ikili permütasyon olarak yazılır.

$$z \in XUY \text{ için } (\alpha + \beta)(z) = \begin{cases} \alpha z, & z \in X \\ \beta z, & z \in Y \end{cases}$$

Tanım 3.1.26. (Kuvvet Grubu)

X ' den Y ' ye bütün fonksiyonlar kümesi Y^X üzerinde hareket eden B^A tarafından ifade edilir. Kuvvet grubu normal bir fonksiyondan daha fazla hareket eder. $\alpha \in A$ ve $\beta \in B$ permütasyon çiftleri için tek bir permütasyon vardır. Bu da $\beta^x \in B^A$ olarak yazılır. Kesinlikle belirtelim ki $\beta^x f$ fonksiyonunun altındaki $x \in X$ ' in tüm şeklini veren denklem tarafından takip edilen $f \in Y^X$ her fonksiyonun üzerindeki $\beta^x f$ hareketi $(\beta^x f)(x) = \beta f(\alpha x)$ tir.

Tanım 3.1.27. (Birleşim Grubu)

$A[B]$, XxY üzerinde hareket eder. $\forall \alpha \in A$ ve ardışık "d" nin içinde $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$ B ' de tek bir permütasyon vardır. $(x_i, y_j) \in XxY$ için $(\alpha; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d) \in A[B]$ için sadece bir permütasyon yazılabilir.

$$(x_i, y_j) \in XxY \text{ için } (\alpha; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)(x_i, y_j) = (\alpha x_i, \beta_i y_j)$$

olarak yazılır.

G_1 grafına ait grup A ve G_1 grafına ait tepeler kümesi X ile, G_2 grafına ait grup B ve G_2 grafına ait tepeler kümesi Y ile gösterilsin. Buna göre permütasyon grupları üzerinde işlemler çizelge 3.1.1. 'de verilmiştir.

Çizelge: 3.1.1. Permütasyon grupları üzerinde işlemler.

Tanımlar	Toplam		Kartezyen Çarpım	Birleşim	Kuvvet	
Grup	A	B	A+B	AXB	$A[B]$	B^A
Tepeler kümesi	X	Y	XUY	XxY	XxY	Y^X
Mertebe	m	n	m.n	m.n	$m.n^d$	m.n
Derece	d	e	d+e	d.e	d.e	e^d

.p dereceli iyi bilinen beş permütasyon grubuna ilişkin bilgiler çizelge 3.1.2.’de Harary (1972) tarafından verilmiştir.

Çizelge 3.1.2. p dereceli permütasyon grupları.

	Sembol	Mertebe	Tanım Kümesi
Simetri Grubu	S_p	$p!$	$\{1,2,\dots, p\}$ üzerindeki tüm permütasyonlar için
Alterne Grubu	A_p	$p!/2$	$\{1,2,\dots, p\}$ üzerindeki tüm permütasyonları için
Devirli Grup	C_p	p	$(12\dots p)$ tarafından üretilen permütasyon grupları için
Dihedral Grup	D_p	2.p	$(12\dots p)$ ve $(1p)(2p-1)\dots$ tarafından üretilen permütasyon grupları için
Birim Grupları	E_p	1	$(1)(2)\dots(p)$ tek bir permütasyon için

3.2. Gruplarla İlgili Temel Tanımlar

Tanım 3.2.1. (Grup)

$G \neq \emptyset$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in G$ o işlemi aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise (G, o) ' ye bir gruptur denir.

Aksiyom 1. (Kapalılık): $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in G$ için $\alpha_1 o \alpha_2 \in G$ olmasıdır.

Aksiyom 2.(Birleşme): $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in G$ için $(\alpha_1 o \alpha_2) o \alpha_3 = \alpha_1 o (\alpha_2 o \alpha_3)$ olmasıdır.

Aksiyom 3. (Birim Eleman): $\exists i \in G$ için $i o \alpha = \alpha o i = \alpha$ olmasıdır.

Aksiyom 4. (Ters Eleman): $\alpha o \alpha^{-1} = \alpha^{-1} o \alpha = i$ olmasıdır. ($\alpha^{-1} \in G$)

Tanım 3.2.2. (Abelyan Grup)

$G \neq \emptyset$ bir grup olsun. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in G$ için $\alpha_1 o \alpha_2 = \alpha_2 o \alpha_1$ ise grubuna, Abelyan (Değişmeli) grup denir.

