T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA HARDY-COPSON TİPİ DİNAMİK EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS

Hatice TÜNER
Danışman: Prof. Dr. Zeynep KAYAR

VAN – 2025

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA HARDY-COPSON TİPİ DİNAMİK EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS

Hatice TÜNER

Tez Savunma Sınavı Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Ramazan YAZGAN (Başkan)

Prof. Dr. Zeynep KAYAR (Danışman)

Doç. Dr. Sibel DOĞRU AKGÖL (Üye)

VAN – 2025

KABUL VE ONAY

Hatice TÜNER tarafından hazırlanan "ZAMAN SKALASINDA HARDY-COPSON TİPİ DİNAMİK EŞİTSİZLİKLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan : Doç. Dr. Ramazan YAZGAN Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Matematik Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.	
Üye : Prof. Dr. Zeynep KAYAR Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Matematik Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.	
Üye : Doç. Dr. Sibel DOĞRU AKGÖL Çukurova Üniversitesi, Matematik Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.	
Tez Savunma Tarihi:	22/12/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini ve imzaların sahiplerine ait olduğunu onaylıyorum.

……
Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza
Hatice TÜNER

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA HARDY-COPSON TİPİ DİNAMİK EŞİTSİZLİKLER

TÜNER, Hatice
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Zeynep KAYAR
Aralık 2025, 121 sayfa

Zaman skalası kalkülüsü (time scale calculus), ayrık ve sürekli zamanlı olayların modellemesini bütünleşik bir yapı altında ele alır. Bu yaklaşım, sistemlerin sürekli ve ayrık durumlar için ayrı ayrı analiz edilmesi gerekliliğini ortadan kaldırarak teorik bir birlik sağlar. Böylece zaman skalası kalkülüsü, yalnızca mevcut durumu değil, aynı zamanda süreçlerin geçmiş zaman durumlarının anlaşılmasında yeni bir perspektif ortaya koyar.

Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, klasik analizin temel taşlarından olup, bir fonksiyonun integrali ile türevi arasındaki sınırları ve davranışsal kısıtlamaları tanımlamada kritik rol oynar. Özünde, bu eşitsizlikler, bir fonksiyonun yerel davranışının (türev/türev benzeri ifadeler) genel davranışı (integral/integral ortalamaları) üzerindeki etkisini gösterir. Bu özellikleri sayesinde, Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, yeni matematiksel teorilere sürekli ilham kaynağı olmaya devam etmektedir.

Bu çalışmada Hardy-Copson tipi eşitsizlikler tarihsel süreç içerisinde sistematik bir biçimde sunulacak, detaylı bir şekilde incelenecek, aralarındaki farklılıklar ve benzerlikler belirtilecek ve bu konuda bir derleme oluşturulacaktır. İlk olarak kesikli ve sürekli durumlarda elde edilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikler gösterilecek ve daha sonra kesikli ve sürekli durumların genel hali ve birleştirilmesi olan zaman skalasındaki dinamik (nabla ve delta) Hardy-Copson tipi eşitsizlikler verilecektir.

İlk bölümde zaman skalası teorisinin inşasında kullanılan temel tanım ve teoremler tanıtılacaktır. Takip eden bölümde, Hardy–Copson tipi eşitsizlikler üzerine yapılan çalışmaların tarihsel seyri ve kullanılan temel kaynaklar irdelenecektir.

Çalışmanın ana eksenini oluşturan üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde $m \geq 0$ için sırasıyla $p > 1, 0 < p < 1$ ve $p < 0$ koşulları altında geçerli olan nabla ve delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler ortaya konacaktır. Bu eşitsizliklerin elde edilmesinde zaman skalası kalkülüsüne ait kısmi integrasyon formülü temel alınmış olup $p > 1$ ve $0 < p < 1$için Hölder eşitsizliği, $p < 0$ için ise ters Hölder eşitsizliği kullanılacaktır.

Dördüncü ve beşinci bölümlerde, geliştirilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizliklerin salınım teorisine olan katkısı incelenecektir. Bu doğrultuda, yeni eşitsizlikler temel alınarak ikinci mertebeden yarı lineer dinamik denklemlerin salınım kriteri analiz edilerek gerek ve yeter koşulları sağlayan teoremler kanıtlanarak sunulacaktır.

Anahtar kelimeler: Copson Eşitsizlikleri, Hardy Eşitsizlikleri, Zaman Skalası

ABSTRACT

DYNAMIC HARDY-COPSON TYPE INEQUALITIES ON ARBITRARY TIME SCALES

TÜNER, Hatice
M.Sc. Thesis, Department of Mathematcs
Supervisor: Prof. Dr. Zeynep KAYAR
December 2025, 121 pages

Time scale calculus addresses the modeling of discrete and continuous time phenomena under a unified framework. This approach provides theoretical unity by eliminating the need to analyze systems separately for continuous and discrete cases. Thus, time scale calculus offers a new perspective in understanding not only the current state but also the past states of processes.

Hardy-Copson type inequalities are among the cornerstones of classical analysis and play a critical role in defining the bounds and behavioral constraints between the integral and the derivative of a function. In essence, these inequalities demonstrate the effect of a function's local behavior (derivative/derivative-like expressions) on its global behavior (integral/integral means). Owing to these properties, Hardy-Copson type inequalities continue to be a constant source of inspiration for new mathematical theories.

This study will systematically present Hardy-Copson inequalities throughout their historical context, examine them in detail, identify their differences and similarities, and compile a review on the subject. First, Hardy-Copson inequalities obtained in discrete and continuous cases will be presented, followed by dynamic Hardy-Copson inequalities on time scales, which are the general form and combination of discrete and continuous cases.

In the first chapter, the fundamental definitions and theorems used in the construction of time scale theory will be introduced. In the following chapter, the historical background of studies on Hardy–Copson type inequalities and the used essential sources will be examined.

In the third, fourth, and fifth chapters, which constitute the core of the study, the nabla and delta Hardy–Copson type inequalities valid for $m \geq 0$ under the conditions of $p > 1$, $0 < p < 1$ and $p < 0$, respectively, will be presented. In deriving these inequalities, the integration by parts formula on time scales has been utilized, Hölder's inequality will be used for $p > 1$ and $0 < p < 1$, while the reverse Hölder inequality will be used for $p < 0$.

In the fourth and fifth chapters, the contribution of the developed delta Hardy–Copson type inequalities to oscillation theory will be investigated. Accordingly, based on the new inequalities, the oscillation criteria of second-order half-linear dynamic equations will be analyzed, and theorems providing necessary and sufficient conditions will be proved and presented.

Keywords: Copson Inequalities, Hardy Inequalities, Time Scale

TEŞEKKÜR

Bu tezli yüksek lisans çalışmasının yürütülmesi sürecinde, bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, her aşamada destek ve ilgisini esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Zeynep KAYAR'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez jüri üyesi olan Sayın Doç. Dr. Ramazan YAZGAN ile Sayın Doç. Dr. Sibel DOĞRU AKGÖL'e; bilgi ve tecrübeleri, yapıcı eleştirileri ve akademik rehberlikleriyle çalışmama sundukları değerli katkılar için teşekkür ederim.

Tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgi, görüş ve değerlendirmeleriyle katkı sağlayan; jüri üyesi olarak değerli zamanlarını ayırıp yapıcı önerileriyle tezimin bilimsel niteliğini artıran saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Sehabeddin ŞEVGİN, Doç. Dr. Hatice TAŞKESEN, Doç. Dr. Mahmut KARAKUŞ ve Dr. Öğr. Üyesi Onur SALDIR'a teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimim boyunca akademik birikimleri, yol göstericilikleri ve destekleri ve destekleri ile gelişimime katkı sağlayan Matematik Bölümü'nün tüm değerli hocalarına teşekkür ederim. Öğrenme sürecim boyunca sundukları rehberlik, teşvik, bana kazandırdıkları akademik başarı için minnettarım. Özellikle bölümümüz değerli hocalarından Doç. Dr. Nagehan AKGÜN, Prof. Dr. Mehmet Giyas SAKAR, Dr. Öğr. Ü. Mehmet AÇİL hocalarıma ayrıca teşekkür ederim.

Tez çalışmam süresince her zaman yanımda olan; sabrı, sevgisi ve desteğiyle bana güç veren sevgili eşim Selahattin TÜNER'e, annem Hanife KAFA'ya ve oğullarım Taha TÜNER ile Zafer TÜNER'e en derin teşekkürlerimi sunarım. Onların koşulsuz sevgisi ve anlayışı, bu çalışmayı tamamlamamdaki en önemli motivasyon kaynağım olmuştur.

2025

Hatice TÜNER

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT iii
TEŞEKKÜR v
İÇİNDEKİLER vii
ÇİZELGELER LİSTESİ ix
ŞEKİLLER LİSTESİ xi
SİMGELER VE KISALTMALAR xiii
1. GİRİŞ 1
1.1 Zaman Skalası 2
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ 11
3. p>1 İÇİN DİNAMİK HARDY-COPSON EŞİTSİZLİKLERİ 17
3.1 Nabla Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri 17
3.2 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri 40
4. 0<p<1 İÇİN DİNAMİK HARDY-COPSON EŞİTSİZLİKLERİ 49
4.1 Nabla Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri 49
4.2 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri 70
4.3 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizliklerinin Uygulamaları 78
5. p<0 İÇİN DİNAMİK HARDY-COPSON EŞİTSİZLİKLERİ 83
5.1 Nabla Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri 83
5.2 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri 104
5.3 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizliklerinin Uygulamaları 112
6. TARTIŞMA VE SONUÇ 115
KAYNAKLAR 121
ÖZ GEÇMİŞ 125

ÇİZELGELER LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 1.1 Noktaların Sınıflandırılması 3

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 Noktaların Sınıflandırılması 3

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamalarıyla aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\boldsymbol{C_{ld}}$	ld-sürekli fonksiyon
$\boldsymbol{C_{rd}}$	rd-sürekli fonksiyon
$\boldsymbol{C^1_{rd}}$	Birinci mertebeden türevi rd-sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{f^{\Delta}}$	f fonksiyonunun delta türevi
$\boldsymbol{f^{\nabla}}$	f fonksiyonunun nabla türevi
$\mathbf{inf}\ \mathbb{T}$	Bir kümenin alt sınırı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{\mu}$	Çekirdek (graininess, tanecik) fonksiyon
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbf{sup}\mathbb{T}$	Bir kümenin veya fonksiyonun üst sınırı
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
$\mathbb{T}^{\boldsymbol{k}}$	Sol saçılımlı bir m maksimum noktasına sahip $\mathbb{T}$ zaman skalası
$\mathbb{T}_{\boldsymbol{k}}$	Sağ saçılımlı bir m minimum noktasına sahip $\mathbb{T}$ zaman skalası
$\boldsymbol{\sigma}$	İleri sıçrama operatörü
$\boldsymbol{\rho}$	Geri sıçrama operatörü
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler, diğer bilim sahalarının yanı sıra matematiğin hemen hemen tüm branşlarında önemli bir rol oynamaktadır. 19. yüzyılın başından bu yana yapılan çalışmalarla eşitsizliklerin önemi gözler önüne serilmiş, yeni eşitsizliklerin bulunması ve analizin pek çok bölümünde bu eşitsizliklerin uygulamaları adına büyük bir gayret sarf edilmiştir. Matematiksel eşitsizliklerin kullanışlı oluşu başlangıçtan beri bilinmekte ve şu an bu eşitsizlikler yaygınlıkla modern reel analizin gelişmesindeki temel itici güçlerden biri olarak görülmektedir. Eşitsizlikler teorisi sürekli gelişen bir işleyişin içindedir ve eşitsizlikler matematiğin çeşitli dallarına ait pek çok problemin çözümünde etkili ve güçlü birer araç haline gelmektedirler. Bu teori son yıllarda çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiş, yeni araştırma sahalarının açılmasına sebep olmuş ve matematiksel analiz ve uygulamalarının çeşitli yanlarını etkilemiştir.

G. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya'nın hem ayrık hem de sürekli biçimlerdeki çeşitli eşitsizliklere olan ilgileri 1900'lü yılların başında ortaya çıkmıştır. Onların çalışmaları sonucunda, eşitsizlikler konusu radikal bir şekilde değişmiş ve daha önce izole edilmiş formüller topluluğu olan şey, sistematik bir disiplin haline gelmiştir. Hardy ve diğerlerinin yazdığı klasik kitap olan "Inequalities" (Eşitsizlikler) (Hardy vd., 1934), on bölümden oluşmaktadır ve Hardy ve Hilbert tipi eşitsizliklere adanmış iki bölüm içermektedir. Bu kitabın yazılması Hardy tipi eşitsizliklerin literatürdeki büyümesine kalıcı bir ilham kaynağı olmuştur.

Literatürde birden fazla sayıda Hardy eşitsizliği yer aldığından ve bu eşitsizliklerin de çok fazla genelleştirilmesi ve geliştirilmesi olduğundan bu sonuçların hepsinden bahsetmek mümkün olmamaktadır. Bu yüzden bu sonuçların arasından E. T. Copson tarafından yapılan genelleştirilmeler yönündeki çalışmalar ele alınacaktır. Bu sebeple bu eşitsizliklere Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri denilmektedir.

Hardy-Copson tipi eşitsizlikler ve genelleştirmeleri; bir fonksiyonun yerel davranışının (türev/türev benzeri ifadeler) genel davranışı (integral/integral ortalamaları) üzerindeki etkisini gösterdiğinden geniş bir uygulama alanına sahiptir ve bu eşitsizlikler üzerine farklı biçimlerde ve farklı bağlamlarda birçok çalışma yapılmıştır. Hardy-Copson eşitsizlikleri en çok operatör teorisinde (Kufner vd., 2006; 2007; 2017) ve kısmi diferansiyel denklemler teorisinde (Masmoudi, 2011) kullanılmaktadır. Diğer uygulama alanları ise geometri (Balinsky vd., 2015), yarı lineer

denklemlerin pozitif çözümlerinin varlığı için gerekli ve yeterli koşulların bulunması gibi diferansiyel denklemlerin nitel davranış teorisi (Beesack, 1961), salınım teorisi (Brown ve Hinton, 1992), zaman skalasında tanımlı dinamik denklemler (Řehák, 2005; Saker ve Mahmoud, 2019; Saker vd., 2020, Kayar ve Kaymakçalan, 2022b; 2025) ve bu yayınlarda atıf yapılan diğer çalışmalardır. Hardy-Copson eşitsizliklerinin matematiksel modellere uygulamalarından biri de astrofiziktedir. Hardy-Copson eşitsizlikleri, eliptik galaksilerin dinamiğini tanımlayan modellerden elde edilebilir (Skrzypczak, 2013).

1.1 Zaman Skalası

Zaman skalası reel sayıların kapalı alt aralıklarıdır ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. Dolayısıyla zaman skalası üzerinde bir çalışma, sadece kapalı bir sürekli aralık üzerinde değil aynı zamanda ayrık noktalar üzerinde de analizi gerektirir. Zaman skalası teorisi sürekli ve ayrık analizi birleştirmek amacıyla Stefan Hilger tarafından 1988 yılında doktora tezinde (Hilger, 1988) ve (Hilger, 1990) makalesinde ortaya konulmuştur.

Sürekli bir aralıkta tanımlanan diferansiyel denklemlerle ilgili birçok sonuç, oldukça kolay bir şekilde kesikli bir aralıkta tanımlanan fark denklemleri için karşılık gelen sonuçlara aktarılabilirken, bazı sonuçlar sürekli karşılıklarından tamamen farklı bir yapıya sahip görünmektedir. Zaman skalasındaki dinamik denklemlerin incelenmesi, bu tür farklılıkları ortaya koyar ve sonuçları iki kez ispatlama gerekliliğini—bir kez diferansiyel denklemler için, bir kez de fark denklemleri için—önleyerek analiz sürecini birleştirir.

Zaman skalasının iki temel amacı sürekli ve ayrık analizdeki sonuçları birleştirmek ve genelleştirmektir. Zaman skalası teorisi hakkında temel tanım ve teoremler Lakshmikantham vd. (1996), Bohner ve Peterson (2001; 2003) tarafından yazılan kitaplarda bulunabilir. Ayrıca zaman skalası teorisinin gelişiminden sonra bilinen çoğu eşitsizlik zaman skalasına genelleştirilmiştir (Bohner ve Peterson, 2001; Atici ve Guseinov, 2002; Guseinov ve Kaymakçalan, 2002; Bohner ve Peterson, 2003; Gürses vd., 2005; Caputo, 2010).

Aşağıdaki tanım ve teoremler Bohner ve Peterson (2001; 2003) tarafından yazılan kitaplardan alınmaktadır.

Tanım 1.1.1. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere ileri sıçrama operatörü $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ şu şekilde tanımlanır.

$$\sigma := \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}, \qquad \forall t \in \mathbb{T}.$$

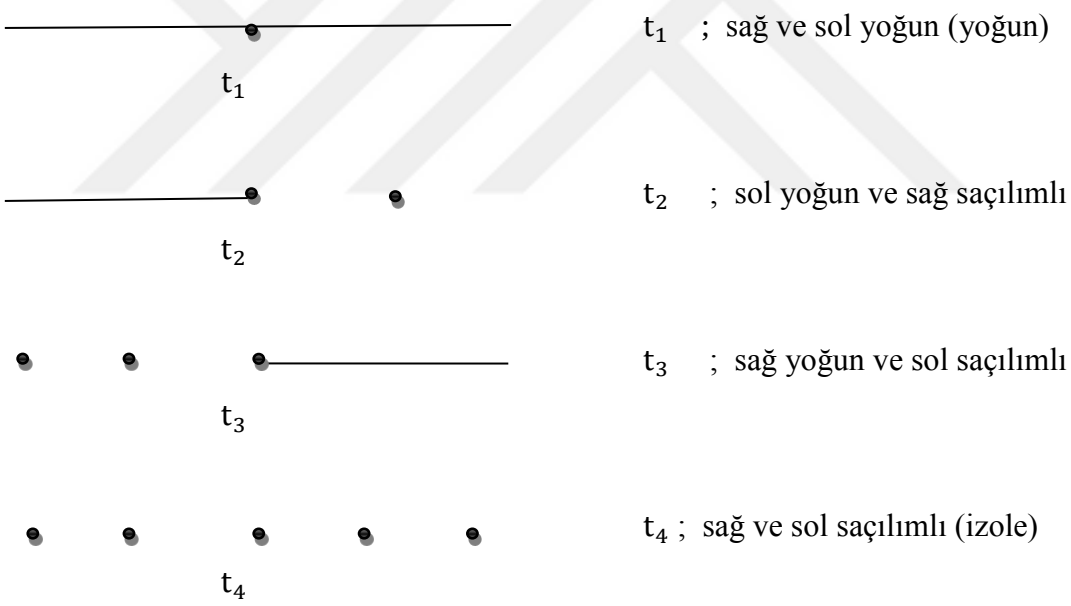
Ayrıca geri sıçrama operatörü $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\rho := \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}, \ \forall t \in \mathbb{T}.$$

Zaman skalasındaki noktalar şu şekilde sınıflandırılabilinir.

Çizelge 1.1 Noktaların Sınıflandırılması

t – sağ saçılımlı	$t < \sigma(t)$
t – sağ yoğun	$t = \sigma(t)$
t – sol saçılımlı	$\rho(t) < t$
t – sol yoğun	$\rho(t) = t$
t – yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$
t – izole	$\rho(t) < t < \sigma(t)$



Şekil 1.1 Noktaların Sınıflandırılması

Tanım 1.1.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere ileri çekirdek (graininess, tanecik) fonksiyonu $\mu : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Ayrıca geri çekirdek (graininess, tanecik) fonksiyonu $\nu: \mathbb{T} \to [0,\infty)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nu(t) = t - \rho(t).$$

Tanım 1.1.3. $\mathbb{T}$ sol saçılımlı bir m maksimum noktasına sahipse o zaman $\mathbb{T}^k$ = $\mathbb{T}$−{m} olarak, aksi halde $\mathbb{T}$ = $\mathbb{T}$ olarak yazılır; yani

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}\backslash(\rho(\sup\mathbb{T}), \sup\mathbb{T}], & \sup\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \sup\mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

dur.

Ayrıca $\mathbb{T}$ sağ saçılımlı bir m minimum noktasına sahipse o zaman $\mathbb{T}_k$= $\mathbb{T}$−{m} olarak, aksi halde $\mathbb{T}_k$ = $\mathbb{T}$ olarak yazılır; yani

$$\mathbb{T}_k = \begin{cases} \mathbb{T}\backslash\,[\inf\mathbb{T}, \sigma(\inf\mathbb{T})), & \inf\,\mathbb{T} > -\infty \\ \mathbb{T}, & \inf\,\mathbb{T} = -\infty \end{cases}$$

dur.

Tanım 1.1.4. (Delta Türev) f: $\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve t ∈ $\mathbb{T}^k$ olmak üzere herhangi bir ε> 0 için t noktasının bir U komşuluğu vardır öyle ki □ s ∈ $\mathbb{T}$ için

$$|\,[f(\sigma(\mathrm{t})) - f(\mathrm{s})] - f^{\Delta}(\mathrm{t})[\sigma(\mathrm{t}) - \mathrm{s}]| \le \varepsilon|\sigma(\mathrm{t}) - \mathrm{s}|$$

sağlanıyorsa $f^{\Delta}(t)$ fonksiyonu, f fonksiyonunun t noktasındaki delta türevini verir ve f^{Δ}: $\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun $\mathbb{T}^k$ üzerindeki delta türevi denir. □ t ∈ $\mathbb{T}^k$ için $f^{\Delta}(t)$ mevcutsa f fonksiyonuna delta (Hilger) türevlenebilir denir.

Teorem 1.1.1. f: $\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve t ∈ $\mathbb{T}^k$ olsun.

(i) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağ saçılımlı nokta ise f fonksiyonu, t noktasında türevlenebilirdir ve bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(\mathrm{t})) - f(\mathrm{t})}{\mu(\mathrm{t})}$$

dir.

(ii) t noktası sağ yoğun nokta ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ancak ve ancak

$$\lim_{s\to t}\frac{f(\mathrm{t}) - f(\mathrm{s})}{\mathrm{t} - \mathrm{s}}$$

limiti mevcuttur. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t}\frac{f(\mathrm{t}) - f(\mathrm{s})}{\mathrm{t} - \mathrm{s}}$$

olur.

(iii) f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise o zaman

$$f(\sigma(\mathrm{t})) = f(\mathrm{t}) + f^{\Delta}(t)\mu(\mathrm{t})$$

olur.

Teorem 1.1.2. $\varphi, \psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında türevlenebilir olsunlar. Bu durumda $\varphi, \psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında türevlenebilirdir ve

$$(\varphi.\psi)^{\Delta}(t) = \varphi^{\Delta}(t)\psi(t) + \varphi\big(\sigma(t)\big)\psi^{\Delta}(t)$$

sağlanır.

Teorem 1.1.3. (Zincir Kuralı) Eğer $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $\psi \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ fonksiyonları $\mathbb{T}^k$ üzerinde delta diferansiyellenebilir ise $\varphi \circ \psi$ bileşke fonksiyonu da delta diferansiyellenebilirdir ve

(i) en az bir $c \in [t, \sigma(t)]$ için $(\varphi \circ \psi)^{\Delta}(t) = \varphi'\big(\psi(c)\big)\psi^{\Delta}(t)$ olur.

(ii) bileşke fonksiyon için

$$(\varphi \circ \psi)^{\Delta}(t) = \psi^{\Delta}(t) \int_0^1 \varphi' \left(\psi(t) + h\mu(t)\psi^{\Delta}(t)\right) dh$$

sağlanır.

Tanım 1.1.5. (Nabla Türev) $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k$ olmak üzere herhangi bir $\varepsilon > 0$ için t noktasının bir U komşuluğu vardır öyle ki her $s \in \mathbb{T}$ için

$$\left| \left[f\big(\rho(t)\big) - f(s)\right] - f^{\nabla}(t)[\rho(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|$$

sağlanıyorsa $f^{\nabla}(t)$ fonksiyonu, f fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevini verir ve $f^{\nabla}: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun $\mathbb{T}_k$ üzerindeki nabla türevi denir. Her $t \in \mathbb{T}_k$ için $f^{\nabla}(t)$ mevcutsa f fonksiyonuna nabla türevlenebilir denir.

Teorem 1.1.4. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k$ olsun.

(i) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sol saçılımlı nokta ise f fonksiyonu, t noktasında nabla türevlenebilirdir ve bu durumda

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)}$$

dir.

(ii) t noktası sol yoğun nokta ise f fonksiyonu t noktasında nabla türevlenebilirdir ancak ve ancak

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti mevcuttur. Bu durumda

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\mathrm{t}) - f(\mathrm{s})}{\mathrm{t} - \mathrm{s}}$$

olur.

(iii) f fonksiyonu t noktasında nabla türevlenebilir ise o zaman

$$f\big(\rho(\mathrm{t})\big) = f(\mathrm{t}) - f^{\nabla}(t)\nu(\mathrm{t})$$

olur.

Teorem 1.1.5. $\varphi, \psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathrm{t} \in \mathbb{T}_k$ noktasında nabla türevlenebilir olsunlar. Bu durumda $\varphi.\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$(\varphi.\psi)^{\nabla}(\mathrm{t}) = \varphi^{\nabla}(\mathrm{t})\psi(\mathrm{t}) + \varphi\big(\rho(\mathrm{t})\big)\psi^{\nabla}(\mathrm{t})$$

sağlanır.

Teorem 1.1.6. (Zincir Kuralı) Eğer $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $\psi \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ fonksiyonları $\mathbb{T}_k$ üzerinde nabla diferansiyellenebilir ise $\varphi \circ \psi$ bileşke fonksiyonu da nabla diferansiyellenebilirdir ve

(i) en az bir $d \in [\rho(\mathrm{t}), t]$ için $(\varphi \circ \psi)^{\nabla}(\mathrm{t}) = \varphi'\big(\psi(d)\big)\psi^{\nabla}(\mathrm{t})$ olur.

(ii) bileşke fonksiyon için

$$(\varphi \circ \psi)^{\nabla}(\mathrm{t}) = \psi^{\nabla}(\mathrm{t}) \int_0^1 \varphi'\Big(\psi\big(\rho(\mathrm{t})\big) + h\nu(t)\psi^{\nabla}(\mathrm{t})\Big)\, dh$$

sağlanır (Güvenilir vd., 2015).

Tanım 1.1.6. Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm sağ yoğun noktalarda sürekli ve bu fonksiyonun tüm sol yoğun noktalarda sonlu sol limiti varsa f fonksiyonuna rd-sürekli fonksiyon denir. Bu fonksiyonların kümesi C_{rd}= $C_{rd}(\mathbb{T})$ = $C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ve birinci mertebeden türevi rd-sürekli ise bu fonksiyonların kümesi C^1_{rd}= $C^1_{rd}(\mathbb{T})$ = $C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ile ifade edilir.

Tanım 1.1.7. (Delta İntegral) Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}^k$ için $F^{\Delta}(\mathrm{t}) = f(t)$ oluyorsa F fonksiyonuna f fonksiyonunun anti türevi denir. c keyfi bir sabit ise

$$\int f(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} = F(\mathrm{t}) + c$$

biçiminde tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun belirsiz integrali denir.

$\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{T}$ olmak üzere nabla Cauchy integral ise

$$\int_a^b f(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} = F(\mathrm{b}) - F(a)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 1.1.7. $\varphi, \psi \in C_{rd}$ ve $a, b, c, \sigma(\mathrm{t}) \in \mathbb{T}$ ve $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\int_a^b (\varphi(\mathrm{t}) + \psi(t))\Delta\mathrm{t} = \int_a^b \varphi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} + \int_b^b \psi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t}$

(i i) $\int_a^b d\varphi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} = d\int_a^b \varphi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t}$

(i i) $\int_a^b \varphi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} = -\int_b^a \varphi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t}$

(i v) $\int_a^b \varphi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} = \int_a^c \varphi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} + \int_c^b \varphi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t}$

(v) $$\int_a^b \varphi\big(\sigma(\mathrm{t})\big)\psi^{\Delta}(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} = (\varphi\psi)|_a^b - \int_a^b \varphi^{\Delta}(\mathrm{t})\psi(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} \qquad (1.1)$$

kısmi integrasyon formülü sağlanır.

Tanım 1.1.8. Bir $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm sol yoğun noktalarda sürekli ve bu fonksiyonun tüm sağ yoğun noktalarda sonlu sağ limiti varsa f fonksiyonuna ld-sürekli fonksiyon denir. Bu fonksiyonların kümesi $C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ile gösterilir. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ve birinci mertebeden türevi ld-sürekli ise bu fonksiyonların kümesi $C_{ld}^1 = C_{ld}^1(\mathbb{T}) = C_{ld}^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ile ifade edilir.

Tanım 1.1.9. (Nabla İntegral) Bir $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t $\in \mathbb{T}_k$ için $F^{\nabla}(\mathrm{t}) = f(t)$ oluyorsa F fonksiyonuna f fonksiyonunun nabla anti türevi denir. c keyfi bir sabit ise

$$\int f(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t} = F(\mathrm{t}) + c$$

biçiminde tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun nabla belirsiz integrali denir.

$\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{T}$ olmak üzere nabla Cauchy integral ise

$$\int_a^b f(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t} = F(\mathrm{b}) - F(a)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 1.1.8. $\varphi, \psi \in C_{ld}$ve $a, b, c, \rho(\mathrm{t}) \in \mathbb{T}$ ve $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

(i) $$\int_a^b (\varphi(\mathrm{t}) + \psi(t))\nabla\mathrm{t} = \int_a^b \varphi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t} + \int_a^b \psi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t}$$

(ii) $$\int_a^b d\ \varphi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t} = d\int_a^b \varphi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t}$$

(iii) $$\int_a^b \varphi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t} = -\int_b^a \varphi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t}$$

(iv) $$\int_a^b \varphi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t} = \int_a^c \varphi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t} + \int_c^b \varphi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t}$$

(v) $$\int_a^b \varphi\big(\rho(\mathrm{t})\big)\psi^{\nabla}(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t} = (\varphi\psi)|_a^b - \int_a^b \varphi^{\nabla}(\mathrm{t})\psi(\mathrm{t})\nabla\mathrm{t} \qquad (1.2)$$

kısmi integrasyon formülü sağlanır.

Teorem 1.1.9. (Hölder eşitsizliği) $a, b \in \mathbb{T}$ ve $p, q > 1$ sayıları

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

eşitliğini sağlasın. Bu durumda

(i) $\varphi, \psi \in C_{rd}([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonları için delta Hölder eşitsizliği

$$\int_a^b |\varphi(t)|\,|\psi(t)|\Delta\mathrm{t} \le \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p \Delta\mathrm{t}\right)^{1/p} \left(\int_a^b |\psi(t)|^q \Delta\mathrm{t}\right)^{1/q} \qquad (1.3)$$

sağlanır.

(ii) $\varphi, \psi \in C_{ld}([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonları için nabla Hölder eşitsizliği

$$\int_a^b |\varphi(t)|\,|\psi(t)|\nabla\mathrm{t} \le \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p \nabla\mathrm{t}\right)^{1/p} \left(\int_a^b |\psi(t)|^q \nabla\mathrm{t}\right)^{1/q} \qquad (1.4)$$

sağlanır (Özkan vd., 2008).

Teorem 1.1.10. (Ters Hölder eşitsizliği) $a, b \in \mathbb{T}$ ve $p, q \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda

(i) $\varphi,\psi \in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ fonksiyonları ve $p<0$ veya $q<0$ sayısı için ters delta Hölder eşitsizliği

$$\int_a^b |\varphi(t)|\,|\psi(t)|\Delta t \geq \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p \Delta t\right)^{1/p} \left(\int_a^b |\psi(t)|^q \Delta t\right)^{1/q} \tag{1.5}$$

sağlanır.

(ii) $\varphi,\psi \in C_{ld}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ fonksiyonları ve $p<0$ veya $q<0$ sayısı için ters nabla Hölder eşitsizliği

$$\int_a^b |\varphi(t)|\,|\psi(t)|\nabla t \geq \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p \nabla t\right)^{1/p} \left(\int_a^b |\psi(t)|^q \nabla t\right)^{1/q} \tag{1.6}$$

sağlanır (Özkan vd., 2008).

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bu çalışmada Hardy'nin 1920 yılında (Hardy, 1920)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}b(j)\right)^{p}\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}\sum_{m=1}^{\infty}b^{p}(m),\qquad b(m)\geq 0, p>1 \tag{2.1}$$

şeklinde elde ettiği ayrık (kesikli) (toplam) eşitsizliğinin ve Hardy'nin 1925 yılında (Hardy, 1925) negatif olmayan f fonksiyonu için (2.1) eşitsizliğinin sürekli (integral) hali olarak elde ettiği

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{t}\left(\int_{0}^{t}f(s)ds\right)^{p}dt\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}\int_{0}^{\infty}f^{p}(t)dt,\qquad p>1 \tag{2.2}$$

eşitsizliğinin ayrık, sürekli ve dinamik genelleştirilmeleri gösterilecektir. Hardy, (2.1) eşitsizliğini

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\leq\pi\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)^{1/2}$$

şeklindeki iyi bilinen Hilbert eşitsizliğini incelerken ve bu eşitsizlik için daha kolay bir ispat yöntemi ararken elde etmiştir (Kufner vd., 2007). Burada

$$a_m, b_n\geq 0,\qquad \sum_{m=1}^{\infty}a_m^2<\infty,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n^2<\infty$$

dur.

Kufner vd., (2007; 2017) kitaplarında (2.2) eşitsizliğinin Hardy (1920) tarafından yazılan makalede ispatsız verildiğini belirtir. Yine aynı kitaplarda yazdığına göre Hardy (1925) yayınladığı makalesinde şöyle ifade etmiştir: "(2.2) eşitsizliği için Hardy (1920) makalesinde bir kanıt vermedim, çünkü esas olarak sonsuz seriler ile ilgili olan teoremle meşguldüm." Hardy'nin temel amacı, yukarıda belirtilen Hilbert eşitsizliğinin yeni ve daha temel bir kanıtını bulmak olup Hardy (1925) yazdığı makalesinde aslında Hilbert eşitsizliğinin, (2.2) eşitsizliğinin ayrık versiyonu olan (2.1) eşitsizliğinden türediğini göstermiştir.

(2.1)-(2.2) eşitsizliklerindeki $\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}$ sabitleri olabilecek en iyi sabitlerdir, yani bu sabitler daha küçük sayılarla değiştirilirse (2.1)-(2.2) eşitsizlikleri sağlanmaz.

Aslında Hardy, (2.1) eşitsizliğindeki sabiti ilk olarak $\left(\frac{p^2}{p-1}\right)^p$ şeklinde bulmuştu. Kufner vd. (2007; 2017) tarafından yazılan kitaplarda belirtildiğine göre Hardy (1925) makalesinde şöyle açıklamıştır: "21 Haziran 1921 tarihli bir mektupta, Prof. E. Landau bana teoremin yani, (2.1) eşitsizliğinin doğru değeri olan $\left(\frac{p}{p-1}\right)$ sabitini veren bir kanıtı iletti." Bu kanıt Landau (1926) makalesinde gösterilmiştir. Hardy eşitsizliğinin tarihçesi ve bu eşitsizliğe katkısı olan matematikçilerden E. Landau, G. Polya, I. Schur ve M. Riesz'ın yaptığı katkılar, Kufner vd. (2007; 2017) tarafından yazılan kitaplarda ya da Kufner vd. (2006) tarafından yazılan makalede bulunabilir.

Ayrıca negatif olmayan f fonksiyonu ile tanımlanan

$$G(t) = \begin{cases} \int_0^t g(\alpha)d\alpha, & eğer\ r > 1 \\ \int_t^\infty g(\alpha)d\alpha, & eğer\ r < 1 \end{cases}$$

fonksiyonu göz önüne alınarak (2.2) eşitsizliğinin genel hali olan

$$\int_0^\infty \frac{G^p(t)}{t^r}dt \le \left|\frac{p}{r-1}\right|^p \int_0^\infty \frac{g^p(t)}{t^{r-p}}dt, \qquad p > 1 \tag{2.3}$$

eşitsizliği Hardy vd. (1934) tarafından elde edilmiştir.

Literatürde (2.1) ve (2.3) eşitsizliklerinin çok fazla genelleştirilmesi ve geliştirilmesi olduğundan bu sonuçların hepsinden bahsetmek mümkün olmamaktadır. Bu yüzden bu sonuçların arasından Copson tarafından yapılan genelleştirilmeler yönündeki çalışmalar ele alınacaktır. Bu sebeple bu eşitsizliklere Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri denilmektedir. Bu çalışmalar (Masmoudi, 2011; Balinsky vd., 2015; Kufner vd., 2007; 2017) kitaplarında ve (Copson, 1928; Beesack,1961; Copson, 1976; Bennett, 1987; Leindler, 1993; Pachpatte, 1999; Pečarić ve Hanjš, 1999; Kufner vd., 2006; Iddrisu vd., 2014; Chu vd., 2014; Nikolidakis, 2014; Liao, 2015; Gao ve Zhao, 2020; Lefèvre, 2020) makalelerinde bulunabilir.

Copson (1928) negatif olmayan b ve w dizileri ile tanımladığı

$$A(\kappa) = \sum_{i=\kappa}^{\infty} w(i)\ , \qquad \overline{A}(\kappa) = \sum_{i=1}^{\kappa} w(i)$$

$$B(\kappa)=\sum_{i=1}^{\kappa} b(i)w(i), \quad \overline{B}(\kappa)=\sum_{i=k}^{\infty} b(i)w(i) \tag{2.4}$$

serilerini kullanarak Hardy (1920) tarafından elde edilen (2.1) eşitsizliğini aşağıdaki iki eşitsizlikle geliştirmiştir.