Tanım 3.2.3. (Alt Grup)

G bir grup ve H , G ' nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H , G ' deki işleme göre kendi başına bir grup oluyor ise H ' ye G ' nin bir alt grubudur denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.4. (Grubun Mertebesi)

G sonlu bir küme ise (G, o) grubuna sonlu grup denir ve bu grubun eleman sayısına grubun mertebesi adı verilir.

Tanım 3.2.5. (Permütasyon)

$G \neq \emptyset$ sonlu bir küme ise G ' nin kendi üzerine 1- 1 fonksiyonlarına bir permütasyon denir.

Tanım 3.2.6. (Simetrik Grup)

G , n - elemanlı ise G ' nin permütasyonların kümesi $_s(G) = S_n$ ile gösterilir ve Simetrik Grup (Permütasyon Grubu) diye isimlendirilir.

Tanım 3.2.7. (Homomorfizma)

(G, o) ve $(H, *)$ iki grup ve $f: G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in G$ için $f(aob)=f(a)*f(b)$ ise f 'ye G 'den H 'ye bir homomorfizma denir.

Tanım 3.2.8. (İzomorfizma)

$G, H \neq \emptyset$ iki grup olsun. $f: G \rightarrow H$ bir homomorfizma olsun. f , 1-1 ve örten ise f 'ye izomorfizmadır denir.

Tanım 3.2.9. (Otomorfizma)

Bir G grubunun kendi üzerindeki 1-1 ve örten izomorfizmasına bir otomorfizma denir.

Tanım 3.2.10. (Dihedral Grup)

$x^n = y^2 = e$ ve $xy = yx^{n-1}$ koşullarını sağlayan x ve y ile üretilen gruba dihedral grup denir ve D_n ile gösterilir.

3.3. Graf ve Gruplarla İlgili Temel Tanımlar

Tanım 3.3.1. (İzomorf Graflar)

$G_i = (V_i, E_i, g_i)$ ($i=1, 2$) iki graf olsun. $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ 1-1 ve örten bir fonksiyon a ve b tepeleri G_1 de ancak ve ancak $\varphi(a)$ ile $\varphi(b)$ tepelerinin G_2 ' de komşu olmasıyla komşu olabilirler. O zaman G_1 ' den G_2 ' ye izomorfik eşleme vardır veya G_1, G_2 ' ye izomorftur denir ve

$$G_1 \cong G_2$$

ile gösterilir.

Tanım 3.3.2. (Cayley Grafları)

Bir G grubu ile $1 \notin S$ nin alt kümesi bir Cayley alt kümesidir. S bir G grubunun bir Cayley alt grubu olsun. S ile ilişkisi olan G Cayley yönlü grafi $D(G; S)$ ile gösterilsin. Burada G' nin tepeler kümesi ile yönlendirilmiş bir graf ve G' deki herhangi x, y için $x \rightarrow y$ bir ayrıt olması için gerek ve yeter şart $x^{-1}y \in S$ olmasıdır. Şayet S tersinir ve kapalı ise yani $S^{-1} = S$ ise o zaman $x \rightarrow y$ bir ayrıtın olması için gerek ve yeter şart $y \rightarrow x$ bir ayrıtın olmasıdır. Böylece $D(G, S)$ yönlendirilmiş graf olur. Bu yönlendirilmiş grafa, Cayley Grafi denir.

Tanım 3.3.3. (Lineer Graf)

Ayrıtları tepelerden başka hiçbir yerde kesişmeden düzleme çizilebilen graflara lineer graf denir.

Tanım 3.3.4. (2 - İzomorf Graf)

Çevreleri çevrelere dönüştürecek (karşılık getirecek) şekilde G_1 ve G_2 ayrıtları arasında 1-1 eşleme var ise bu G_1 ve G_2 graflarına 2- izomorf graftır denir.

GARFIN GRUBU

Çeşitli şekillerin simetrik çalışmasında, grup teorisi güçlü bir soyut yaklaşım sağlamaktadır. Bu yaklaşım gruplar ve graflar arasında bazı yaklaşımların keşfedilmesini de sağlamıştır. Permütasyon gruplarında bazı işlemler kullanılacaktır. Bu işlemler gruplarda uygulanan işlemlerle yakından alakalı olduğu için ve de grafiksel hesaplamasının temelini oluşturduğundan dolayı graf teorisinde önemli bir rol oynamaktadır.

Verilen her aksiom sistemi bir otomorfizm grubuna sahiptir. Uygun şartlar altında karışık graf grubu onun öge grafları için de tanımlanabileceği çıkartılabilir. Verilen yapısal formlar graf gruplarının var olduğu sonucuna varılır. Bu bölüm simetrik olup grafların amaç ve graflarına uygun bir graf çalışmasıyla sonuçlanır.

4.1. Grafın Otomorfizm Grubu

$G \neq \emptyset$ grubu verilsin. G kümesi, üzerindeki permütasyonlar için dönüşümlü bileşimleri (ikili işlemleri) sağlar. Üstelik, her zaman bir permütasyon koleksiyonu bu bileşimle yaklaşırsa grubun Aks:2, Aks:3, Aks:4 özellikleri otomatikmen sağlanır. Bunun sonucunda grafların permütasyon grubu olduğu anlaşılmaktadır. Eğer bir permütasyon grupta $A \subset G$ ise;

$|A|$: Grubun mertebesi

$|G|$: Grubun derecesi

G ve Y grupları üzerinde sırasıyla A ve B permütasyonları oluşuyorsa $A \cong B$ izomorf gruplardır. $A \cong B$ sadece izomorf değil bunun yanında permütasyon gruplarıdır. Daha detaylı olarak $A \cong B$, 1-1 bir dönüşüm varsa $\alpha_1, \alpha_2 \in A'$ daki gibi $h:A \mapsto B$ arasındaki permütasyonları $h(\alpha_1 \alpha_2) = h(\alpha_1).h(\alpha_2)$ dir. Yani $A \cong B$ için başka bir 1-1 dönüşüme daha ihtiyacımız olacaktır.

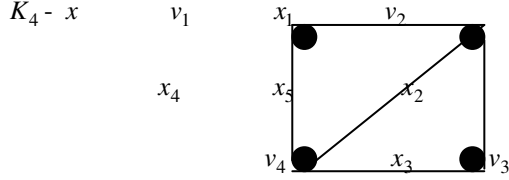
$\alpha \in A$ ve $x \in G$ için $f:G \leftrightarrow Y$ ise $f(\alpha x) = f(\alpha).f(x)$ tir.

Bir G grafının otomorfizması G ile kendisinin bir izomorfizmasıdır. Bu yüzden $\alpha \in G'$ nin her otomorfizması “V” kümesinde bitişiklik sunan bir permütasyonudur. α' nin her tepesini aynı derecedeki bir diğerine gönderir. Bir başka otomorfik grubunu takip eden her otomorfizm bir otomorfizm grubudur. Bu yüzden G' nin otomorfizmleri G' nin üzerinde hareket eden permütasyon grubu $\Gamma(G)$ biçimindedir. Bu yüzden G' nin tepe grubu veya G' nin grubu olarak bilinir. $V \mapsto V$ özdeş dönüşümü daima G nin bir otomorfizmasıdır. Aynı gaf için sadece bir otomorfizmadır. Bunlar özdeş gruplar olarak da tanımlanır.

G' nin tepe grupları, G' nin tepe grubu olarak adlandırılan $\Gamma_1(G)$, diğer permütasyon gruplarının oluşmasını sağlar.

İki grup arasındaki farklılığı gösterebilmek için şekil 4. 1.' de gösterilen v_1, v_2, v_3, v_4 tepeleri ve x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ayrıtlarıyla işaretlenen

$K_4 - x$ şekline bakın.



Şekil 4.1. $K_4 - x$ grafi; 4 tepeli tam grafin x ayrıtının çıkarılması ile elde edilen graf

$\Gamma(K_4 - x)$ dört permütasyondan oluşur.