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{w(\kappa)}{\left[\overline{A}(\kappa)\right]^{r}}[B(\kappa)]^{p}\le\left(\frac{p}{r-1}\right)^{p}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{w(\kappa)b^{p}(\kappa)}{\left[\overline{A}(\kappa)\right]^{r-p}}, \qquad p>1,\ r>1 \tag{2.5}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{w(\kappa)}{\left[\overline{A}(\kappa)\right]^{r}}\left[\overline{B}(\kappa)\right]^{p}\le\left(\frac{p}{1-r}\right)^{p}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{w(\kappa)b^{p}(\kappa)}{\left[\overline{A}(\kappa)\right]^{r-p}}, \qquad p>1,\ 0<r<1. \tag{2.6}$$

Ayrık Hardy-Copson eşitsizliklerinin diğer iyileştirmeleri tüm $m\in\mathbb{N}$ için $b(m)\ge 0, w(m)\ge 0$ olduğunda ve

$$\sum_{j=1}^{\infty} w(j)<\infty$$

için Bennet (1987) ve Leindler (1993) tarafından yapılmıştır. (2.4) eşitliklerinde tanımlanan seriler için eğer $p>1,\ 0<r<1$ ise

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{w(\kappa)}{[A(\kappa)]^{r}}[B(\kappa)]^{p}\le\left(\frac{p}{1-r}\right)^{p}\sum_{\kappa=1}^{\infty}w(\kappa)b^{p}(\kappa)\,A^{p-r}(\kappa) \tag{2.7}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{w(\kappa)}{\left[\overline{A}(\kappa)\right]^{r}}\left[\overline{B}(\kappa)\right]^{p}\le\left(\frac{p}{1-r}\right)^{p}\sum_{\kappa=1}^{\infty}w(\kappa)b^{p}(\kappa)\,\overline{A}^{p-r}(\kappa) \tag{2.8}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eğer $1<r\le p$ ise de

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w(\kappa)}{[A(\kappa)]^{r}}\left[\overline{B}(\kappa)\right]^{p}\le\left(\frac{p}{r-1}\right)^{p}\sum_{\kappa=1}^{\infty}w(\kappa)b^{p}(\kappa)\,A^{p-r}(\kappa) \tag{2.9}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{w(\kappa)}{\left[\overline{A}(\kappa)\right]^{r}}[B(\kappa)]^{p}\le\left(\frac{p}{r-1}\right)^{p}\sum_{\kappa=1}^{\infty}w(\kappa)b^{p}(\kappa)\,\overline{A}^{p-r}(\kappa) \tag{2.10}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Copson (1976) negatif olmayan f ve w fonksiyonları ile tanımladığı

$$\overline{A}(t)=\int_{0}^{t} w(\alpha)d\alpha,\ B(t)=\int_{0}^{t} w(\alpha)f(\alpha)d\alpha,\ \overline{B}(t)=\int_{t}^{\infty} w(\alpha)f(\alpha)d\alpha \tag{2.11}$$

fonksiyonlarını kullanarak Hardy vd. (1934) tarafından elde edilen (2.3) eşitsizliğini $p\ge 1$ için aşağıdaki iki eşitsizlikle geliştirmiştir. Eğer $r>1,\ 0<b\le\infty$ ise

$$\int_0^b \frac{w(\alpha)}{\left[\overline{A}(\alpha)\right]^r}[B(\alpha)]^p \, d\alpha \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^b w(\alpha) f^p(\alpha) \overline{A}(\alpha)^{p-r} d\alpha \tag{2.12}$$

ve eğer $r < 1,\ a > 0$ ise

$$\int_a^\infty \frac{w(\alpha)}{\left[\overline{A}(\alpha)\right]^r}\left[\overline{B}(\alpha)\right]^p \, dt \leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_a^\infty w(\alpha) f^p(\alpha) \overline{A}(\alpha)^{p-r} d\alpha. \tag{2.13}$$

Ayrıca (2.12) eşitsizliği ayrık (2.5) (Copson, 1928) ve ayrık (2.10) (Bennet, 1987; Leindler, 1993) eşitsizliklerinin ve (2.13) eşitsizliği ayrık (2.6) (Copson, 1928) ve ayrık (2.8) (Bennet, 1987; Leindler, 1993) eşitsizliklerinin sürekli durumdaki karşılıklarıdır.

Pachpatte (1999) daha farklı fonksiyonlar kullanarak Copson'ın elde ettiği $(2.12) - (2.13)$ eşitsizliklerinin genelleştirmelerini elde etmiştir.

Pečarić ve Hanjš (1999), (2.11) de tanımlanan fonksiyonları kullanarak sürekli bir kümede elde edilen en genel Hardy-Copson eşitsizliklerini $p > 1$ ve $m \geq 0$ için göstermiştir. Eğer $m + r > 1$ ise

$$\int_0^\infty \frac{w(\alpha)}{\left[\overline{A}(\alpha)\right]^{m+r}}[B(\alpha)]^{m+p} \, d\alpha \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^p \int_0^\infty \frac{w(\alpha) f^p(\alpha)[B(\alpha)]^m}{\overline{A}(\alpha)^{m+r-p}} d\alpha \tag{2.14}$$

ve eğer $m + r < 1$ ise

$$\int_0^\infty \frac{w(\alpha)}{\left[\overline{A}(\alpha)\right]^{m+r}}\left[\overline{B}(\alpha)\right]^{m+p} \, d\alpha \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^p \int_0^\infty \frac{w(\alpha) f^p(\alpha)\left[\overline{B}(\alpha)\right]^m}{\overline{A}(\alpha)^{m+r-p}} dt. \tag{2.15}$$

Zaman skalası kavramının gelişiminin (Bohner ve Peterson, 2001; 2003; Guseinov ve Kaymakçalan, 2002; Atici ve Guseinov, 2002; Gürses vd., 2005) ardından dinamik eşitsizliklerin analizi popüler bir araştırma alanı haline gelmiş ve çoğu klasik eşitsizliğin keyfi bir zaman skalasına genelleştirilmeleri ve birleştirilmeleri yapılmıştır. Delta yaklaşımına yönelik bu birleştirilmiş dinamik eşitsizlikleri görmek için (Agarwal vd., 2001; Saker, 2012) makalelerinden ve (Agarwal vd., 2014) kitabından yararlanılabilir. Her ne kadar nabla dinamik eşitsizlikleri delta türündekilere kıyasla daha az ilgi görse de, bazı nabla dinamik eşitsizliklerine (Anderson, 2005; Özkan vd., 2008; Güvenilir vd., 2015; Bohner vd., 2015; Pelen, 2019; Kayar vd., 2021; Kayar ve Kaymakçalan, 2022a) kaynaklarında rastlanabilir.

Hardy-Copson tipi eşitsizliklere yönelik artan ilgi, zaman skalası kalkülüsünde de kendine yer bulmaktadır ve bu eşitsizliklerin delta birleştirmeleri (Agarwal vd., 2016) kitabında ve (Řehák, 2005; Saker vd., 2014a; 2014b; 2017; Agarwal vd., 2017; Saker vd., 2018a; 2018b; Saker ve Mahmoud, 2019) makalelerinde ortaya konmuşken, bunların nabla karşılıkları ve genelleştirilmeleri (Kayar ve Kaymakçalan, 2021; 2022b; 2025) kaynaklarında görülebilir.

Bu dinamik eşitsizlikler, yalnızca integral ve ayrık eşitsizlikleri kapsamakla kalmaz, aynı zamanda farklı türdeki zaman skalalarına da genişletilebilir.

Ayrık (2.1) ve sürekli (2.3) Hardy eşitsizliğinin delta zaman skalasında ilk birleştirilmesi Řehák (2005) tarafından yapılmıştır. $t\in(a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$F(t)=\int_a^t f(\alpha)\Delta\alpha$$

fonksiyonu tanımlansın. $p>1$ ise

$$\int_a^{\infty}\left(\frac{F^{\sigma}(t)}{\sigma(t)-a}\right)^p\Delta t<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_a^{\infty}f^p(t)\Delta t$$

eşitsizliği sağlanır.

Daha sonra bu eşitsizlik yukarıdaki çalışmalarda delta ve nabla zaman skalasında genelleştirilmiştir.

3. $p > 1$ İÇİN DİNAMİK HARDY-COPSON EŞİTSİZLİKLERİ

İkinci bölümde görüldüğü üzere, zaman skalası teorisi geliştirilmeden önce Hardy-Copson eşitsizlikleri sürekli ve ayrık durumlar için ayrı ayrı elde edilmiştir. Bu bölümde bu paralel sonuçların hem sürekli fonksiyonlar hem de ayrık kümelerde tanımlı fonksiyonlar için iki kez ispatlanmasını önlemek amacıyla, söz konusu eşitsizliklerin zaman skalası birleştirilmesi nabla ve delta türevleri ve integralleri kullanılarak ortaya konacaktır.

3.1 Nabla Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri

Bu bölümün temel amacı, negatif olmayan, ld-sürekli, ∇-diferansiyellenebilir ve lokal olarak nabla integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için ikinci bölümde verilen ayrık ve sürekli Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin nabla zaman skalasındaki birleşimini vermektir. Bunun için (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki sonuçlar gösterilecektir.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ olsun. $[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında negatif olmayan, ld-sürekli, ∇ −diferansiyellenebilir ve yerel olarak nabla integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için

$$A(t) = \int_t^{\infty} w(\alpha)\nabla\alpha\,, \qquad \overline{A}(t) = \int_a^t w(\alpha)\nabla\alpha,$$

$$B(t) = \int_a^t w(\alpha)f(\alpha)\nabla\alpha, \quad \overline{B}(t) = \int_t^{\infty} w(\alpha)f(\alpha)\nabla\alpha, \tag{3.1}$$

fonksiyonları tanımlansın.

Aşağıdaki teorem, yukarıda tanımlanan $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları kullanılarak ayrık eşitsizlikler (2.5) ve (2.10) ile sürekli eşitsizlikler (2.3), (2.12) ve (2.14)'ün nabla birleşimini ifade eder. Dahası bu teorem ayrık ve sürekli zaman skalaları için yeni sonuçlar sağlar.

Teorem 3.1.1. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}(t)$ fonksiyonu ve $t \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{\overline{A}(t)}{\overline{A}^{\rho}(t)} \leq L$$

olacak şekilde $L > 0$ olsun. Ayrıca $B(\infty) < \infty$ ve

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} < \infty$$

olduğunu kabul edelim. Eğer $m \geq 0$, $p > 1$ ve $m + r > 1$ reel sabitler için

(i)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \frac{m+p}{m+r-1} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-1}} \nabla t \tag{3.2}$$

(ii)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m \left[\overline{A}(t)\right]^{(m+r)(p-1)}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{(m+r-1)p}} \nabla t \tag{3.3}$$

(iii)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p} \nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^p L^{(m+r)(p-1)} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t \tag{3.4}$$

(iv)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left(L^{m+r-1} \frac{m+p}{m+r-1}\right)^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t \tag{3.5}$$

(v)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \frac{m+p}{m+r-1} L^{m+r} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-1}} \nabla t \tag{3.6}$$

(vi)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^p L^{(m+r)p} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{3.7}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2021)

İspat.

(i) Eşitsizlik (3.2)'nin sol tarafına Teorem 1.1.8'de nabla integral için verilen (1.2) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\nabla}(t) = \frac{w(t)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \quad ve \quad v(t) = [B(t)]^{m+p}$$

fonksiyonları için uygulandıktan sonra

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} = u(t)B(t)^{m+p}|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} -u^{\rho}(t)[B^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıda u^{∇}'nin nasıl verildiği göz önüne alındığında

$$u(t) = -\int_t^{\infty} \frac{w(s)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\nabla s$$

olduğu bulunur. Ayrıca $B(a) = 0$ ve $u(\infty) = 0$'ı alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u^{\rho}(t)[B^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t. \tag{3.8}$$

$B^{\nabla}(t) = f(t)w(t) \geq 0$ eşitsizliği kullanılarak $[B^{m+p}(t)]^{\nabla}$' ye Teorem 1.1.6 (a)'da nabla türev için verilen Zincir Kuralı uygulanırsa

$$[B^{m+p}(t)]^{\nabla} = (m+p)B^{m+p-1}(d)B^{\nabla}(t) = (m+p)w(t)f(t)B^{m+p-1}(d)$$

elde edilir.

$m + p > 1$ ve $t \geq d$ için $[B(t)]^{m+p-1} \geq [B(d)]^{m+p-1}$ olduğu görülür ve aşağıdaki sonuç bulunur.

$$[B^{m+p}(t)]^{\nabla} \leq (m+p)w(t)f(t)B^{m+p-1}(t). \tag{3.9}$$

$\overline{A}^{\nabla}(t) = w(t) \geq 0$ ve $m + r > 1$ olduğundan, Teorem 1.1.6 (b)'de nabla türev için verilen Zincir Kuralı'na göre

$$\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\nabla}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-m-r)\overline{A}^{\nabla}(t)dh}{\left[h\overline{A}(t)+(1-h)\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}$$

$$= \int_0^1 \frac{-(m+r-1)w(t)dh}{\left[h\overline{A}(t)+(1-h)\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}$$

$$\leq -(m+r-1)\int_0^1 \frac{w(t)}{\left[h\overline{A}(t)+(1-h)\overline{A}(t)\right]^{m+r}}dh$$

$$= -(m+r-1)\frac{w(t)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi

$$\frac{w(t)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq -\frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\nabla}}{m+r-1}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

$$-u^{\rho}(t) = \int_{\rho(t)}^{\infty} \frac{w(s)\nabla s}{\left[\overline{A}(s)\right]^{m+r}} \leq \int_{\rho(t)}^{\infty} \frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(s)\right]^{\nabla}\nabla s}{m+r-1} = \frac{-\overline{A}^{1-m-r}(\infty)+\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{1-m-r}}{m+r-1}$$

$$\leq \frac{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{1-m-r}}{m+r-1}. \qquad (3.10)$$

(3.9) ve (3.10)'un (3.8)'e uygulanması ile istenilen sonuç elde edilir.

(ii) (3.3) eşitsizliğini elde etmek için (3.2) eşitsizliği kullanılır.

$$C(t) = \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[B(t)]^{\frac{m}{p}}\left[\overline{A}(t)\right]^{\frac{(m+r)(p-1)}{p}}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-1}} \; ve \; D(t) = \left[\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

fonksiyonları tanımlansın. O zaman (3.2) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} C(t)D(t)\nabla t. \qquad (3.11)$$

$p > 1$ ve $\frac{p}{p-1} > 1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'da nabla integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.4) kullanılarak, (3.11) eşitsizliğinin son terimi için şu tahmine ulaşılır:

$$\int_a^\infty \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^\infty C(t)D(t)\nabla t$$

$$\leq \frac{m+p}{m+r-1}\left[\int_a^\infty \frac{w(t)f^p(t)[B(t)]^m\left[\overline{A}(t)\right]^{(m+r)(p-1)}}{\left[\overline{A}^\rho(t)\right]^{(m+r-1)p}}\nabla t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^\infty \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Buradan da her iki tarafın p kuvveti alınarak istenilen sonuç elde edilir.

(iii) (3.4) eşitsizliğini elde etmek için (3.3) eşitsizliği kullanılır.

$$\frac{\left[\overline{A}(t)\right]^{(m+r)(p-1)}}{\left[\overline{A}^\rho(t)\right]^{(m+r-1)p}} = \left[\frac{\overline{A}(t)}{\overline{A}^\rho(t)}\right]^{(m+r)(p-1)} \frac{1}{\left[\overline{A}^\rho(t)\right]^{m+r-p}} \leq \frac{L^{(m+r)(p-1)}}{\left[\overline{A}^\rho(t)\right]^{m+r-p}}$$

eşitsizliği (3.3) eşitsizliğinde yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

(iv) (3.5) eşitsizliğini elde etmek için (3.2) eşitsizliği ve L sabiti aşağıdaki gibi kullanılır.

$$\int_a^\infty \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^\infty \frac{w(t)f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}^\rho(t)\right]^{m+r-1}}\nabla t$$

$$\leq L^{m+r-1}\frac{m+p}{m+r-1}\int_a^\infty \frac{w(t)f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}}\nabla t.$$

Şimdi aşağıdaki C ve D fonksiyonları tanımlansın.

$$C(t) = \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[B(t)]^{\frac{m}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{\frac{m+r-p}{p}}} \; ve \; D(t) = \left[\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

$p > 1$ ve $\frac{p}{p-1} > 1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'da nabla integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.4) kullanılarak istenilen sonuca ulaşılır.

(v) Eşitsizlik (3.6)'nın sol tarafına Teorem 1.1.8'de nabla integral için verilen (1.2) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\nabla}(t) = \frac{w(t)}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \; ve \; v(t) = [B(t)]^{m+p}$$

fonksiyonları için uygulandıktan sonra eşitsizlik (3.6) şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} = u(t)B^{m+p}(t)\Big|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} -u^{\rho}(t)[B^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t.$$

Yukarıda u^{∇}'nin nasıl verildiği göz önüne alındığında

$$u(t) = -\int_t^{\infty} \frac{w(s)}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}\nabla s$$

olduğu bulunur. Ayrıca $B(a) = 0$ ve $u(\infty) = 0$ ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u^{\rho}(t)[B^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t. \tag{3.12}$$

Daha sonra (i)'in ispatındaki yöntem takip edilerek

$$\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\nabla} \leq -(m+r-1)\frac{w(t)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}$$

$$\leq -(m+r-1)\frac{w(t)}{L^{m+r}\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik de

$$\frac{w(t)}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \leq L^{m+r}\frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\nabla}}{m+r-1}$$

anlamına gelir. Ayrıca

$$-u^{\rho}(t) = \int_{\rho(t)}^{\infty} \frac{w(s)}{\left[\overline{A}^{\rho}(s)\right]^{m+r}} \leq \int_{\rho(t)}^{\infty} L^{m+r}\frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(s)\right]^{\nabla}}{m+r-1}\nabla s$$

$$= L^{m+r}\frac{-\overline{A}^{1-m-r}(\infty) + \left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{1-m-r}}{m+r-1} \leq L^{m+r}\frac{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{1-m-r}}{m+r-1} \tag{3.13}$$

bulunur. (3.9) ve (3.13) eşitsizlikleri (3.12)'de yerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

(vi) (3.7) eşitsizliğini elde etmek için (3.6) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral,

$$C(t)=\frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[B(t)]^{\frac{m}{p}}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{\frac{m+r-p}{p}}}\ ve\ D(t)=\left[\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

fonksiyonları ile

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-1}}\nabla t=\int_a^{\infty}C(t)D(t)\nabla t$$

şeklinde yazılır. O zaman (3.6) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}\leq L^{m+r}\frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty}C(t)D(t)\nabla t. \tag{3.14}$$

$p>1$ ve $\frac{p}{p-1}>1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'da nabla integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.4) kullanılarak, (3.14) eşitsizliğinin son terimi için şu tahmine ulaşılır:

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}$$

$$\leq L^{m+r}\ \frac{m+p}{m+r-1}\left[\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-p}}\nabla t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

ki bu da bize istenilen sonucu verir.

Sonuç 3.1.1. $[B^{\rho}(t)]^{m+p}\leq[B(t)]^{m+p}$ olduğundan (3.2)-(3.7) eşitsizliklerinin sol taraflarındaki $[B(t)]^{m+p}$ terimi $[B^{\rho}(t)]^{m+p}$ terimi ile yer değiştirebilir.

Sonuç 3.1.2. $m=0$ olsun. Bu durumda (3.2)-(3.3) eşitsizlikleri (Saker vd., 2014b) makalesinde (2.7) ve (2.8) ile verilen delta Hardy-Copson eşitsizliklerinin nabla karşılıklarıdır. Ayrıca (3.4) eşitsizliği (Saker vd., 2014b) makalesinde (2.18) ile verilen delta Hardy-Copson eşitsizliğinin nabla versiyonudur. (3.5) eşitsizliği (3.2) eşitsizliğinden elde edilebilirken (3.6)-(3.7) eşitsizlikleri $m=0$ olduğunda bile herhangi bir zaman skalasında elde edilen yeni sonuçlardır.

Sonuç 3.1.3. Zaman skalası reel sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise her $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ olur. Ayrıca (3.2)–(3.7) eşitsizliklerinde $L = 1$ olur. Bu durumda (3.2) ve (3.6) eşitsizlikleri aynı olur. Ayrıca (3.3)–(3.5) eşitsizlikleri hem birbirleriyle hem de (3.7) eşitsiziği ile çakışır. Böylece (3.2) (ya da (3.6)) eşitsizliği

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}dt}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}} dt$$

şeklini alır. (3.3)–(3.5) eşitsizlikleri (ya da (3.7) eşitsizliği) de

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}dt}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^p \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^p(t)[B(t)]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} dt \tag{3.15}$$

halini alır. Burada $m \geq 0, p > 1,\ m + r > 1$ ve

$$\overline{A}(t) = \int_a^t w(s)ds \quad ve \quad B(t) = \int_a^t w(s)f(s)ds \tag{3.16}$$

dir.