$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4), (v_1)(v_3)(v_2)(v_4), (v_2)(v_4)(v_1)(v_3), (v_1)(v_3)(v_2)(v_4)$$

$(v_1)(v_3)(v_2)(v_4)$ ile veya x_1, x_4 ile x_2, x_3 ile yer değiştirerek tepe grubu özdeş permütasyon graf grubu permütasyonunun oluşmasına sebep olur. Bu yolla graf grubun $(K_4 - x)$ permütasyonlarını içerdiği görülür. Tepe grubu aşağıdaki ayrıt permütasyonlarının oluşmasını sağlar.

$$(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(x_5), (x_1)(x_4)(x_2)(x_3)(x_5), (x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(x_5), \\ (x_1)(x_3)(x_2)(x_4)(x_5)$$

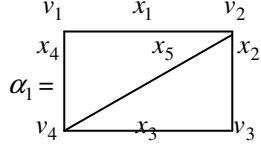
$(K_4 - x)$ 'nin tepe ve ayrıt grupları izomorfiktirler. Fakat $\Gamma_1(K_4 - x)$ beş dereceye ve $\Gamma(K_4 - x)$ dört dereceye sahip oldukları için bunlar özdeş permütasyonlar değildir. Burada izomorf olan tepe gruplarına bağlı olarak ayrıt gruplarının da olduğunu gösterdik. Fakat sadece göstermekle yetineceğiz. Çünkü konumuz itibarıyla sadece tepeler grubu ve graflarıyla uğraşacağız.

$G = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olsun.

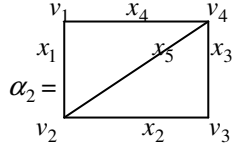
$\Gamma(K_4 - x)$ permütasyonlarını;

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_4 & v_3 & v_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_2 & v_1 & v_4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_4 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

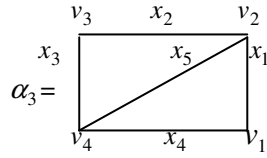
Şeklinde isimlendirip graflarını çizelim.



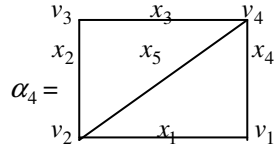
Şekil 4.2. $K_4 - x$ grafi; 4 tepeli tam grafin x ayrıtının çıkarılması ile elde edilen graf.



Şekil 4.3. $K_4 - x$ grafında ; v_2 ve v_4 tepelerinin yer değiştirmesiyle elde edilen graf.



Şekil 4.4. $K_4 - x$ grafi ve v_3 tepelerinin yer değiştirmesiyle elde edilen graf.



Şekil 4.5. $K_4 - x$ grafında v_1 ve v_3 ile v_2 ve v_4 tepelerinin yer değiştirmesiyle elde edilen graf.

Şimdi de

$$G = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \}$$

grafların bir grup olup olmadıklarını gösterelim. Grup olabilmeleri için grup aksiyomlarını sağlamaları gerekir.

Aksiyom 1. (Kapalılık)

$\forall \alpha_i, \alpha_j \in G$ için $\alpha_i \circ \alpha_j \in G$ olduğunu gösterelim.

$\alpha_2, \alpha_3 \in G$ için $\alpha_2 \circ \alpha_3 \in G$ midir?

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_4 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_4 & v_1 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 & v_4 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_4 & v_1 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \alpha_4 \in G' \text{ dir.}$$

benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \alpha_1 \circ \alpha_1 &= \alpha_1, \alpha_1 \circ \alpha_2 = \alpha_2, \alpha_1 \circ \alpha_3 = \alpha_3, \alpha_1 \circ \alpha_4 = \alpha_4 \\ \alpha_2 \circ \alpha_1 &= \alpha_2, \alpha_2 \circ \alpha_2 = \alpha_1, \alpha_2 \circ \alpha_3 = \alpha_4, \alpha_2 \circ \alpha_4 = \alpha_3 \\ \alpha_3 \circ \alpha_1 &= \alpha_3, \alpha_3 \circ \alpha_2 = \alpha_4, \alpha_3 \circ \alpha_3 = \alpha_1, \alpha_3 \circ \alpha_4 = \alpha_2 \\ \alpha_4 \circ \alpha_1 &= \alpha_4, \alpha_4 \circ \alpha_2 = \alpha_3, \alpha_4 \circ \alpha_3 = \alpha_2, \alpha_4 \circ \alpha_4 = \alpha_1 \end{aligned}$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Buradan da görülüyor ki;

i- $\forall \alpha_i, \alpha_j \in G$ için $\alpha_i \circ \alpha_j \in G$

ii- $\forall \alpha_i, \alpha_j \in G$ için $\alpha_i \circ \alpha_j = \alpha_j \circ \alpha_i$ olup değişme özelliğini de sağlamaktadır.

iii- $\forall \alpha_j \in G$ için $\alpha_j^2 = \alpha_1$

Aksiyom 2. (Birleşme):

$\forall \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k \in A$ için $\alpha_i \circ (\alpha_j \circ \alpha_k) = (\alpha_i \circ \alpha_j) \circ \alpha_k$ olmasıdır. Bunun için $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in G$ alalım.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_4 & v_3 & v_2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_2 & v_1 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_4 & v_3 & v_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_2 & v_1 & v_4 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_4 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \alpha_4 \text{ ve } \alpha_4 \in G' \text{ dir. Buradan da;} \end{aligned}$$

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_3 = \alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_3) = \alpha_4$$

olduğu görülmektedir. Buradan;

$$\alpha_i \circ (\alpha_j \circ \alpha_k) = (\alpha_i \circ \alpha_j) \circ \alpha_k \quad (i, j, k=1,2,3,4)$$

olduğu aşıkardır.

Aksiyom 3. (Birim Eleman) :

$\exists i \in G$ için $i \circ \alpha = \alpha \circ i = \alpha$ olmasıdır.

$\alpha_3 \in G$ olsun.

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_2 & v_1 & v_4 \end{pmatrix} \circ i = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_2 & v_1 & v_4 \end{pmatrix} \Rightarrow i = \alpha_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

Aynı şekilde α_i ($i=1, 2, 3, 4$) olduğu aşıkardır.

Aksiom 4. (Ters Eleman):

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = i \text{ olmasıdır. } (\alpha^{-1} \in G)$$

$\alpha_3 \in G$ için $\alpha_3 \circ \alpha_3^{-1} = i$ midir?

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_2 & v_1 & v_4 \end{pmatrix} \circ \alpha_3^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_3 & v_2 & v_1 & v_4 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\alpha_3 \in G$ vardır.

Buna göre $i = \alpha_1$ 'dır. Acaba $\alpha_i \circ \alpha_i^{-1} = \alpha_1$ oluyor mu?

Buradan $\alpha_i = \alpha_2$ alalım. Buna göre $\alpha_2 \circ \alpha_2^{-1} = \alpha_1$ olduğu aşıkardır. O halde

$\alpha_i \circ \alpha_i = \alpha_1$ 'dır. ($i=1, 2, 3, 4$)

Sonuç 4. 1:

G grafinin tepelerinden oluşan permütasyon grubu değişme özelliğini de sağladığından G grafi, abelyan (değişmeli) gruptur.

Lemma 4. 1:

Tüm buklesiz lineer graflar bir abelyan gruptur.

İspat:

Tüm buklesiz lineer graflar yukarıda da gösterildiği gibi grubun tüm özelliklerini sağlar.

Bu özelliklerden de görüldüğü gibi grafin tepeler permütasyonu bir gruptur.

Sonuç 4.2:

G grafinin grup olduğunu soyut cebirden; simetri eksenlerinin kendi aralarında yer değiştirmesi ile elde edilen tepeler permütasyon gruplarıyla ve tepelerin sol taraftan 180 derece döndürülmesi ile oluşan tepeler permütasyon gruplarıyla da gösterilebilir.

İspat:

$G \neq \emptyset$ ve $\circ$, G ' de tanımlı bir işlem olsun.

$G \times G \rightarrow G$

$(g_1, g_2) \mapsto g_1 \circ g_2$

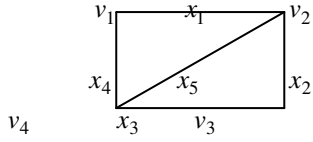
Aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bir gruptur.

i- Kapalılık

ii- Birleşme

iii- Birim eleman

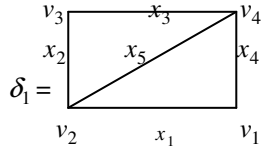
iv- Ters eleman



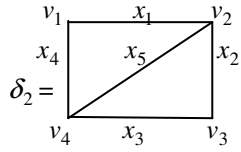
Şekil 4.6. $K_4 - x$ grafi

δ : herhangi bir tepenin sol taraftan 180 derece döndürülmesi ile oluşan tepeler permütasyonu olsun.