$a = 0$ ise (3.15) eşitsizliği ile (Pečarić ve Hanjš, 1999) makalesindeki (3) eşitsizliği $H(x) = x$ olduğunda çakışır.

$m = 0 = a$ ise (3.15) eşitsizliği (Copson, 1976) makalesindeki Teorem 1'deki eşitsizliği ve (Pachpatte, 1999) makalesindeki (6) eşitsizliğini verir.

$m = 0 = a$, $w(t) = 1$ ve $\overline{A}(t) = t$ ise (3.15) eşitsizliği Hardy ve diğerlerinin (Hardy vd., 1934) elde ettiği (2.3) eşitsizliğine dönüşür. Bununla beraber $p = r$ ise (3.17) eşitsizliği Hardy'nin (Hardy, 1925) elde ettiği (2.2) eşitsizliği olur.

Sonuç 3.1.4. Zaman skalası doğal sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ise $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ haline gelir.

$$\int_a^{\rho(t)} w(s)\,\nabla s = \sum_{k=a+1}^{t-1} w(k)$$

kullanılarak

$$\overline{A}^{\rho}(t) = \overline{A}(t-1) = \sum_{k=a+1}^{t-1} w(k)$$

elde edilir. Burada

$$\overline{A}(t) = \sum_{k=a+1}^{t} w(k) \ ve\ B(t) = \sum_{k=a+1}^{t} w(k)f(k) \tag{3.17}$$

dir.

$$\frac{\overline{A}(t)}{\overline{A}(t-1)} \leq L$$

olacak şekilde $L > 0$ olsun. Bu durumda $a = 0$, $m \geq 0$, $p > 1$ ve $m + r > 1$ için, (3.2)-(3.7) eşitsizlikleri şu hale gelir:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r-1}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{p}(t)[B(t)]^{m}\left[\overline{A}(t)\right]^{(m+r)(p-1)}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{(m+r-1)p}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} L^{(m+r)(p-1)} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r-p}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(L^{m+r-1} \frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1} L^{m+r} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{p}(t)[B(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r-1}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} L^{(m+r)p} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r-p}}$$

$m = 0$ olsun. $r - p > 0$ olduğunda (Copson, 1928) makalesinde elde edilen (2.5) eşitsizliği yukarıdaki üçüncü ve dördüncü eşitsizliği gerektirdiğinden (2.5) eşitsizliği bu eşitsizliklerden daha iyidir. Buna rağmen yukarıdaki diğer ayrık eşitsizlikler (Copson, 1928), (Bennett, 1987) ve (Leindler, 1993) makalelerindeki eşitsizlikleri yani (2.5) ve (2.10) eşitsizliklerini $m \geq 0$ için genelleştirmekle kalmıyorlar aynı zamanda $m = 0$ için bile literatürde olmayan yeni sonuçları gösteriyorlardır.

Aşağıdaki teorem, (3.1) eşitliklerindeki $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları kullanılarak ayrık eşitsizlik (2.9)'un nabla birleşimini ve (Saker vd., 2018a) makalesindeki delta Hardy-Copson eşitsizliğinin nabla karşılığını ifade eder. Dahası bu teorem ayrık ve sürekli zaman skalaları için yeni sonuçlar sağlar.

Teorem 3.1.2. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan w ve f fonksiyonları için

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} < \infty$$

ve $\overline{B}(a) < \infty$ olsun. $t \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{A^{\rho}(t)}{A(t)} \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ olduğunu varsayalım. Eğer $m \geq 0$, $p > 1$ ve $m + r > 1$ reel sabitlerse, o zaman

a)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-1}}{[A(t)]^{m+r-1}}\nabla t. \tag{3.18}$$

b)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m}[A^{\rho}(t)]^{(m+r)(p-1)}}{[A(t)]^{(m+r-1)p}}\nabla t. \tag{3.19}$$

c)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} M^{(m+r)(p-1)}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\nabla t. \tag{3.20}$$

d)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \left(M^{m+r-1}\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-p}}\nabla t. \tag{3.21}$$

e)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}M^{m+r}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-1}}{[A(t)]^{m+r-1}}\nabla t. \tag{3.22}$$

f)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} M^{(m+r)p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\nabla t. \tag{3.23}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2021).

İspat.

(a) Eşitsizlik (3.18)'in sol tarafına Teorem 1.1.8'de nabla integral için verilen (1.2) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\nabla}(t) = \frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \quad ve \quad v(t) = [\bar{B}(t)]^{m+p}$$

fonksiyonları için uygulandıktan sonra

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\ \bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} = u(t)\bar{B}(t)^{m+p}\Big|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} -u(t)[\bar{B}^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıda u^{∇}'nin nasıl verildiği göz önüne alındığında

$$u(t) = \int_a^{t} \frac{w(s)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}\nabla s$$

olduğu bulunur. Ayrıca $\bar{B}(\infty) = 0$ ve $u(a) = 0$ ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\ \bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u(t)[\bar{B}^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t. \tag{3.24}$$

$\bar{B}^{\nabla}(t) = -f(t)w(t) \leq 0$ eşitsizliği kullanılarak $[\bar{B}^{m+p}(t)]^{\nabla}$' ye Teorem 1.1.6 (a)'da nabla türev için verilen Zincir Kuralı uygulanırsa

$$-[\bar{B}^{m+p}(t)]^{\nabla} = -(m+p)\bar{B}^{\nabla}(t)\bar{B}^{m+p-1}(d) = (m+p)w(t)f(t)\bar{B}^{m+p-1}(d)$$

elde edilir.

$m+p>1$ ve $t \geq d$ için $[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p-1} \geq [\bar{B}^{\rho}(d)]^{m+p-1}$ olduğu görülür ve aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$-[\bar{B}^{m+p}(t)]^{\nabla} \leq (m+p)w(t)f(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p-1}. \tag{3.25}$$

$A^{\nabla}(t) = -w(t) \leq 0$ ve $m+r>1$ olduğundan, Teorem 1.1.6 (b)'de nabla türev için verilen Zincir Kuralı'na göre

$$[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-m-r)A^{\nabla}(t)dh}{[hA(t)+(1-h)A^{\rho}(t)]^{m+r}}$$

$$= \int_0^1 \frac{(m+r-1)w(t)dh}{[hA(t)+(1-h)A^{\rho}(t)]^{m+r}}$$

$$\geq (m+r-1)\int_0^1 \frac{w(t)}{[hA^{\rho}(t)+(1-h)A^{\rho}(t)]^{m+r}}dh$$

$$= (m+r-1)\frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi

$$\frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \frac{[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla}}{m+r-1}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

$$u(t) = \int_a^t \frac{w(s)\nabla s}{[A^{\rho}(s)]^{m+r}} \leq \int_a^t \frac{[A^{1-m-r}(s)]^{\nabla}\nabla s}{m+r-1} = \frac{-A^{1-m-r}(a)+[A(t)]^{1-m-r}}{m+r-1}$$

$$\leq \frac{[A(t)]^{1-m-r}}{m+r-1} \qquad (3.26)$$

(3.25) ve (3.26)'nin (3.24)'e uygulanması ile istenilen sonuç elde edilir.

(b) (319) eşitsizliğini elde etmek için (3.18) eşitsizliği kullanılır.

$$C(t) = \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{\frac{m}{p}}\left[\overline{A}(t)\right]^{\frac{(m+r)(p-1)}{p}}}{[A(t)]^{m+r-1}} \; ve \; D(t) = \left[\frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

fonksiyonları tanımlansın. O zaman (3.18) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} C(t)D(t)\nabla t. \qquad (3.27)$$

$p > 1$ ve $\frac{p}{p-1} > 1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'daki Hölder eşitsizliği kullanılarak, (3.27) eşitsizliğinin son terimi için şu tahmine ulaşılır:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} C(t)D(t)\nabla t$$

$$\leq \frac{m+p}{m+r-1}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m}[A^{\rho}(t)]^{(m+r)(p-1)}}{[A(t)]^{(m+r-1)p}}\nabla t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}\nabla t\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Buradan da istenen (3.19) eşitsizliği elde edilir..

(c) (3.20) eşitsizliğini elde etmek için (3.19) eşitsizliği kullanılır.

$$\frac{[A^{\rho}(t)]^{(m+r)(p-1)}}{[A(t)]^{(m+r-1)p}} = \left[\frac{A^{\rho}(t)}{A(t)}\right]^{(m+r)(p-1)} \frac{1}{[A(t)]^{-p+m+r}} \leq \frac{M^{(m+r)(p-1)}}{[A(t)]^{m+r-p}}$$

eşitsizliği (3.19) eşitsizliğinde yazılırsa (3.20) eşitsizliği elde edilir.

d) (3.21) eşitsizliğini elde etmek için (3.18) eşitsizliği ve M sabiti aşağıdaki gibi kullanılır.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p-1}}{[A(t)]^{m+r-1}}\nabla t$$

$$\leq M^{m+r-1}\frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p-1}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-1}}\nabla t.$$

Şimdi aşağıdaki C ve D fonksiyonları tanımlansın.

$$C(t) = \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{\frac{m}{p}}}{[A^{\rho}(t)]^{\frac{m+r-p}{p}}} \; ve \; D(t) = \left[\frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$p > 1$ ve $\frac{p}{p-1} > 1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'da nabla integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.4) kullanılarak, (3.21) eşitsizliğine ulaşılır.

(e) Eşitsizlik (3.22)'nin sol tarafına Teorem 1.1.8'de nabla integral için verilen (1.2) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\nabla}(t) = \frac{w(t)}{[A(t)]^{m+r}} \; ve \; v(t) = [\bar{B}(t)]^{m+p}$$

fonksiyonları için uygulandıktan sonra eşitsizlik (3.22) şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} = u(t)\bar{B}^{m+p}(t)|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} -u(t)[\bar{B}^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t.$$

Yukarıda u^{∇}'nin nasıl verildiği göz önüne alındığında

$$u(t) = \int_a^t \frac{w(s)}{[A(t)]^{m+r}}\nabla s$$

olduğu bulunur. Ayrıca $\bar{B}(\infty) = 0$ ve $u(a) = 0$'ı alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u(t)[\bar{B}^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t \tag{3.28}$$

(a)'nın ispatındaki yöntem takip edilerek

$$[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla} \geq (m+r-1)\frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}$$
$$\geq (m+r-1)\frac{w(t)}{M^{m+r}[A(t)]^{m+r}}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik de

$$\frac{w(t)}{[A(t)]^{m+r}} \leq M^{m+r}\frac{[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla}}{m+r-1}$$

anlamına gelir. O zaman

$$u(t) = \int_a^t \frac{w(s)}{[A(s)]^{m+r}} \leq \int_a^t M^{m+r}\frac{[A^{1-m-r}(s)]^{\nabla}}{m+r-1}\nabla s$$
$$= M^{m+r}\frac{-A^{1-m-r}(a) + [A(t)]^{1-m-r}}{m+r-1} \leq M^{m+r}\frac{[A(t)]^{1-m-r}}{m+r-1} \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.25) ve (3.29) eşitsizlikleri (3.28)'de yerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

(f) (3.23) eşitsizliğini elde etmek için (3.22) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral,

$$C(t) = \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{\frac{m}{p}}}{[A(t)]^{\frac{m+r-p}{p}}} \text{ ve } D(t) = \left[\frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

fonksiyonları ile

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p-1}}{[A(t)]^{m+r-1}}\nabla t = \int_a^{\infty} C(t)D(t)\nabla t$$

şeklinde yazılır. O zaman (3.22) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} C(t)D(t)\nabla t. \tag{3.30}$$

$p > 1$ ve $\frac{p}{p-1} > 1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'da nabla integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.4) kullanılarak, (3.30) eşitsizliğinin son terimi için şu tahmine ulaşılır:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}}$$

$$\leq M^{m+r}\ \frac{m+p}{m+r-1}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\nabla t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\nabla t\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

bu da istenilen sonuc (3.23)'ü verir.

Sonuç 3.1.5. $\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p} \leq \left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}$ olduğundan (3.18)-(3.23) eşitsizliklerinin sol taraflarındaki $\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}$ terimi $\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}$ terimi ile yer değiştirebilir.

Sonuç 3.1.6. $m = 0$ olsun. Bu durumda (3.18)-(3.19) eşitsizlikleri (Saker vd., 2014b) makalesinde (2.48) ve (2.49) ile verilen delta Hardy-Copson eşitsizliklerinin nabla karşılıklarıdır. $m \geq 0$ olduğunda (3.21) eşitsizliği (Saker vd., 2018a) makalesinde (2.17) ile verilen delta Hardy-Copson eşitsizliğinin nabla versiyonudur. (3.20) eşitsizliği (3.19) eşitsizliğinden elde edilebilirken (3.22)-(3.23) eşitsizlikleri $m = 0$ olduğunda bile herhangi bir zaman skalasında elde edilen yeni sonuçlardır.

Sonuç 3.1.7. Zaman skalası reel sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise her $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ olur. Ayrıca (3.18)–(3.23) eşitsizliklerinde $M = 1$ olur. Bu durumda (3.18) ve (3.22) eşitsizlikleri aynı olur. Ayrıca (3.19)–(3.21) eşitsizlikleri hem birbirleriyle hem de (3.23) eşitsiziği ile çakışır. Böylece (3.18) (ya da (3.22)) eşitsizliği

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}(t)]^{m+p}dt}{[A(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[\bar{B}(t)]^{m+p-1}}{[A(t)]^{m+r-1}}dt$$

şeklini alır. (3.19)–(3.21) eşitsizlikleri (ya da (3.23) eşitsizliği) de

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}(t)]^{m+p}dt}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^p \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^p(t)[\bar{B}(t)]^m}{[A(t)]^{m+r-p}}dt \tag{3.31}$$

halini alır. Burada $m \geq 0, p > 1,\ m+r > 1$ ve

$$A(t) = \int_t^{\infty} w(s)ds \quad ve \quad \bar{B}(t) = \int_t^{\infty} w(s)f(s)ds \tag{3.32}$$

dir.

Yukarıdaki eşitsizlikler sürekli zaman skalasında ilk defa elde edilmiştir. Ayrıca $m = 0$ ise (3.31) eşitsizliği (Bennett, 1987) ve (Leindler, 1993) makalesinde elde edilen (2.9) ayrık eşitsizliğinin sürekli versiyonudur.

Sonuç 3.1.8. Zaman skalası doğal sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ise $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ haline gelir.

$$\int_{\rho(t)}^{\infty} w(s)\,\nabla s = \sum_{k=\rho(t)+1}^{\infty} w(k)$$

ve

$$A(t) = \sum_{k=t+1}^{\infty} w(k) \ \ ve \ \ \bar{B}(t) = \sum_{k=t+1}^{\infty} w(k)f(k) \tag{3.33}$$

kullanılarak

$$A^{\rho}(t) = A(t-1) = \sum_{k=t}^{\infty} w(k)$$

elde edilir.

$$\frac{A(t-1)}{A(t)} \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ olsun. Bu durumda $a = 0,\ m \geq 0,\ p > 1$ ve $m + r > 1$ için, (3.18)-(3.23) eşitsizlikleri şu hale gelir:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)f(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p-1}}{[A(t)]^{m+r-1}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^p \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)f^p(t)[\bar{B}(t-1)]^m[A(t-1)]^{(m+r)(p-1)}}{[A(t)]^{(m+r-1)p}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} L^{(m+r)(p-1)} \sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[\bar{B}(t-1)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \left(L^{m+r-1}\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} \sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[\bar{B}(t-1)]^{m}}{[A(t-1)]^{m+r-p}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}L^{m+r} \sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p-1}}{[A(t)]^{m+r-1}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} L^{(m+r)p} \sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[\bar{B}(t-1)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}$$

$m=0$ olsun. $r-p<0$ olduğunda (2.9) eşitsizliği yukarıdaki üçüncü ve dördüncü eşitsizliği gerektirdiğinden (2.9) eşitsizliği bu eşitsizliklerden daha iyidir. Buna rağmen yukarıdaki diğer ayrık eşitsizlikler (Bennett, 1987) ve (Leindler, 1993) makalelerindeki eşitsizlikleri yani (2.9) eşitsizliğini $m \geq 0$ için genelleştirmekle kalmıyorlar aynı zamanda $m=0$ için bile literatürde olmayan yeni sonuçları gösteriyorlardır.

Aşağıdaki teorem, ayrık eşitsizlikler (2.6) ve (2.8) ile bu eşitsizliklerin sürekli karşılıkları olan (2.3), (2.13) ve (2.15)'in nabla birleşimini ifade eder. Ayrıca (Saker vd., 2018a) makalesindeki (2.4) delta Hardy-Copson eşitsizliğinin nabla versiyonunu verir. Dahası aşağıdaki sonuçlar ayrık ve sürekli durumlarda yeni sonuçları gösterir.

Teorem 3.1.3. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan w ve f fonksiyonları için $\overline{B}(a)<\infty$ ve

$$\int_{a}^{\infty}\frac{w(t)\nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}<\infty$$

olsun. Eğer $m \geq 0$, $p>1$ ve $m+r<1$ reel sabitlerse, o zaman

$$\int_{a}^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{1-m-r}\int_{a}^{\infty}\frac{w(t)f(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}}\nabla t, \tag{3.34}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}\nabla t. \tag{3.35}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2021)

İspat. (3.34) eşitsizliğinin sol tarafına Teorem 1.1.8'de nabla integral için verilen (1.2) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\nabla}(t) = \frac{w(t)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \; ve \; v(t) = [\bar{B}(t)]^{m+p}$$

fonksiyonları için uygulandıktan sonra (3.34) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} = u(t)\bar{B}^{m+p}(t)|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} -u(t)[\bar{B}^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t.$$

Yukarıda u^{∇}'nin nasıl verildiği göz önüne alındığında

$$u(t) = \int_a^{t} \frac{w(s)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\nabla s$$

olduğu bulunur. Ayrıca $\bar{B}(\infty) = 0$ ve $u(a) = 0$ ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u(t)[\bar{B}^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t. \tag{3.36}$$

Daha sonra Teorem 3.1.1 (i)'in ispatındaki yöntem takip edilerek

$$\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\nabla} \geq (1-m-r)\frac{w(t)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik de

$$\frac{w(t)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\nabla}}{1-m-r}$$

anlamına gelir. Ayrıca

$$u(t) = \int_a^{t} \frac{w(s)}{\left[\overline{A}(s)\right]^{m+r}}\nabla s \leq \int_a^{t} \frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(s)\right]^{\nabla}}{1-m-r}\nabla s$$

$$= \frac{-\overline{A}^{1-m-r}(a) + \left[\overline{A}(t)\right]^{1-m-r}}{1-m-r} \leq \frac{\left[\overline{A}(t)\right]^{1-m-r}}{1-m-r}$$

(3.37)

bulunur. (3.25) ve (3.37) eşitsizlikleri (3.36)'de yerine yazılırsa (3.34) eşitsizliğine ulaşılır.