τ : Simetri eksenlerinin kendi aralarında yer değiştirmesi ile elde edilen tepeler permütasyonu olsun.



Şekil 4.7. $K_4 - x$ grafiğinin sol tarafından 180 derece dönmesiyle oluşan graf.



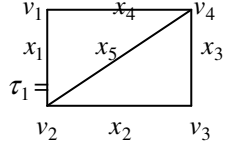
Şekil 4.8. $K_4 - x$ grafiğinin sol tarafından 360 derece dönmesiyle oluşan graf.

$$\delta_1 = (13)(24)$$

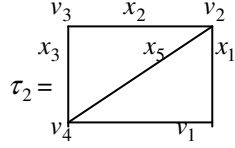
$$\delta_2 = (1)=(2)=(3)=(4)=i$$

$$\delta_2 = \delta_1^2 = i \text{ (i: birim eleman)}$$

Buradan da $\delta_1^2 = \delta_2$ olduğu görülüyor.



Şekil 4.9. $K_4 - x$ grafının doğrusuna göre simetrik olan grafi.



Şekil 4.10. $K_4 - x$ grafının $y = x$ doğrusuna göre simetrik olan grafi.

$$\tau_1 = (24)(1)(3) = (24)$$

$$\tau_2 = (13)(2)(4) = (13)$$

Buradan;

$$G = \delta_1, \delta_1^2 = i, \tau_1, \tau_2 \}$$

Şimdi bu G kümesinin bir grup olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle G kümesini permütasyonlar grubu olarak açık bir şekilde yazalım. Bu yazılımdan sonra tepelerden elde edilmiş olan permütasyon grubunun grup olma özelliklerinin tümünü sağladığını göreceğiz.

Bunun için;

$$\delta_1 = (13)(24)$$

$$\delta_2 = \delta_1^2 = (1)$$

$$\tau_1 = (24)$$

$$\tau_2 = (13)$$

$$\tau_1^2 = (24) \circ (24) = i = (1)$$

$$\tau_2^2 = (13) \circ (13) = i = (1)$$

$$\delta_1 \circ \tau_1 = (13)(24) \circ (24) = (13) = \tau_2$$

$$\tau_1 \circ \delta_1 = (24) \circ (13)(24) = (13) = \tau_2$$

$$\delta_1 \circ \tau_2 = (13)(24) \circ (13) = (24) = \tau_1$$

$$\tau_2 \circ \delta_1 = (13) \circ (13)(24) = (24) = \tau_1$$

$$\tau_1 \circ \tau_2 = (24) \circ (13) = (13)(24) = \delta_1$$

$$\tau_2 \circ \tau_1 = (13) \circ (24) = (13)(24) = \delta_1$$

olduğu görülmektedir. Buna göre;

δ_1 , $\delta_1^2 = i$, τ_1 , $\tau_2 \in G$ için grup olma özelliklerinin tümünü sağlamaktadır. O halde ifademizin doğruluğu görülmektedir.

Sonuç 4. 3:

Burada G grafi D_4 dihedral grubunun bir alt grubudur ve tersi de doğrudur.

Verilen bir buklesiz lineer grafa izomorf olan grafin sayısı, bu grafa ait grubun mertebesine eşit olduğunu göstermiş olduk.

Teorem 4. 1:

n - tepeli m - ayrıtlı bir buklesiz lineer graf $G(n,m)$ ile gösterilsin.

$G(n,m)$ ' nin tepelerinin grubu $|G|$ olsun.

$d \in \mathbb{Z}^+$, $|G|$ nin mertebesi olsun.

Buklesiz lineer $G(m,n)$ grafa izomorf olan G_i grafin sayısı, bu grafa ait grubun mertebesine eşittir. Yani mertebesi d ' ye eşittir.

İspat:

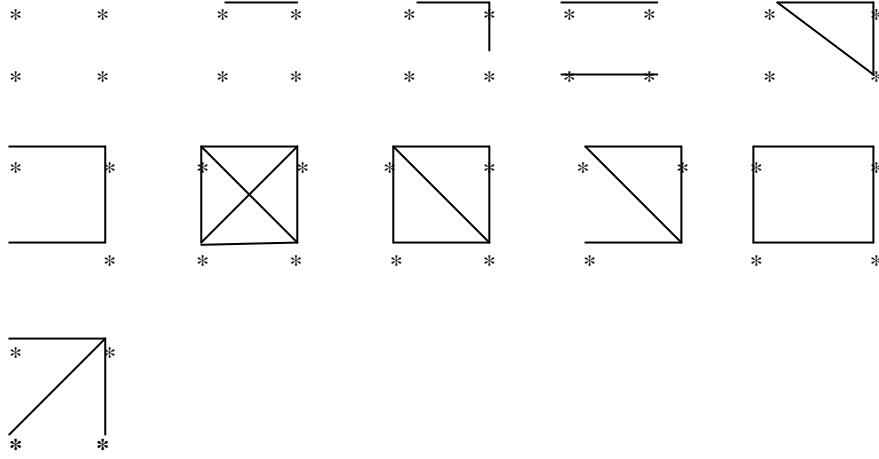
Teoremin ispatı sonuç 4. 1. ve sonuç 4. 2.' den açıkça görülmektedir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Arthur Cayley' in 1850'de ispatlamış olduğu ‘‘adlandırılmamış graf sayısını $n \geq 2$ olmak üzere $\binom{n}{2} = n.(n-1)/2$ olsun. Adsız nokta sayısı $2^{n.(n-1)/2}$ dır.’’ İfadesini bir örnekle açıklayalım.

$n=4$ olsun. Burada $\binom{4}{2} = 6$ olmak üzere adsız nokta sayısı $2^6 = 64$ tür. Bunlar çizilecek olursa sadece 11 tanesi çizilebilir. Geriye kalanların hepsi yani 53 tanesi bu 11 tanesine izomorf olur. Teorem 4. 1. gereğince çizilmeyen bu 53 tane graf çizilen bu 11 tane grafa izomorf olur.

Bu 11 graf:



Sonuç 5. 1:

$G_1 + G_2$ grubuna ait grafa izomorf olan grafların sayısı $m.n$ tanedir.

İspat:

İfadenin doğruluğu Çizelge 3.1.1. ve Teorem 4. 1. den aşıkardır.

Sonuç 5. 2:

$G_1 \times G_2$ grubuna ait grafa izomorf olan grafların sayısı $m.n$ tanedir..

İspat:

İfadenin doğruluğu Çizelge 3.1.1. ve Teorem 4. 1 den aşıkardır.

Sonuç 5. 3:

$G_1 | G_2$ grubuna ait grafa izomorf olan grafların sayısı $m \cdot n^d$ tanedir.

İspat:

İfadenin doğruluğu Çizelge 3.1.1 ve Teorem 4. 1 den aşıkardır.

Sonuç 5. 4:

B^A grubuna ait grafa izomorf olan grafların sayısı $m \cdot n$ tanedir.

İspat:

İfadenin doğruluğu Çizelge 3.1.1. ve Teorem 4. 1. den aşıkardır.

Burada Sonuç 5.1., Sonuç 5.2., ve Sonuç 5.4.' te verilen üç grafin izomorfik olduğunu Harary (1972) Graph Theory adlı kitabında vermiştir. Dolayısıyla aynı sonuçlar buradan da elde edebilir.

Sonuç 5. 5:

S_p Simetrik grubuna izomorf olan grafların sayısı $p!$ tanedir.

İspat:

İfadenin doğruluğu Çizelge 3.1.1., Çizelge 3.1.2. ve Teorem 4.1.' den aşıkardır.

Sonuç 5. 6:

S_p Alterne grubuna ait grafa izomorf olan grafların sayısı $p!/2$ tanedir.

İspat:

İfadenin doğruluğu Çizelge 3.1.1., Çizelge 3.1.2. ve Teorem 4.1.' den aşıkardır.

Sonuç 5. 7:

C_p Devirli grubuna ait grafa izomorf olan grafların sayısı p tanedir.

İspat:

İfadenin doğruluğu Çizelge 3.1.1., Çizelge 3.1.2. ve Teorem 4.1.' den aşıkardır.