(3.35) eşitsizliğini elde etmek için (3.34) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral,

$$C(t)=\frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{\frac{m}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{\frac{m+r-p}{p}}}\ ve\ D(t)=\left[\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

fonksiyonları ile

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)f(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}}\nabla t=\int_a^{\infty}C(t)D(t)\nabla t$$

şeklinde yazılır. O zaman (3.34) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\leq\frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty}C(t)D(t)\nabla t. \tag{3.38}$$

$p>1$ ve $\frac{p}{p-1}>1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'da nabla integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.4) kullanılarak (3.38) eşitsizliğinin son terimi için şu tahmine ulaşılır:

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\nabla t$$

$$\leq\frac{m+p}{m+r-1}\left[\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}\nabla t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

bu da bize istenilen sonuc (3.35)'i verir.

Sonuç 3.1.9. $\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}\leq\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}$ olduğundan (3.34) ve (3.35) eşitsizliklerinin sol taraflarındaki $\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}$ terimi $[B(t)]^{m+p}$ terimi ile yer değiştirebilir.

Sonuç 3.1.10. $m=0$ olsun. (3.34) ve (3.35) eşitsizlikleri (Saker vd., 2014b) makalesindeki (2.21)-(2.22) delta Hardy-Copson eşitsizliklerinin nabla versiyonlarıdır.

Eğer $m \geq 0$ ise (3.35) eşitsizliği (Saker vd., 2018a) makalesindeki (2.4) delta Hardy-Copson eşitsizliklerinin nabla karşılığıdır.

Sonuç 3.1.11. Eğer (3.35) eşitsizliğinde $0 \leq r < 1$ için $m = 0$ ve $w(t) = 1$ seçersek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{(t-a)^r} \left(\int_a^{\infty} f(s) \nabla s \right)^p \nabla t \leq \left(\frac{p}{1-r} \right)^p \int_a^{\infty} \frac{f^p(t)}{(t-a)^{r-p}} \nabla t.$$

Sonuç 3.1.12. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucunu verir. Dolayısıyla (3.34) ve (3.35) eşitsizlikleri $m \geq 0$, $p > 1$ ve $m + r < 1$ için şöyle olur:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p} dt}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{1-m-r} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f(t) \left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}} dt$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p} dt}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r} \right)^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t) \left[\overline{B}(t)\right]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} dt. \tag{3.39}$$

Burada $\overline{A}(t)$ ve $\overline{B}(t)$ aşağıdaki gibidir.

$$\overline{A}(t) = \int_a^t w(s) ds \; ve \; \overline{B}(t) = \int_t^{\infty} w(s) f(s) ds. \tag{3.40}$$

$a = 0$ ise (3.39) eşitsizliği ile (Pečarić ve Hanjš, 1999) makalesindeki (9) eşitsizliği $H(x) = x$ olduğunda çakışır.

$m = 0 = a$ ise (3.39) eşitsizliği (Copson, 1976) makalesindeki Teorem 3'deki eşitsizliği ve (Pachpatte, 1999) makalesindeki (6) eşitsizliğini verir.

Sonuç 3.1.13. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir.

$$\int_a^{\rho(t)} w(s) \nabla s = \sum_{k=a+1}^{\rho(t)} w(k)$$

eşitliği kullanılarak

$$\overline{A}^{\rho}(t) = \overline{A}(t-1) = \sum_{k=a+1}^{t-1} w(k)$$

elde edilir. Burada $\overline{A}(t)$ ve $\overline{B}(t)$ aşağıdaki gibidir.

$$\overline{A}(t) = \sum_{k=a+1}^{t} w(k) \ ve \ \overline{B}(t) = \sum_{k=a+1}^{\infty} w(k)f(k). \tag{3.41}$$

$a = 0$, $m \geq 0$, $p > 1$ ve $m + r < 1$ için (3.34) ve (3.35) eşitsizlikleri sırasıyla aşağıdaki gibi olur:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)f^p(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}},$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[\bar{B}(t-1)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^p \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)f^p(t)[\bar{B}(t-1)]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}.$$

Bu eşitsizlikler (Copson, 1976), (Bennett, 1987) ve (Leindler, 1993) makalelerindeki (2.6) ve (2.8) sonuçlarını geliştirmişler ve $m \geq 0$ için genelleştirmişlerdir.

Aşağıdaki teorem ayrık eşitsizlik (2.7)'nin nabla birleşimini ve (Saker vd., 2018a) makalesindeki (2.11) delta Hardy-Copson eşitsizliğinin nabla karşılığını ifade eder. Dahası bu teorem sürekli zaman skalası için yeni sonuçlar sağlar.

Teorem 3.1.4. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan w ve f fonksiyonları için $B(\infty) < \infty$ ve

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} < \infty$$

olsun. Eğer $m \geq 0$, $p > 1$ ve $m + r < 1$ reel sabitlerse, o zaman aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{1-m-r} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-1}} \nabla t \tag{3.42}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^p \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^p(t)[B(t)]^{m}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{3.43}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2021).

İspat. (3.42) eşitsizliğinin sol tarafına Teorem 1.1.8'de nabla integral için verilen (1.2) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\nabla}(t) = \frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \ ve \ v(t) = [B(t)]^{m+p}$$

fonksiyonları için uygulandıktan sonra (3.42) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} = u(t)B^{m+p}(t)|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} -u^{\rho}(t)[B^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t.$$

Yukarıda u^{∇}'nin nasıl verildiği göz önüne alındığında

$$u(t) = -\int_t^{\infty} \frac{w(s)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}\nabla s$$

olduğu bulunur. Ayrıca $B(a) = 0$ ve $u(\infty) = 0$ ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u^{\rho}(t)[B^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t. \tag{3.44}$$

Daha sonra Teorem 3.1.2 (a)'nın ispatındaki yöntem takip edilerek

$$[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla} \leq -(1-m-r)\frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik de

$$\frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq -\frac{[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla}}{1-m-r}$$

anlamına gelir. Ayrıca

$$\begin{aligned} -u^{\rho}(t) &= \int_{\rho(t)}^{\infty} \frac{w(s)}{[A^{\rho}(s)]^{m+r}}\nabla s \leq \int_{\rho(t)}^{\infty} \frac{[A^{1-m-r}(s)]^{\nabla}}{1-m-r}\nabla s \\ &= \frac{-A^{1-m-r}(\infty) + [A^{\rho}(t)]^{1-m-r}}{1-m-r} \leq \frac{[A^{\rho}(t)]^{1-m-r}}{1-m-r} \end{aligned} \tag{3.45}$$

bulunur. (3.9) ve (3.45) eşitsizlikleri (3.44)'de yerine yazılırsa (3.42) eşitsizliğine ulaşılır.

(3.43) eşitsizliğini elde etmek için (3.42) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral,

$$C(t) = \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[B(t)]^{\frac{m}{p}}}{[A^{\rho}(t)]^{\frac{m+r-p}{p}}} \; ve \; D(t) = \left[\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

fonksiyonları ile

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-1}}\nabla t = \int_a^{\infty} C(t)D(t)\nabla t$$

şeklinde yazılır. O zaman (3.42) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} C(t)D(t)\nabla t. \tag{3.46}$$

$p > 1$ ve $\frac{p}{p-1} > 1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'da nabla integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.4) kullanılarak, (3.46) eşitsizliğinin son terimi için şu tahmine ulaşılır:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}$$

$$\leq \frac{m+p}{m+r-1}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^p(t)[B(t)]^m}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-p}}\nabla t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}\nabla t\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

bu da bize istenilen sonuc (3.43)'ü verir.

Sonuç 3.1.14. $[B^{\rho}(t)]^{m+p} \leq [B(t)]^{m+p}$ olduğundan (3.42) ve (3.43) eşitsizliklerinin sol taraflarındaki $[B(t)]^{m+p}$ terimi $[B^{\rho}(t)]^{m+p}$ terimi ile yer değiştirebilir.

Sonuç 3.1.15. $m = 0$ olsun. (3.42) ve (3.43) eşitsizlikleri (Saker vd., 2014b) makalesindeki delta Hardy-Copson eşitsizliklerini gösteren Teorem 2.9'daki sonuçların nabla karşılıklarıdır. Eğer $m \geq 0$ ise (3.43) eşitsizliği (Saker vd., 2018a) makalesindeki (2.11) delta Hardy-Copson eşitsizliğinin nabla versiyonudur.

Sonuç 3.1.16. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucunu verir. Dolayısıyla (3.42) ve (3.43) eşitsizlikleri şöyle olur:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}dt}{[A(t)]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{1-m-r}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{[A(t)]^{m+r-1}}dt \tag{3.47}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}dt}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^p \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^p(t)[B(t)]^m}{[A(t)]^{m+r-p}}dt. \tag{3.48}$$

Burada $m \geq 0$, $p > 1$ ve $m + r < 1$ ve $A(t)\ ve\ B(t)$ aşağıdaki gibidir.

$$A(t) = \int_t^{\infty} w(s)ds\ ve\ B(t) = \int_a^{t} w(s)f(s)ds. \tag{3.49}$$

(3.47) ve (3.48) eşitsizlikleri daha önce elde edilmemiştir, yani sürekli durumda bu eşitsizlikler yenidir. Ayrıca $m = 0$ ise (3.48) eşitsizliği (Bennett, 1987) ve (Leindler,

1993) makalelerinde elde edilen (2.7) ayrık Hardy-Copson eşitsizliklerinin sürekli versiyonudur.

Sonuç 3.1.17. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise tüm $t\in\mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t)=t-1$ sonucunu verir.

$$\int_{\rho(t)}^{\infty} w(s)\,\nabla s=\sum_{k=\rho(t)+1}^{\infty} w(k)$$

eşitliği kullanılarak

$$A^{\rho}(t)=A(t-1)=\sum_{k=1}^{\infty} w(k)$$

elde edilir; burada $A(t)\ ve\ B(t)$ aşağıdaki gibidir.

$$A(t)=\sum_{k=t+1}^{\infty} w(k)\ ve\ B(t)=\sum_{k=a+1}^{t} w(k)f(k). \tag{3.50}$$

Ayrıca $a=0,\ m\geq 0,\ p>1$ ve $m+r<1$ için (3.42) ve (3.43) eşitsizlikleri sırasıyla aşağıdaki gibi olur:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}}\leq\frac{m+p}{1-m-r}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{[A(t-1)]^{m+r-1}}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}}\leq\left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{[A(t-1)]^{m+r-p}}.$$

Yukarıdaki ikinci eşitsizlik $m=0$ olduğunda (Bennett, 1987) ve (Leindler, 1993) makalelerindeki (2.7) ayrık Hardy-Copson eşitsizliğinden daha iyidir. $m\geq 0$ olduğunda ilk eşitsizlik ayrık durumda ilk defa elde edilmiştir.

3.2 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri

Bu bölümün temel amacı, negatif olmayan, rd-sürekli, Δ-diferansiyellenebilir ve lokal olarak delta integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için ikinci bölümde verilen ayrık ve sürekli Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta zaman skalasındaki birleşimini ve 3.1 bölümündeki nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta karşılıklarını vermektir. Bunun için (Saker vd., 2018a) ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalelerindeki sonuçlar gösterilecektir.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ olsun. $[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında negatif olmayan, rd-sürekli, $\Delta-$diferansiyellenebilir ve lokal olarak delta integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için

$$A(t)=\int_t^{\infty} w(s)\Delta s\,, \qquad \overline{A}(t)=\int_0^{t} w(s)\Delta s,$$

$$B(t)=\int_a^{t} w(s)f(s)\Delta s, \quad \overline{B}(t)=\int_t^{\infty} w(s)f(s)\Delta s, \tag{3.51}$$

fonksiyonları tanımlansın.

Saker vd. (2018a), (3.51) eşitliklerindeki fonksiyonları kullanarak Bennet (1987) ve Leindler (1993) tarafından elde edilen ayrık (2.6) eşitsizliğini $p>1$ için aşağıdaki iki eşitsizlikle geliştirmiştir.

Teorem 3.2.1. Eğer $m\geq 0$, $p>1$ ve $m+r<1$ ise (3.51) eşitliklerinde tanımlanan A ve B fonksiyonları için

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}}\leq\left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\Delta t$$

sağlanır (Saker vd., 2018a).

Bennet (1987) ve Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.8) ayrık eşitsizliğinin delta birleşimi aşağıdaki gibi kurulabilir.

Teorem 3.2.2. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan A fonksiyonu için

$$\frac{A^{\sigma}(t)}{A(t)}\geq\frac{1}{K}$$

sağlanıyor ve eğer $m\geq 0$, $p>1$ ve $m+r>1$ ise o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}}\leq\left(K^{m+r-1}\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\Delta t$$

sağlanır (Saker vd., 2018a).

Aşağıdaki teorem Copson (1928) tarafından elde edilen (2.6) ayrık eşitsizliğinin ve Copson (1976) tarafından elde edilen onun sürekli karşılığı olan (2.13) eşitsizliği ile Pečarić ve Hanjš (1999) tarafından elde edilen sürekli genellemesi olan (2.15) eşitsizliğinin delta birleşimini kurar.

Teorem 3.2.3. Eğer $m \geq 0$, $p > 1$ ve $m + r < 1$ ise (3.51) eşitliklerinde tanımlanan $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ fonksiyonları için

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r-p}}\Delta t$$

sağlanır (Saker vd., 2018a).

Her ne kadar (Saker vd., 2018a) Teorem 3.2.1–3.2.3'ün sonuçlarını delta zaman skalasında elde etmiş olsalar da, aşağıdaki teoremi dahil etmemişlerdir. Çalışmanın bütünlüğü açısından bir sonraki teoremi verip ispatlayacağız.

Aşağıdaki teorem, Hardy (1920) tarafından elde edilen (2.1) ayrık eşitsizliği, Copson (1928) tarafından elde edilen (2.5) ayrık eşitsizliği ve Bennet (1987) ve Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.10) ayrık eşitsizliği ile Hardy, vd. (1934) tarafından elde edilen (2.3) sürekli eşitsizliğinin, Copson (1976) ve Pachpatte (1999) tarafından elde edilen (2.12) eşitsizliğinin ve ayrıca Pečarić ve Hanjš (1999) tarafından elde edilen (2.14) eşitsizliğinin delta birleştirilmesini ifade etmektedir.

Teorem 3.2.4. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}(t)$ fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{\overline{A}^{\sigma}(t)}{\overline{A}(t)} \leq J$$

olacak şekilde $J > 0$ olsun. Ayrıca $B(\infty) < \infty$ ve

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\Delta t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} < \infty$$

olduğunu kabul edelim. Eğer $m \geq 0$, $p > 1$ ve $m + r > 1$ reel sabitler ise

(i)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}\Delta t \leq \frac{m+p}{m+r-1} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}}\Delta t \tag{3.52}$$

(ii)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}\Delta t \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{(m+r)(p-1)}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{(m+r-1)p}}\Delta t \tag{3.53}$$

(iii)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} J^{(m+r)(p-1)} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}\Delta t \tag{3.54}$$

(iv)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}\Delta t \leq \left(J^{m+r-1}\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r-p}}\Delta t \tag{3.55}$$

(v)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\Delta t \leq \frac{m+p}{m+r-1}J^{m+r} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}}\Delta t \tag{3.56}$$

(vi)

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\Delta t \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{p} J^{(m+r)p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}\Delta t \tag{3.57}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2021).

İspat.

(i) Eşitsizlik (3.52)'nin sol tarafına Teorem 1.1.7'de delta integral için verilen (1.1) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\Delta}(t) = \frac{w(t)}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \quad ve \quad v(t) = [B(t)]^{m+p}$$

fonksiyonları için uygulandıktan sonra

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}\Delta t = u(t)B(t)^{m+p}|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} -u(t)[B^{m+p}(t)]^{\Delta}\Delta t$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıda u^{Δ}'nin nasıl verildiği göz önüne alındığında

$$u(t) = -\int_t^{\infty} \frac{w(s)}{\left[\overline{A}^{\sigma}(s)\right]^{m+r}} \Delta s$$

olduğu bulunur. Ayrıca $B(a) = 0$ ve $u(\infty) = 0$'ı alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p} \Delta t}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u(t)[B^{m+p}(t)]^{\Delta} \Delta t. \tag{3.58}$$

$B^{\Delta}(t) = f(t)w(t) \geq 0$ eşitsizliği kullanılarak $[B^{m+p}(t)]^{\Delta}$' ye Teorem 1.1.3 (a)'da delta türev için verilen Zincir Kuralı uygulanırsa

$$[B^{m+p}(t)]^{\Delta} = (m+p)B^{m+p-1}(c)B^{\nabla}(t) = (m+p)w(t)f(t)B^{m+p-1}(c)$$

elde edilir.

$m + p > 1$ ve $t \leq c$ için $[B(\sigma(t))]^{m+p-1} \geq [B(c)]^{m+p-1}$ olduğu görülür ve aşağıdaki sonuç bulunur.

$$[B^{m+p}(t)]^{\Delta} \leq (m+p)w(t)f(t)B^{m+p-1}\big((\sigma(t)\big). \tag{3.59}$$

Ayrıca $\overline{A}^{\Delta}(t) = w(t) \geq 0$ ve $m + r > 1$ olduğundan, Teorem 1.1.3 (b)'de delta türev için verilen Zincir Kuralı'na göre

$$\begin{aligned}
-\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\Delta} &= -\int_0^1 \frac{(1-m-r)\overline{A}^{\Delta}(t)dh}{\left[\overline{A}(t) + h\mu(t)\overline{A}^{\Delta}(t)\right]^{m+r}} \\
&= \int_0^1 \frac{(m+r-1)w(t)dh}{\left[\overline{A}(t) + h\left(\overline{A}^{\sigma}(t) - \overline{A}(t)\right)\right]^{m+r}} \\
&= (m+r-1)\int_0^1 \frac{w(t)}{\left[(1-h)\overline{A}(t) + h\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} dh \\
&\geq (m+r-1)\int_0^1 \frac{w(t)}{\left[(1-h)\overline{A}^{\sigma}(t) + h\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} dh \\
&\geq (m+r-1)\frac{w(t)}{\overline{A}^{\sigma}(t)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi

$$\frac{w(t)}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \leq -\frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\Delta}}{m+r-1}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

$$-u(t) = \int_t^{\infty} \frac{w(s)\Delta s}{\left[\overline{A}^{\sigma}(s)\right]^{m+r}} \leq \int_t^{\infty} -\frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(s)\right]^{\Delta}\Delta s}{m+r-1} = \frac{\overline{-A}^{1-m-r}(\infty) + \overline{A}(t)^{1-m-r}}{m+r-1}$$

$$\leq \frac{\left[\overline{A}(t)\right]^{1-m-r}}{m+r-1}. \tag{3.60}$$

(3.59) ve (3.60) eşitsizliklerinin (3.58)'e uygulanması ile istenilen sonuç elde edilir.

(ii) (3.53) eşitsizliğini elde etmek için (3.52) eşitsizliği kullanılır.

$$C(t) = \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[B^{\sigma}(t)]^{\frac{m}{p}}\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{\frac{(m+r)(p-1)}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}} \; ve \; D(t) = \left[\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

fonksiyonları tanımlansın. O zaman (3.52) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} C(t)D(t)\Delta t. \tag{3.61}$$

$p > 1$ ve $\frac{p}{p-1} > 1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'daki Hölder eşitsizliği kullanılarak, (3.61) eşitsizliğinin son terimi için şu tahmine ulaşılır:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} C(t)D(t)\Delta t$$

$$\leq \frac{m+p}{m+r-1}\left[\int_a^{\infty} \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[B^{\sigma}(t)]^{\frac{m}{p}}\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{\frac{(m+r)(p-1)}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}}\Delta t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}\Delta t\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Buradan da istenilen sonuç elde edilir.