Sonuç 5. 8:

D_n Dihedral gruna ait grafa izomorf olan grafların sayısı $2.p$ tanedir.

İspat:

İfadenin doğruluğu Çizelge 3.1.1., Çizelge 3.1.2. ve Teorem 4.1.' den aşıkardır.

Sonuç 5. 9:

E_p Birim grubuna ait grafa izomorf olan grafların sayısı 1 (bir) tanedir.

İspat:

İfadenin doğruluğu Çizelge 3.1.1., Çizelge 3.1.2. ve Teorem 4.1.' den aşıkardır.

KAYNAKLAR

- Alpach, B., Quin, Y., 2001. Hamilton-Connected Cayley Graphs on Hamiltonian groups. **Europ. J. Combinatorics.**, 22: 777-787
- Coppersmith., D., Howgrave-Graham., N., Nguyen., P., Q., Shparlinski., I.,E., 2005. Testing set proportionality and the adam isomorphizm of circulant graphs. **(baskıda) Journal of discerete Algrithms.**
- Ceyhun, Y., 1976. **Çizge Kuramı**. Elektrik Müh. Böl. Müh. Fak., ODTÜ, 54, Ank. 265s.
- Çallıalp., F., 1998. **Soyut Cebir**. 4. Baskı. M Ü, Atatürk Eğitim Fak, 39293, İst. 216s.
- Diestel, R., Leader., I., 2001. A conjecture concerning a limit of non-Cayley graphs. **Journal of Algebrac Combinatorics.**, 14:17-25.
- Euler., L., 1736. Solitio problematis ad geometriam situs partinantis. **Academimae Petropolitianae.**, 8: 128-140
- Feng., Y., Q., Kwak, J., H., 2003. An infinite family of cubic one –regular graphs with unsolvable automorphism groups. **Discerete Mathematics.**, 269: 281-286
- Harary., F., 1972. **Graph Teory** Addison-Wesley., Publising., Moss. 274s.
- Jacobson., N., 1984. **Basic Algebra I** Yale University., W. H., Freeman And Company. 499s.
- Kelarev., A., V., Preagel., C., E., 2003. On transitive Cayley graphs of groups and semigroups. **European Journal of Combinatorics.**, 24: 59-72.
- Malnic., A., Marusic., D., Seifter., N., 1999. Constructing infinite one- regular graphs. **Europ. J. Combinatorics.**, (20): 845-853.
- Marusic., D., Xu., M-Y., 1997. A $\frac{1}{2}$ - transitive grap of valency 4 with a nonsolvable group of automorphisms. **John Wiley & Sons, Inc. Graph Theory.**, (1), 25: 133-138.
- Meng., J., Xu., M., 1997. On the isomorphism problem of Cayley graphs of abelian groups. **Discerete Mathematics.**, 187: 161-169.
- Morris., J., 1999. Isomorphic Cayley graphs on non-isomorphic group. **John Wiley & Sons, Inc. Graph Theory.**, 3: 345-362.
- Nesim., A., Alpay., Ş., Saka., M., 2003. Euler turu, n-noktalı çizge sayısı. **Matematik dünyası**, 2003 güz (3): 9-46.
- Seshu ., S., Reed., M.,B., 1961. **Linear graphs and electrical networks** . Addison-Wesley publishing company. 315s.
- Sridharan., N., Ramachandran., G., 1999. Simple graphs containimg induced subgraphs whose automorphism groups are isomorpic to subgroups of a given finite group. **Discerete Mathematics.**, 206: 205-212.
- Uehara., R., Toda., S., Nagoya., T., 2005. Graph isomorphism completensess for chordal bipartite graphs and stronly chordal graphs. **Discerete Applied Mathematics.** 145: 479-482.

ÖZGEÇMİŞ

05/05/1983 yılında Van'ın Gevaş ilçesine bağlı İskele köyünde doğdu. İlkokulu İskele Köyü İlkokulunda, ortaokulu Güzel Konak Orta Okulunda, orta öğrenimini Van Atatürk Lisesi' nde tamamladı. Yüksek öğrenimini ise Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı. 2002 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. 2002' den bu yana çeşitli özel dershanelerde görev yaptı. Şu anda Van Özel Elit Zirven Dershanesi' nde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Gürşin UVAÇIN