(iii) (3.54) eşitsizliğini elde etmek için (3.53) eşitsizliği kullanılır.

$$\frac{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{(m+r)(p-1)}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{(m+r-1)p}} = \left[\frac{\overline{A}^{\sigma}(t)}{\overline{A}(t)}\right]^{(m+r)(p-1)} \frac{1}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \leq \frac{J^{(m+r)(p-1)}}{\left[\overline{A}(t)(t)\right]^{m+r-p}}$$

eşitsizliği (3.53) eşitsizliğinde yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

(iv) (3.55) eşitsizliğini elde etmek için (3.52) eşitsizliği ve J sabiti aşağıdaki gibi kullanılır.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}}\Delta t$$

$$\leq J^{m+r-1}\frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r-1}}\Delta t.$$

Şimdi aşağıdaki C ve D fonksiyonları tanımlansın.

$$C(t) = \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[B^{\sigma}(t)]^{\frac{m}{p}}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{\frac{m+r-p}{p}}} \; ve \; D(t) = \left[\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$p > 1$ ve $\frac{p}{p-1} > 1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'da delta integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.3) kullanılarak istenilen sonuca ulaşılır.

(v) Eşitsizlik (3.56)'nın sol tarafına Teorem 1.1.7'de delta integral için verilen (1.1) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\Delta}(t) = \frac{w(t)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \; ve \; v(t) = [B(t)]^{m+p}$$

fonksiyonları için uygulandıktan sonra eşitsizlik (3.56) şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} = u(t)B^{m+p}(t)|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} -u(t)[B^{m+p}(t)]^{\Delta}\Delta t.$$

Yukarıda u^{Δ}'nin nasıl verildiği göz önüne alındığında

$$u(t) = -\int_t^{\infty} \frac{w(s)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\Delta s$$

olduğu bulunur. Ayrıca $B(a) = 0$ ve $u(\infty) = 0$ ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u(t)[B^{m+p}(t)]^{\Delta}\Delta t. \tag{3.62}$$

Daha sonra (i)'in ispatındaki yöntem takip edilerek

$$-\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\Delta} = -\int_0^1 \frac{(1-m-r)\overline{A}^{\Delta}(t)dh}{\left[\overline{A}(t)+h\mu(t)\overline{A}^{\Delta}(t)\right]^{m+r}}$$

$$= (m+r-1)\int_0^1 \frac{w(t)}{\left[(1-h)\overline{A}(t)+h\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}dh$$

$$\geq (m+r-1)\frac{w(t)}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}$$

$$\geq (m+r-1)\quad \frac{w(t)}{J^{m+r}\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik de

$$\frac{w(t)}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq -J^{m+r}\frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\Delta}}{m+r-1}$$

anlamına gelir. Ayrıca

$$-u(t) = \int_t^{\infty} \frac{w(s)\Delta s}{\left[\overline{A}(s)\right]^{m+r}} \leq \int_t^{\infty} -J^{m+r}\frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(s)\right]^{\Delta}}{m+r-1}\Delta s$$

$$= J^{m+r}\frac{-\overline{A}^{1-m-r}(\infty)+\left[\overline{A}(t)\right]^{1-m-r}}{m+r-1} \leq J^{m+r}\frac{\left[\overline{A}(t)\right]^{1-m-r}}{m+r-1} \tag{3.63}$$

bulunur. (3.59) ve (3.63) eşitsizlikleri (3.62)'de yerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

(vi) (3.57) eşitsizliğini elde etmek için (3.56) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral,

$$C(t) = \frac{w^{\frac{1}{p}}(t)f(t)[B^{\sigma}(t)]^{\frac{m}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{\frac{m+r-p}{p}}} \; ve \; D(t) = \left[\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

fonksiyonları ile

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B(t)]^{m+p-1}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-1}}\Delta t = \int_a^{\infty} C(t)D(t)\Delta t$$

şeklinde yazılır. O zaman (3.56) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq J^{m+r}\frac{m+p}{m+r-1}\int_a^{\infty} C(t)D(t)\Delta t. \tag{3.64}$$

$p > 1$ ve $\frac{p}{p-1} > 1$ indisleri ve C ve D fonksiyonları için Teorem 1.1.9'daki Hölder eşitsizliği kullanılarak, (3.64) eşitsizliğinin son terimi için şu tahmine ulaşılır:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}$$

$$\leq J^{m+r}\ \frac{m+p}{m+r-1}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}\Delta t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\Delta t\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

bu da bize istenilen sonucu verir.

4. $0 < p < 1$ İÇİN DİNAMİK HARDY-COPSON EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümün amacı üçüncü bölümde $p > 1$ için gösterilen dinamik Hardy-Copson eşitsizliklerini $0 < p < 1$ aralığına genişletmektir. Elde edilen sonuçlar sadece genel zaman skalalarında yeni olmakla kalmayıp, aynı zamanda $0 < p < 1$ durumunun şimdiye kadar dikkate alınmadığı sürekli ve ayrık durumlarındaki literatürde olmayan sonuçları da birleştirmektedir. Ayrıca, bu yeni eşitsizlikler, ilgili yarı lineer dinamik denklemlerin salınımsızlığı için gerek ve yeter koşulları bulmak amacıyla kullanılacaktır. Bunun için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesindeki sonuçlar gösterilecektir.

4.1 Nabla Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri

Bu bölümde ikinci bölümde $p > 1$ için verilen ayrık ve sürekli Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin $0 < p < 1$ durumununda nabla zaman skalasındaki birleşimi verilecek ve üçüncü bölümdeki nabla Hardy-Copson eşitsizlikleri $0 < p < 1$ aralığına genişletilecektir. Bunun için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesindeki sonuçlar gösterilecektir.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ olsun. $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında negatif olmayan, ld-sürekli, ∇ −diferansiyellenebilir ve yerel olarak nabla integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları ile $A, \overline{A}, B, \overline{B}$ fonksiyonları (3.1)'deki gibi tanımlansın.

$0 < p < 1$, $m \geq 0$, $m + r \leq 0$ için kanıtlanmış olan aşağıdaki teorem $p > 1$, $m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının genelleştirilmelerini sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikler şu şekilde listelenmiştir:

a) Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.7) ayrık eşitsizliği

b) Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik

c) Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) tarafından elde edilen delta eşitsizliği

d) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Teorem 3.1.4. de gösterilen nabla eşitsizliği

Teorem 4.1.1. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan A fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{A(t)}{A^{\rho}(t)} \geq L_1$$

olacak şekilde $L_1 > 0$ olsun. $0 < p < 1$, $m \geq 0$, $m + r \leq 0$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{{L_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t, \tag{4.2}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{{L_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t. \tag{4.3}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{{L_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t, \tag{4.4}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t. \tag{4.5}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Teorem 3.1.4'ün ispatında kullanılan aynı yöntem bu teoremin ispatı için de kullanılacaktır. Fakat Teorem 1.1.9 daki Hölder eşitsizliği, ilgili integrallere uygulanırken $\frac{1}{p}$ ve $\frac{1}{1-p}$ sabitleri kullanılacaktır. İspat, Teorem 3.1.4'ün ispatına çok benzediği için sadece farklı durum getiren (4.4) eşitsizliğinin ispatı verilecektir.

Teorem 1.1.8'de nabla integral için verilen (1.2) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\nabla}(t) = \frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \; ve \; v^{\rho}(t) = [B^{\rho}(t)]^{m+P}$$

fonksiyonları için kullanılıp

$$B(a) = 0 \; ve \; u(t) = -\int_t^{\infty} \frac{w(s)}{[A^{\rho}(s)]^{m+r}}\nabla s$$

dikkate alındığında, (4.4) eşitsizliğinin sol tarafı şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u(t)[B^{m+P}(t)]^{\nabla}\nabla t. \tag{4.6}$$

$0 < m + p < 1\ ve\ \rho(t) \le d \le t$ için Teorem 1.1.6 (a)'da nabla türev için verilen Zincir Kuralı şunu ifade eder:

$$[B^{m+P}(t)]^{\nabla} = (m+p)w(t)f(t)B^{m+P-1}(d)$$
$$\le (m+p)w(t)f(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-1}. \qquad (4.7)$$

Benzer şekilde $m + r \le 0$ için Teorem 1.1.6 (b)'de nabla türev için verilen Zincir Kuralı şunu ifade eder:

$$[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla} = \int_0^1 \frac{-(1-m-r)w(t)dh}{[hA(t)+(1-h)A^{\rho}(t)]^{m+r}} \le -(1-m-r)\frac{w(t)}{[A(t)]^{m+r}}$$

ki bu da şu anlama gelir:

$$\frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}{L_1}^{m+r}} \le \frac{w(t)}{[A(t)]^{m+r}} \le \frac{-[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla}}{1-m-r}.$$

Buradan da aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$-u(t) = \int_t^{\infty} \frac{w(s)}{[A^{\rho}(s)]^{m+r}}\nabla s \le {L_1}^{m+r}\int_t^{\infty}\frac{-[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla}}{1-m-r}\nabla s \le {L_1}^{m+r}\frac{[A(t)]^{1-m-r}}{1-m-r}$$
$$\le {L_1}^{m+r}\frac{[A^{\rho}(t)]^{1-m-r}}{1-m-r}. \qquad (4.8)$$

(4.7) ve (4.8) eşitsizliklerini (4.6) denkleminde yerine yazarsak

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \le \frac{{L_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-1}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-1}} \qquad (4.9)$$

elde edilir.

Bu ispat ile Teorem 3.1.4'ün ispatı arasındaki fark bu adımdan sonra ortaya çıkar. Teorem 1.1.9'da nabla integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.4), (4.9) eşitsizliğinin sağ tarafına $\frac{1}{p}$ ve $\frac{1}{1-p}$ sabitleri kullanılarak uygulanırsa

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-1}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-1}}$$

$$= \int_a^{\infty} \left[\frac{w^{\rho}(t)f(t)[B^{\rho}(t)]^{p^2+p-1}}{[A^{\rho}(t)]^{mp+rp-1}}\right]\left[\frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}\right]^{1-p} \nabla t$$

$$\leq \left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}[B^{\rho}(t)]^{p+1-\frac{1}{p}}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\right]^{p} \left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{p+1-\frac{1}{p}}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\right]^{1-p}$$

bulunur. Buradan ve (4.9) eşitsizliğinden

$$\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}\right]^{p} \leq \frac{{L_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}[B^{\rho}(t)]^{p+1-\frac{1}{p}}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\right]^{p} \qquad (4.10)$$

sonucu çıkar.

(4.10) eşitsizliğinin her iki tarafının $0 < p < 1$ kuvveti alınarak (4.4) sonucu elde edilir. (4.2), (4.3) ve (4.5) eşitsizliklerinin ispatları, yukarıdaki ispat ile aynı yöntem izlenerek elde edilebilir.

Sonuç 4.1.1. $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ için elde edilen (3.1)-(3.2) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 3.1.4'te $p > 1,\ m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu Teorem 3.1.da otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ ise literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0\ ve\ 0 < m + p < 1$ için ilk kez elde edilen (4.4)-(4.5) nabla eşitsizlikleri, mevcut literatürde yenilikler sunmaktadır.

Sonuç 4.1.2. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucunu verir ve (4.2)–(4.5) eşitsizliklerinde $L_1 = 1$ olur. Bu nedenle, otomatik olarak sağlanan $0 < m + p$ koşulu için, (4.2)–(4.5) eşitsizlikleri çakışır ve onların delta versiyonları da tamamen aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizliklerle birlikte, $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ için eşitsizlik (4.2) aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}dt}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}dt.$$

Burada A, B fonksiyonları (3.49) eşitliğinde tanımlandığı gibidir.

Sürekli durum için, $p > 1,\ m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ iken, ilk Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (3.49) de tanımlanan A ve B fonksiyonları için (Saker vd., 2018a) makalesindeki Sonuç 2.2 ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki Not 3.22'de kurulmuştur. Bu eşitsizlikler, yukarıdaki yeni sürekli Hardy–Copson tipi eşitsizlikler sayesinde $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ durumlarına genişletilmiştir.

Sonuç 4.1.3. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir. A, B serileri (3.50) eşitliğindeki gibi olduğunda

$$\int_t^{\infty} w(s)\nabla s = \sum_{k=t+1}^{\infty} w(k)$$

kullanılarak,

$$\overline{A}^{\rho}(t) = A(t-1) = \sum_{k=t}^{\infty} w(k)$$

elde edilir.

$$\frac{A(t)}{A(t-1)} \geq L_1$$

olacak şekilde $L_1 > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $a = 0, 0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve$ $m + r \leq 0$ için, doğal sayılar kümesinde, (4.2)-(4.5) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir ve bunlardan ikisi sırasıyla (4.2) ve (4.5)'ten elde edilenler aşağıdaki gibi yazılabilir. $m + p > 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}} [B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t-1)]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

ve $0 < m + p < 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t-1)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left[\frac{L^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}} [B(t-1)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

eşitsizlikleri bulunur.

Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından $p > 1,\ m = 0\ ve\ 0 \leq r < 1$ için elde edilen (2.7) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik ve Sonuç 3.1.17'de $p > 1, m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için elde edilenler, Teorem 4.1.1 ve özellikle bu sonuç ile $0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve\ m + r \leq 0$ durumlarına genişletilmektedir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ koşulu Bennett (1987) makalesindeki Sonuç 5'de, Leindler (1993) makalesindeki Önerme 3'de ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki Not 3.23'de otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0<m+p<1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0<p<1$, $m\geq 0 \ ve \quad m+r\leq 0 \ ve \ m+r<1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, bu sonuç sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır. □

$0<p<1, \quad m\geq 0, \ 0\leq m+r<1$ için kanıtlanmış olan aşağıdaki teorem $p>1, \ m\geq 0$ ve $0\leq m+r<1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının genelleştirilmelerini sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikler şu şekilde listelenmiştir:

a) Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.7) ayrık eşitsizliği

b) Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik

c) Saker ve arkadaşları tarafından elde edilen delta eşitsizliği (Saker vd., 2018a)

d) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Teorem 3.1.4. de gösterilen nabla eşitsizliği

Teorem 4.1.2. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan A fonksiyonu ve $t\in(a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1\geq\frac{A(t)}{A^{\rho}(t)}\geq\frac{1}{L_2}$$

olacak şekilde $L_2>0$ olsun. $0<p<1, \ m\geq 0, 0\leq m+r<1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m+p>1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}}\leq\left(\frac{L_2(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t, \tag{4.12}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}}\leq\left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t. \tag{4.13}$$

2. Eğer $0<m+p<1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{{L_2}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t \tag{4.14}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t. \tag{4.15}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Kayar ve Kaymakçalan (2021) makalesindeki Teorem 3.19'un ve Teorem 4.1.1'in ispatlarında kullanılan ispat yöntemi, ilgili integrallere $\frac{1}{p}$ ve $\frac{1}{1-p}$ sabitleri ile uygulanan Hölder eşitsizliği ile bu teorem için de kullanılabilir.

Sonuç 4.1.4. $0 < p < 1$, $m \geq 0$, ve $m + r < 1$ için elde edilen (4.12)-(4.13) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 3.1.4'de verilen $p > 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu Teorem 3.1.4'de otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen nabla eşitsizlikleri (4.14)–(4.15) mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Sonuç 4.1.5. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucunu verir ve (4.12)–(4.15) eşitsizliklerinde $L_2 = 1$ olur. Bu nedenle, otomatik olarak sağlanan $0 < m + p$ koşulu için (4.12)–(4.15) eşitsizlikleri çakışır ve onların delta versiyonları da tamamen aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizliklerle birlikte, $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ için eşitsizlik (4.12) aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}dt}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}dt.$$

Burada A ve B fonksiyonları (3.49) eşitliğinde tanımlandıkları gibidir.

Sürekli durum için, $p > 1,\ m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ iken, ilk Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (3.49) da tanımlanan A ve B fonksiyonları için (Saker vd., 2018a) makalesindeki Sonuç 2.2 ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki Not 3.22'de

kurulmuştur. Bu eşitsizlikler, yukarıdaki yeni sürekli Hardy–Copson tipi eşitsizlikler sayesinde $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Sonuç 4.1.6. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise yani $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir. Ayrıca

$$1 \leq \frac{A(t-1)}{A(t)} \leq L_2$$

olacak şekilde $L_2 > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $a = 0, 0 \leq p < 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için doğal sayılar kümesinde (4.12)-(4.15) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir. (4.13) ve (4.14)'den elde edilen ikisi sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir. $m + p > 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}} [B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t-1)]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

ve $0 < m + p < 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t-1)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_2}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}} [B(t-1)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}.$$

Burada A ve B serileri (3.50) eşitliğinde tanımlandıkları gibidir.

Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından $p > 1,\ m = 0\ ve\ 0 \leq r < 1$ için elde edilen (2.7) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik ve Sonuç 3.1.17'de $p > 1, m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için elde edilenler, Teorem 4.1.2 ve özellikle bu sonuç ile $0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ durumlarına genişletilmektedir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu Bennett (1987) makalesindeki Sonuç 5'de, Leindler (1993) makalesindeki Önerme 3'de ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki Not 3.23'de otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1\ ve\ m + r < 1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, bu sonuç sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır. □

$0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve\ m + r \leq 0$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem, $p > 1,\ m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi

eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikler şu şekilde listelenmiştir:

a) Copson (1928) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.6) ve Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.8)

b) Hardy ve diğerleri (Hardy vd., 1934) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.3) ve Copson (1976) ve (Pachpatte, 1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.13) ve (Pečarić ve Hanjš, 1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.15)

c) Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) tarafından elde edilen delta eşitsizliği

d) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen (3.33)-(3.34) nabla eşitsizlikleri

Teorem 4.1.3. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$ fonksiyonu ve $t\in(a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{\overline{A}^{\rho}(t)}{\overline{A}(t)} \geq L_3$$

olacak şekilde $L_3 > 0$ olsun. $0 < p < 1,\ m \geq 0, m + r \leq 0$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_3}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t, \tag{4.16}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_3}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t. \tag{4.17}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_3}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t, \tag{4.18}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}\nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t. \tag{4.19}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Teorem 3.1.3'ün ispatında kullanılan aynı yöntem bu teoremin ispatı için de kullanılacaktır. Fakat Teorem 1.1.9 daki Hölder eşitsizliği $\frac{1}{p}$ ve $\frac{1}{1-p}$ sabitleri için ilgili integrallere uygulanacaktır. İspat, Teorem 3.1.3'ün ispatına çok benzediği için sadece farklı durum getiren (4.17) eşitsizliğinin ispatı verilecektir.

Teorem 1.1.8'de nabla integral için verilen (1.2) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\nabla}(t) = \frac{w(t)}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \; ve \; v^{\rho}(t) = \left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+P}$$

fonksiyonları için kullanılıp

$$\overline{B}(\infty) = 0 \; ve \; u(t) = \int_a^t \frac{w(s)}{\left[\overline{A}^{\rho}(s)\right]^{m+r}} \nabla s$$

dikkate alındığında, (4.17) eşitsizliğinin sol tarafı şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t = \int_a^{\infty} -u(t)\left[\overline{B}^{m+P}(t)\right]^{\nabla} \nabla t. \tag{4.20}$$

$m + p > 1 \; ve \; \rho(t) \leq d \leq t$ için Teorem 1.1.6 (b)'de nabla türev için verilen Zincir Kuralı şunu ifade eder:

$$\left[\overline{B}^{m+P}(t)\right]^{\nabla} = \int_0^1 (m+p)w(t)f(t)\left[h\overline{B}(t) + (1-h)\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-1} dh$$

$$\leq (m+p)w(t)f(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-1}. \tag{4.21}$$

Benzer şekilde $m + r \leq 0$ için Teorem 1.1.6 (b)'de nabla türev için verilen Zincir Kuralı şunu ifade eder:

$$\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\nabla} = \int_0^1 \frac{(1-m-r)w(t)dh}{\left[h\overline{A}(t) + (1-h)\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \geq (1-m-r)\frac{w(t)}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}.$$

Bu da şu anlama gelir:

$$\frac{w(t)}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(t)\right]^{\nabla}}{1-m-r}.$$

Buradan da aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$u(t) = \int_a^t \frac{w(s)}{\left[\overline{A}^{\rho}(s)\right]^{m+r}} \nabla s \leq \int_a^t \frac{\left[\overline{A}^{1-m-r}(s)\right]^{\nabla}}{1-m-r} \nabla s \leq \frac{\left[\overline{A}(t)\right]^{1-m-r}}{1-m-r}$$

$$\leq {L_3}^{m+r} \frac{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{1-m-r}}{1-m-r}. \tag{4.22}$$

(4.21) ve (4.22) eşitsizliklerini (4.20) denkleminde yerine yazarsak:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p} \nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \leq \frac{{L_3}^{m+r}(m+p)}{1-m-r} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-1} \nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-1}} \tag{4.23}$$

elde edilir.

Bu ispat ile Teorem 3.1.3'ün ispatı arasındaki fark bu adımdan sonra ortaya çıkar. Teorem 1.1.9'da nabla integral için verilen Hölder eşitsizliği (1.4), (4.23) eşitsizliğinin sağ tarafına $\frac{1}{p}$ ve $\frac{1}{1-p}$ sabitleri kullanılarak uygulanırsa

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-1} \nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-1}}$$

$$= \int_a^{\infty} \left[\frac{w^{\rho}(t)f(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{p^2+p-1}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{mp+rp-1}}\right] \left[\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}\right]^{1-p} \nabla t$$

$$\leq \left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{p+1-\frac{1}{p}} \nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\right]^{p} \left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{p+1-\frac{1}{p}} \nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\right]^{1-p}$$

bulunur. Buradan ve (4.23) eşitsizliğinden

$$\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p} \nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}\right]^{p} \leq \frac{{L_3}^{m+r}(m+p)}{1-m-r} \left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{p+1-\frac{1}{p}} \nabla t}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\right]^{p} \tag{4.24}$$

sonucu çıkar.

(4.24) eşitsizliğinin her iki tarafının $0 < p < 1$ kuvveti alınarak (4.17) sonucu elde edilir. (4.16), (4.18) ve (4.19) eşitsizliklerinin ispatları, yukarıdaki ispat ile aynı

yöntem izlenerek elde edilebilir.

▢

Sonuç 4.1.7. $0 < p < 1,\ m \geq 0,$ ve $m + r \leq 0$ için elde edilen (4.16)-(4.17) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri, Teorem 3.1.3'de verilen $p > 1, m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için (3.35) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliğin tamamlayıcılarıdır. Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki Teorem 3.13'te ya da Teorem 3.1.3'de otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,$ $m \geq 0,\ m + r \leq 0\ ve\ 0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (4.18)–(4.19) nabla eşitsizlikleri mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Sonuç 4.1.8. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucunu verir ve (4.16)–(4.19) eşitsizliklerinde $L_3 = 1$ olur. Bu nedenle, otomatik olarak sağlanan $0 < m + p$ koşulu için, (4.16)–(4.19) eşitsizlikleri çakışır ve onların delta versiyonları da tamamen aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizliklerle birlikte, $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ için eşitsizlik (4.16) aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p} dt}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} dt. \tag{4.25}$$

Burada $\overline{A}$ ve $\overline{B}$ fonksiyonları (3.40) denklemlerinde tanımlandıkları gibidir.

Eşitsizlik (4.25) yeni bir sonuçtur ve $p > 1, m = 0$ ve $r < 1$ için (Hardy vd., 1934) makalesindeki Teorem 330'de elde edilen sürekli eşitsizliği yani eşitsizlik (2.3)'ü ve (Copson, 1976) makalesindeki Teorem 3'de ve (Pachpatte, 1999) makalesindeki Teorem 1'de elde edilen sürekli eşitsizliği yani eşitsizlik (2.13)'ü, $0 < p < 1,\ m \geq 0,$ $m + r \leq 0$ durumlarına genelleştirmektedir. Ayrıca, $p > 1,\ m \geq 0$ ve $m + r < 1$ için (Pečarić ve Hanjš, 1999) makalesindeki Teorem 3'deki (9) eşitsizliği olarak elde edilen sürekli eşitsizliği yani (2.15) eşitsizliğini de, $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ durumlarına genişletmektedir.

Sonuç 4.1.9. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir.

$$\int_{t}^{\infty} w(s)\nabla s = \sum_{k=t+1}^{\infty} w(k)$$

olduğu kullanıırsa $\overline{A}, \overline{B}$ serileri (3.41) denklemlerinde tanımlandıkları gibi olur ve

$$\overline{A}^{\rho}(t) = \overline{A}(t-1) = \sum_{k=a}^{t} w(k)$$

elde edilir.

$$\frac{\overline{A}(t-1)}{\overline{A}(t)} \geq L_3$$

olacak şekilde $L_3 > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $a = 0,\ 0 < p < 1,\ \ m \geq 0\ ve$ $m + r \leq 0$ için, doğal sayılar kümesinde, (4.16)-(4.19) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir ve bunlardan ikisi (4.16) ve (4.19)'dan elde edildiğinde sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir. $m + p > 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_3}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

ve $0 < m + p < 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

elde edilir.

$p > 1,\ m = 0\ ve\ 0 \leq r < 1$ için (Copson, 1928), (Bennett, 1987) ve (Leindler, 1993) tarafından elde edilen (2.8) ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlik ve Sonuç 3.1.13'de $p > 1, m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) tarafından elde edilen ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 4.1.3 ve özellikle bu sonuç sayesinde $0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve\ m + r \leq 0$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Copson, 1928), (Bennett, 1987), (Leindler, 1993) ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) çalışmalarında otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, bu not sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır. ▢

$0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem, $p > 1,\ m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikler şu şekilde listelenmiştir:

a) Copson (1928) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.6) ve Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.8)

b) Hardy ve diğerleri (Hardy vd., 1934) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.3) ve Copson (1976) ve (Pachpatte, 1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.13) ve (Pečarić J., Hanjš, 1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.15)

c) Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) tarafından elde edilen delta eşitsizliği

d) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen (3.33)-(3.34) nabla eşitsizlikleri

Teorem 4.1.4. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$ fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1 \geq \frac{\overline{A}^{\rho}(t)}{\overline{A}(t)} \geq \frac{1}{L_4}$$

olacak şekilde $L_4 > 0$ olsun. $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{{L_4}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t, \tag{4.27}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t. \tag{4.28}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{{L_4}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t, \tag{4.29}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t.$$

(4.30)

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki Teorem 3.13'ün ve Teorem 3.1.3'ün ispatlarında kullanılan ispat yöntemi, ilgili integrallere $\frac{1}{p}$ ve $\frac{1}{1-p}$ sabitleri ile uygulanan Hölder eşitsizliği ile bu teorem için de kullanılabilir. □

Sonuç 4.1.10. $0 < p < 1,\ \ m \geq 0$, ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen (4.27)-(4.28) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki Teorem 3.13'de verilen $p > 1, m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Kayar ve Kaymakçalan, 2021), Teorem 3.13'de otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1\ \ ve\ 0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen nabla eşitsizlikleri (4.29)–(4.30), mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Sonuç 4.1.11. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucunu verir ve (4.27)–(4.30) eşitsizliklerinde $L_4 = 1$ olur. Bu nedenle, otomatik olarak sağlanan $0 < m + p$ koşulu için, (4.27)–(4.30) eşitsizlikleri çakışır ve onların delta versiyonları da tamamen aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizliklerle birlikte, $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ için eşitsizlik (4.27) aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p} dt}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} dt. \tag{4.31}$$

Burada $\overline{A}$ ve $\overline{B}$ fonksiyonları (3.40) da tanımlandıkları gibidir.

Eşitsizlik (4.31) yeni bir sonuçtur ve $p > 1, m = 0$ ve $r < 1$ için (Hardy vd., 1934) makalesindeki Teorem 330'de elde edilen sürekli eşitsizliği yani eşitsizlik (2.3)'ü ve (Copson, 1976) makalesindeki Teorem 3'de ve (Pachpatte, 1999) makalesindeki Teorem 1'de elde edilen sürekli eşitsizliği yani eşitsizlik (2.13)'ü, $0 < p < 1,\ m \geq 0,$ $0 \leq m + r < 1$ durumlarına genelleştirmektedir. Ayrıca, $p > 1,\ m \geq 0$ ve $m + r < 1$ için (Pečarić ve Hanjš, 1999) makalesindeki Teorem 3'deki (9) eşitsizliği olarak elde

edilen sürekli eşitsizliği yani (2.15) eşitsizliğini de, $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ durumlarına genişletmektedir.

Sonuç 4.1.12. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir.

$$\int_{t}^{\infty} w(s)\nabla s = \sum_{k=t+1}^{\infty} w(k)$$

olduğu kullanıırsa $\overline{A}, \overline{B}$ serileri (3.41) denklemlerinde tanımlandıkları gibi olur ve

$$\overline{A}^{\rho}(t) = \overline{A}(t-1) = \sum_{k=a}^{t} w(k)$$

elde edilir.

$$1 \geq \frac{\overline{A}(t-1)}{\overline{A}(t)} \geq \frac{1}{L_4}$$

olacak şekilde $L_{L_4} > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $a = 0,\ 0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve$ $0 \leq m + r < 1$ için, doğal sayılar kümesinde, (4.27)-(4.30) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir ve bunlardan ikisi (4.28) ve (4.29)'dan elde edildiğinde sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir. $m + p > 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

ve $0 < m + p < 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_4}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}.$$

$p > 1,\ m = 0\ ve\ 0 \leq r < 1$ için (Copson, 1928), (Bennett, 1987) ve (Leindler, 1993) tarafından elde edilen (2.8) ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlik ve Sonuç 3.1.13'de $p > 1, m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) tarafından elde edilen ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 4.1.4 ve özellikle bu sonuç sayesinde $0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ koşulu (Copson, 1928), (Bennett, 1987), (Leindler, 1993) ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) çalışmalarında otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0<m+p<1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0<p<1,\ m\geq 0,\ m+r\leq 0$ ve $0<m+p<1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, bu not sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır. ▢

$0<p<1,\ m\geq 0\ ve\ m+r>1$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem, $p>1,\ m\geq 0\ ve\ m+r>1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikler aşağıdaki gibi listelenmiştir:

a) Hardy (1920) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.1), Copson (1928), Bennett. (1987) ve Leindler (1993) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.5) ve (2.10)

b) Hardy (1925) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.2), Hardy ve diğerleri (Hardy vd., 1934) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.3), Copson (1976) ve Pachpatte (1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.12) ve Pečarić ve Hanjš (1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.14)

c) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Teorem 3.2.4'teki delta eşitsizlikleri

d) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Teorem 3.1.1'deki nabla eşitsizlikleri

Teorem 4.1.5. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$ ve B fonksiyonlarını ve Teorem 4.1.4'te tanımlanan $L_4>0$ sayısını ele alalım. $0<p<1,\ m\geq 0,\ 0\leq m+r>1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m+p>1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\leq\left[\frac{{L_4}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t, \tag{4.32}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\leq\left[\frac{{L_4}^{m+r-1}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\nabla t. \tag{4.33}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{{L_4}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t, \tag{4.34}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t. \tag{4.35}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki Teorem 3.1'in, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.3'ün ispatlarında kullanılan ispat yöntemi, ilgili integrallere $\frac{1}{p}$ ve $\frac{1}{1-p}$ sabitleri kullanılarak uygulanan Hölder eşitsizliği ile bu teorem için de kullanılabilir. □

Sonuç 4.1.13. $0 < p < 1$, $m \geq 0$, ve $m + r > 1$ için elde edilen (4.32)-(4.33) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri, Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından Teorem 3.1.1'de verilen ve $p > 1, m \geq 0$ ve $m + r > 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu Teorem 3.1.1'de otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1$, $m \geq 0$, $m + r > 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen nabla eşitsizlikleri (4.32)–(4.35), mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Sonuç 4.1.14. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucunu verir ve (4.32)–(4.35) eşitsizliklerinde $L_4 = 1$ olur. Bu nedenle, otomatik olarak sağlanan $0 < m + p$ koşulu için, (4.32)–(4.35) eşitsizlikleri çakışır ve onların delta versiyonları da tamamen aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizliklerle birlikte, $0 < p < 1$, $m \geq 0$, $m + r > 1$ için eşitsizlik (4.32) aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p} dt}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} dt. \tag{4.36}$$

Burada $\overline{A}$ ve B fonksiyonları (3.49) ve (3.40) denklemlerinde tanımlandıkları gibidir.

Eşitsizlik (4.31) yeni bir sonuçtur ve $p>1, m=0$ ve $r>1$ için (Hardy vd., 1934) makalesindeki Teorem 330'de elde edilen sürekli eşitsizliği yani eşitsizlik (2.3)'ü ve (Copson, 1976) makalesindeki Teorem 1'de ve (Pachpatte, 1999) makalesindeki Teorem 1'de elde edilen sürekli eşitsizliği yani eşitsizlik (2.12)'yi, $0<p<1,\ m\geq 0,$ $m+r>1$ durumlarına genelleştirmektedir. Ayrıca, $p>1,\ m\geq 0$ ve $m+r>1$ için (Pečarić ve Hanjš, 1999) makalesindeki Teorem 1'deki (3) eşitsizliği olarak elde edilen sürekli eşitsizliği yani (2.14) eşitsizliğini de, $0<p<1,\ m\geq 0,\ m+r>1$ durumlarına genişletmektedir.

Sonuç 4.1.15. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise yani $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ ise tüm $t\in\mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t)=t-1$ sonucunu verir. L_4 sabitinin de Sonuç 4.1.12'deki gibi tanımlandığını varsayalım. Doğal sayılar kümesinde $a=0, 0<p<1,$ $m\geq 0,$ ve $m+r>1$ için, (4.32)-(4.35) eşitsizlikleri, yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir ve (4.32) ve (4.35)'ten elde edilen eşitsizlikler, sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir. $m+p>1$ için,

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r}}\leq\left[\frac{{L_4}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

ve $0<m+p<1$ için,

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)[B(t-1)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\leq\left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t-1)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

elde edilir. Burada $\overline{A}$ ve B serileri (3.50) ve (3.41) denklemlerinde tanımlandıkları gibidir.

$p>1, m=0,$ ve $r>1$ için Hardy (1920) tarafından elde edilen (2.1) ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizliği, Copson (1928), Bennett (1987) ve Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.5) ve (2.7) ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlikleri ve $p>1, m\geq 0,$ ve $m+r>1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafındanelde edilen Sonuç 3.1.4'de gösterilenler, Teorem 4.1.5 ve özellikle bu sonuç sayesinde $0<p<1,$ $m\geq 0,$ ve $m+r>1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ koşulu Hardy (1920), Copson (1928), Bennett (1987), Leindler (1993) ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) 'de otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0<m+p<1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0<p<1,\ m\geq 0, m+r>1\ ve\ 0<m+p<1$ koşulları için elde

edilen ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, bu not sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

▢

$0 < p < 1,\ m \geq 0, \text{ve } m + r > 1$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem, $p > 1,\ m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikler aşağıdaki gibi listelenmiştir:

a) Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.9)

b) Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik

c) Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) tarafından elde edilen delta eşitsizliği

d) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından Teorem 3.1.2 elde edilen nabla eşitsizlikleri

Teorem 4.1.6. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan A ve $\overline{B}$ fonksiyonlarını ve Teorem 4.1.2'de tanımlanan $L_2 > 0$ sayısını ele alalım. $0 < p < 1,\ m \geq 0, m + r > 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{{L_2}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t, \tag{4.37}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{{L_2}^{m+r-1}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t. \tag{4.38}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{{L_2}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t, \tag{4.39}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}} \nabla t.$$

(4.40)

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.3 ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesindeki Teorem 3.8'in ispatlarında kullanılan ispat yöntemi, ilgili integrallere $\frac{1}{p}$ ve $\frac{1}{1-p}$ sabitleri kullanılarak uygulanan Hölder eşitsizliği ile bu teorem için de kullanılabilir.

Sonuç 4.1.16. $0 < p < 1,\ m \geq 0$, ve $m + r > 1$ için elde edilen (4.37)-(4.38) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri, Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından Teorem 3.1.2'de verilen ve $p > 1, m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu Teorem 3.1.2'de otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r > 1\ ve\ 0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen nabla eşitsizlikleri (4.39)–(4.40), mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Sonuç 4.1.17. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise, yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise o zaman tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucunu verir ve (4.36)–(4.40) eşitsizliklerinde $L_2 = 1$ olur. Bu nedenle, otomatik olarak sağlanan $0 < m + p$ koşulu için, (4.36)–(4.40) eşitsizlikleri çakışır ve onların delta versiyonları da tamamen aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizliklerle birlikte, $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r > 1$ için eşitsizlik (4.37) aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p} dt}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{m+r-1}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}} dt. \tag{4.41}$$

Burada A ve $\overline{B}$ fonksiyonları (3.49) ve (3.40) denklemlerinde tanımlandıkları gibidir.

Sürekli durum için $p > 1,\ m \geq 0$ ve $m + r > 1$ iken, ilk Hardy–Copson tipi eşitsizlik (Saker vd., 2018a) makalesinde delta eşitsizliğinin özel hali olarak ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde nabla eşitsizliğinin özel hali olarak elde edilmiştir. Bu sonuç ve yeni sürekli Hardy–Copson tipi eşitsizlik (4.41) sayesinde bu eşitsizlikler $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r > 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Sonuç 4.1.18. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir. L_2 sabitinin de Sonuç 4.1.6'daki gibi tanımlandığını varsayalım. Doğal sayılar kümesinde $a = 0, 0 < p < 1,\ m \geq 0,$ ve

$m+r>1$ için, (4.37)-(4.40) eşitsizlikleri, yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir ve (4.37) ve (4.40)'dan elde edilenler, sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir. $m+p>1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\leq\left[\frac{{L_2}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

ve $0<m+p<1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}}\leq\left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t-1)]^{m+r-\frac{1}{p}}}$$

elde edillir. Burada A ve $\overline{B}$ serileri (3.50) ve (3.41) denklemlerinde tanımlandıkları gibidir.

Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından $p>1, m=0, r>1$ için elde edilen (2.9) ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizliği ve ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından Sonuç 3.1.8'de $p>1, m\geq 0, \text{ve } m+r>1$ için elde edilenler, Teorem 4.1.6 ve özellikle bu sonuç sayesinde $0<p<1,\ m\geq 0, \text{ve } m+r>1$ durumlarına genişletilmiştir. Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ (Bennett, 1987) veya (Leindler, 1993) ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0<m+p<1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0<p<1,\ m\geq 0, m+r>1\ ve\ 0<m+p<1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, bu sonuç sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

4.2 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri

Bu bölümün temel amacı, negatif olmayan, rd-sürekli, Δ-diferansiyellenebilir ve lokal olarak delta integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için üçüncü bölümde $p>1$ için verilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri $0<p<1$ aralığına genişletmek ve dördüncü bölümde $0<p<1$ için nabla zaman skalasında verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta karşılıklarını vermektir. Bunun için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalelerindeki sonuçlar gösterilecektir.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ olsun. $[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında negatif olmayan, rd-sürekli, $\Delta-$diferansiyellenebilir ve lokal olarak delta integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları ile $A,\overline{A},B,\overline{B}$ fonksiyonları (3.51)'deki gibi tanımlansın.

Teorem 4.2.1. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan A fonksiyonu ve $t\in(a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{A^{\sigma}(t)}{A(t)}\geq M_1$$

olacak şekilde $M_1>0$ olsun. $0<p<1,\ m\geq 0, m+r\leq 0$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m+p>1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}}\leq\left(\frac{{M_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t, \tag{4.43}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}\leq\left(\frac{{M_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.44}$$

2. Eğer $0<m+p<1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}}\leq\left(\frac{{M_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t \tag{4.45}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\Delta t}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}\leq\left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.46}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Teorem 4.1.1'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (4.2)–(4.5) eşitsizliklerinde (3.1)'de tanımlanan A^{ρ},A,B^{ρ},B fonksiyonları yerine, (3.51)'de tanımlanan $A,A^{\sigma},B,B^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_1 yerine M_1 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikleri elde edebiliriz.

Sonuç 4.2.1. $0<p<1,\ m\geq 0,\ m+r\leq 0$ için elde edilen (4.43)-(4.46) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p>1,\ m\geq 0$ ve $0\leq m+r<1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır.

Ayrıca $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.2)-(4.5) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 4.2.2. Eğer $m = 0$ ise, $p > 1, 0 \leq r < 1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (4.43)-(4.46) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $0 < p < 1,\ r \leq 0$ durumlarına genişletilmiştir. Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (4.45)-(4.46) delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikleri bu sonuç sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Teorem 4.2.2. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan A fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1 \geq \frac{A^{\sigma}(t)}{A(t)} \geq \frac{1}{M_2}$$

olacak şekilde $M_2 > 0$ olsun. $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{M_2(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t, \tag{4.47}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.48}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\Delta t}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{{M_2}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t, \tag{4.49}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.50}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Teorem 4.1.2'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (4.12)–(4.15) eşitsizliklerinde (3.1)'de tanımlanan A^{ρ}, A, B^{ρ}, B fonksiyonları yerine, (3.51)'de tanımlanan $A, A^{\sigma}, B, B^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_2 yerine M_2 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikleri elde edebiliriz.

Sonuç 4.2.3. $0 < p < 1,\ m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ için elde edilen (4.47)-(4.50) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p > 1,\ m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.12)-(4.15) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 4.2.4. Eğer $m = 0$ ise, $p > 1, 0 \leq r < 1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (4.47)-(4.50) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $0 < p < 1,\ 0 < r < 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (4.49)-(4.50) delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikleri bu sonuç sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Teorem 4.2.3. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$ fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{\overline{A}(t)}{\overline{A^{\sigma}}(t)} \geq M_3$$

olacak şekilde $M_3 > 0$ olsun. $0 < p < 1,\ m \geq 0, m + r \leq 0$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{{M_3}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t, \tag{4.51}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{{M_3}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.52}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{{M_3}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t, \tag{4.53}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}\Delta t}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.54}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Teorem 4.1.3'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (4.16)–(4.19) eşitsizliklerinde (3.1)'de tanımlanan A^{ρ}, A, B^{ρ}, B fonksiyonları yerine, (3.51)'de tanımlanan $A, A^{\sigma}, B, B^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_3 yerine M_3 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikleri elde edebiliriz.

Sonuç 4.2.5. $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ için elde edilen (4.51)-(4.54) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p > 1,\ m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.16)-(4.19) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 4.2.6. Eğer $m = 0$ ise, $p > 1, 0 \leq r < 1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (4.51)-(4.54) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $0 < p < 1,\ r \leq 0$ durumlarına genişletilmiştir. Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (4.53)-(4.54) delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikleri bu sonuç sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Teorem 4.2.4. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$ fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1 \geq \frac{\overline{A}(t)}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]} \geq \frac{1}{M_4}$$

olacak şekilde $M_4 > 0$ olsun. $0 < p < 1,\ m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{{M_4}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t, \tag{4.55}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.56}$$

2. Eğer $0 < m+p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{{M_4}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t, \tag{4.57}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.58}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Teorem 4.1.4'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (4.27)–(4.30) eşitsizliklerinde (3.1)'de tanımlanan A^{ρ}, A, B^{ρ}, B fonksiyonları yerine, (3.51)'de tanımlanan $A, A^{\sigma}, B, B^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_4 yerine M_4 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikleri elde edebiliriz.

Sonuç 4.2.5. $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m+r < 1$ için elde edilen (4.55)-(4.58) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p > 1,\ m \geq 0$ ve $0 \leq m+r < 1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $0 < p < 1,\ m \geq 0, 0 \leq m+r < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.27)–(4.30) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 4.2.6. Eğer $m = 0$ ise, $p > 1, 0 \leq r < 1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (4.55)-(4.58) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $0 < p < 1,\ 0 \leq r < 1$ durumlarına genişletilmiştir. Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p > 1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m+p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0, 0 \leq m+$

$r < 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (4.57)-(4.58) delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikleri bu sonuç sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Teorem 4.2.5. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$ ve B fonksiyonlarını ve Teorem 4.2.4'te tanımlanan $M_4 > 0$ sayısını ele alalım. $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r > 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{{M_4}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \Delta t, \tag{4.59}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{{M_4}^{m+r-1}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \Delta t. \tag{4.60}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{{M_4}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \Delta t, \tag{4.61}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)[B(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{\left[\overline{A^{\sigma}}(t)\right]^{m+r-\frac{1}{p}}} \Delta t. \tag{4.62}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Teorem 4.1.5'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (4.32)–(4.35) eşitsizliklerinde (3.1)'de tanımlanan A^{ρ}, A, B^{ρ}, B fonksiyonları yerine, (3.51)'de tanımlanan $A, A^{\sigma}, B, B^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_4 yerine M_4 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikleri elde edebiliriz.

Sonuç 4.2.7. $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r > 1$ için elde edilen (4.59)-(4.62) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde $p > 1$, $m \geq 0$ ve $m + r > 1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $0 < p < 1,\ m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.32)–(4.35) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 4.2.8. Eğer $m = 0$ ise, $p > 1, 0 \leq r < 1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (4.59)-(4.62) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $0 < p < 1,\ r > 1$ durumlarına genişletilmiştir. Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ ve $m + p > 1$ koşulları için elde edilen (4.61)-(4.62) delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikleri bu sonuç sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

Teorem 4.2.6. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan A ve $\overline{B}$ fonksiyonlarını ve Teorem 4.2.2'de tanımlanan $M_2 > 0$ sayısını ele alalım. $0 < p < 1,\ m \geq 0, m + r > 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{{M_2}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t, \tag{4.63}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{{M_2}^{m+r-1}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.64}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{{M_2}^{m+r}(m+p)}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t, \tag{4.65}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^{\frac{1}{p}}(t)\left[\overline{B^{\sigma}}(t)\right]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}\Delta t. \tag{4.66}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2022b)

İspat. Teorem 4.1.6'da nabla kalkülüsü ile elde edilen (4.37)–(4.40) eşitsizliklerinde (3.1)'de tanımlanan A^{ρ}, A, B^{ρ}, B fonksiyonları yerine, (3.51)'de tanımlanan $A, A^{\sigma}, B, B^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_2 yerine M_2 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikleri elde edebiliriz.

Sonuç 4.2.9. $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r > 1$ için elde edilen (4.63)-(4.66) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p > 1,\ m \geq 0$ ve $m + r > 1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $0 < p < 1,\ m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.37)–(4.40) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 4.2.10. Eğer $m = 0$ ise, $p > 1, 0 \leq r < 1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (4.63)-(4.66) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $0 < p < 1,\ r > 1$ durumlarına genişletilmiştir. Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ literatürde daha önce yer almamıştır. Bu nedenle, ilk kez $0 < p < 1,\ m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ ve $m + p > 1$ koşulları için elde edilen (4.65)-(4.66) delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikleri bu sonuç sayesinde mevcut literatüre yenilikler sunmaktadır.

4.3 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizliklerinin Uygulamaları

Bu bölüm, dördüncü bölümde elde edilen Hardy-Copson eşitsizliklerinin uygulamalarından birine ayrılmıştır. İlgili yarı lineer dinamik denklemler için salınımsızlık kriterini bulmak amacıyla, sırasıyla Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2'de sunulan (4.44) ve (4.48) delta Hardy-Copson eşitsizliklerini kullanılacaktır. Diğer delta (veya nabla) eşitsizlikleri için de benzer bir süreç izlenebilir ve benzer teoremler elde edilebilir.

Aşağıdaki ikinci dereceden yarı lineer dinamik denklemleri ele alalım.

$$[r(t)\Phi^{\Delta}(x)]^{\Delta} + c(t)\Phi(x^{\sigma}) = 0, \tag{4.67}$$

$$[R(t)\Phi^{\Delta}(y)]^{\Delta} + C(t)\Phi(y^{\sigma}) = 0. \tag{4.68}$$

Burada $a < \rho(b)$ olacak şekilde $I = [a, b]_{\mathbb{T}},\ r, c, R, C \in C_{rd}(\mathrm{I},\mathbb{R}),\ R(t), r(t) \neq 0$ ve $q > 1$ için $\Phi(x) = |x|^{q-1} sgn x$'dir. Ayrıca $\sup\mathbb{T} = \infty$ durumunda $I_a = [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ olur.

Yarı lineer dinamik denklemler ve bunların salınım özellikleri hakkında ayrıntılı bilgi için (Řehák, 2002; Agarwal vd., 2003; Řehák, 2004) kaynakları

kullanılabilir. İkinci mertebeden yarı lineer dinamik denklemlerin ve salınım teorisi kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve denklem (4.67)'nin salınım ve salınımsızlık koşullarını bulmak için birçok teknik geliştirilmiştir. Reid'in Roundabout Teoremi ve Sturm Karşılaştırma Teoremi'ne dayanan iki önemli yönteme odaklanmak için, salınım teorisinin temel tanımlarını vermemiz gerekir.

Tanım 4.3.1. Denklem (4.67)'nin x çözümü, $x(t) = 0$ ise t noktasında genelleştirilmiş bir sıfıra sahiptir. Denklem (4.67)'nin x çözümü, $r(t)x(t)x(\sigma(t)) < 0$ ise $(t, \sigma(t))$'de genelleştirilmiş bir sıfıra sahiptir. Eğer denklem (4.67)'nin I aralığında iki (veya daha fazla) genelleştirilmiş sıfıra sahip aşikar olmayan çözümü yoksa denklem (4.67) I aralığında diskonjugedir (disconjugate) (Řehák, 2005).

Tanım 4.3.2. Eğer her $d > c$ için $[c, d]$ üzerinde denklem (4.67)'nin disconjuge olduğu bir $c \in [a, \infty)$ varsa, (4.67) denklemi $[a, \infty)$ üzerinde salınımsızdır (salınımlı değildir) denir. Tersi durumda ise (4.67) denklemi ($[a, \infty)$ üzerinde) salınımlıdır denir (Řehák, 2005).

Şimdi denklem (4.67)'nin salınım teorisinde çok önemli bir araç olan varyasyonel ilkeyi sunacağız.

Teorem 4.3.1. (Reid Roundabout Teoremi) Diyelim ki

$$U = U(a) = \{\chi: \chi \in C^1_{rd}([a, \infty), \mathbb{R}): \exists\ b > a, \ni\ \mathrm{t} \notin (\mathrm{a}, \mathrm{b})\ ise\ \chi(t) = 0\}$$

kabul edilebilir fonksiyonların (admissible functions) sınıfı ve

$$\mathrm{F}(\chi) = \int_a^{\infty} \left[r(t)\left|\chi^{\Delta}(t)\right|^q - c(t)|\chi^{\sigma}(t)|^q\right]\Delta t$$

U üzerinde tanımlanmış $q-$ dereceli fonksiyonel olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

a) Her aşikar olmayan $\mathrm{x} \in U(a)$ için $F > 0$ olacak şekilde bir $\mathrm{a} \in \mathbb{T}$ vardır.

b) Denklem (4.67), $[a, \infty)$ üzerinde salınımlı değildir.

(Řehák, 2005).

Aşağıdaki ifade, iyi bilinen Sturm Karşılaştırma Teoremi'nin bir genelleştirilmesidir.

Teorem 4.3.2. (Sturm Karşılaştırma Teoremi) Varsayalım ki $t \in I^k \subseteq \mathbb{T}^k$ için $R(t) \geq r(t)$ ve $c(t) \geq C(t)$ olsun. Eğer denklem (4.67) I aralığı üzerinde ($[a, \infty)$ üzerinde) salınımsız (diskonjuge) ise, o zaman (4.68) denklemi de öyledir (Řehák, 2005).

Şimdi (4.67) yarı lineer dinamik denklemin salınımsız olması için gerek ve yeter koşulu sunmaya hazırız.

Teorem 4.3.3. A, B, w ve f fonksiyonlarının (3.51)'de tanımlandığı gibi olduğunu varsayalım. $0 < p < 1,\ m \geq 0$ ve $q > 1$ olsun. Ayrıca

$$\frac{A^{\sigma}(t)}{A(t)} \geq M_1$$

olacak şekilde $M_1 > 0$ sayısı var olsun. Bununla birlikte

$$L = \left(\frac{1-m-r}{M_1^{m+r}(m+p)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlansın.

1. Eğer $m + r \leq 0, 0 < m + p < 1$ ve $B(t) \in$ U için

$$r(t) = \frac{w^{1-q}(t) f^{\frac{1}{p}-q}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}} \ ve\ c(t) = L\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-q}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}$$

ise denklem (4.67) salınımlı değildir.

2. Eğer $0 \leq m + r < 1,\ m + p > 1$ ve $B(t) \in$ U için

$$r(t) = \frac{w^{1-q}(t) f^{\frac{1}{p}-q}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}} \ ve\ c(t) = L\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-q}}{[A(t)]^{m+r}}$$

ise denklem (4.67) salınımlı değildir.

İspat. İspat için (Řehák, 2005) makalesindeki İddia 3.7'de kullandığı teknik kullanılacaktır. a$\in \mathbb{T}$ için $a > 0$ olsun. Negatif olmayan w ve f fonksiyonları için, (3.51)'de tanımlanan B fonksiyonu $B(t) \in$ U olsun. Burada $B^{\Delta}(t) = w(t)f(t)$ olduğu açıktır.

1. Delta Hardy-Copson eşitsizliği (4.44)'den

$$\int_a^\infty \left[r(t)\left|B^\Delta(t)\right|^q - c(t)|B^\sigma(t)|^q\right]\Delta t = \int_a^\infty [r(t)[w(t)f(t)]^q - c(t)[B^\sigma(t)]^q]\Delta t$$

$$= \int_a^\infty \left[\frac{w^{1-q}(t)f^{\frac{1}{p}-q}(t)[B^\sigma(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^\sigma(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}}[w(t)f(t)]^q \right.$$

$$\left. - L\frac{w(t)[B^\sigma(t)]^{m+p-q}}{[A^\sigma(t)]^{m+r}}[B^\sigma(t)]^q\right]\Delta t$$

$$= \int_a^\infty \left[\frac{w(t)f^{\frac{1}{p}}(t)[B^\sigma(t)]^{m+p-\frac{1}{p}}}{[A^\sigma(t)]^{m+r-\frac{1}{p}}} - L\frac{w(t)[B^\sigma(t)]^{m+p}}{[A^\sigma(t)]^{m+r}}\right]\Delta t \geq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.67) denklemi Önerme 4.3.1'e göre salınımlı değildir.

2. 1'in ispatında $A^\sigma(t)$ yerine $A(t)$ konularak,

$$L = \left(\frac{1-m-r}{m+p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

alınarak ve delta Hardy-Copson eşitsizliği (4.48) kullanılarak elde edilebilir.

Teorem 4.3.4. Teorem 4.3.3'ün varsayımları geçerli olsun ve $R(t) \geq r(t)$ ve $c(t) \geq C(t)$ eşitsizlikleri I^k üzerinde sağlansın.

(i) Eğer $r(t)\ ve\ c(t)$, Teorem 4.3.3'ün (1)'inde tanımlandığı gibi ise, o zaman denklem (4.68) salınımlı değildir.

(ii) Eğer $r(t)\ ve\ c(t)$, Teorem 4.3.3'ün (2)'sinde tanımlandığı gibi ise, o zaman denklem (4.68) salınımlı değildir.

İspat. Teorem 4.3.3'ün (1)-(2) maddelerine göre (4.67) denklemi salınımlı değildir. Sturm Karşılaştırma Teoremi (Teorem 4.3.2) kullanılırsa, sırasıyla (i) ve (ii)'yi kanıtlanır.

5. $p < 0$ İÇİN DİNAMİK HARDY-COPSON EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümün amacı üçüncü bölümde $p > 1$ için ve dördüncü bölümde $0 < p < 1$ için gösterilen dinamik Hardy-Copson eşitsizliklerini $p < 0$ aralığına genişletmektir. Elde edilen sonuçlar sadece genel zaman skalalarında yeni olmakla kalmayıp, aynı zamanda $p < 0$ durumunun şimdiye kadar dikkate alınmadığı sürekli ve ayrık durumlardaki literatürde olmayan sonuçları da birleştirmektedir. Ayrıca, bu yeni eşitsizlikler, ilgili yarı lineer dinamik denklemlerin salınımsızlığı için gerek ve yeter koşulları bulmak amacıyla kullanılacaktır. Sözü edilen sonuçlar (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinden gösterilecektir.

5.1 Nabla Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri

Bu bölümde üçüncü bölümde $p > 1$ için ve dördüncü bölümde $0 < p < 1$ için verilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler $p < 0$ aralığına genişletilecektir. Bunun için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesindeki sonuçlar gösterilecektir.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ olsun. $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında negatif olmayan, ld-sürekli, ∇ −diferansiyellenebilir ve yerel olarak nabla integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için $A, \overline{A}$, $B, \overline{B}$ fonksiyonları (3.1) eşitliklerindeki gibi tanımlansın.

$p < 0$, $m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem $p > 0$, $m \geq 0$ ve $m + r < 1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri şu şekilde listelenmiştir:

a) $p > 1$ için Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.7) ayrık eşitsizliği ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.17.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.3.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler

b) $p > 1$ için Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.16.'da gösterilen sürekli eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.2.'de gösterilen sürekli eşitsizlikler

c) $p > 1$ için Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Teorem 4.2.1.'de gösterilen delta eşitsizlikleri

d) $p > 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen ve Teorem 3.1.4.'de gösterilen ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Teorem 4.1.1.'de gösterilen nabla eşitsizlikler

Teorem 5.1.1. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan A fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{A^{\rho}(t)}{A(t)} \leq L_1$$

olacak şekilde $L_1 > 0$ olsun. $p < 0,\ m \geq 0, m + r \leq 0$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B^{\rho}(t)]^m}{[A(t)]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.1}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{{L_1}^{m+r-1}(m+p)}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B^{\rho}(t)]^m}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.2}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{[A(t)]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.3}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.4}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025)

İspat. Her ne kadar Hardy-Copson tipi eşitsizlikler elde etmeye çalışsak da (Kayar vd., 2021) makalesinde sunulan nabla Bennet-Leindler tipi eşitsizlikleri içeren Teorem 3.1 ve Teorem 3.4'ün ispatında kullanılan aynı metodoloji, bu teoremin ispatı için de geçerli olacaktır. (5.1) eşitsizliğinin ispatını kısaca verelim.

(5.1) eşitsizliğinin sol tarafına Teorem 1.1.8'de nabla integral için verilen (1.2) kısmi integrasyon formülü

$$u^{\nabla}(t) = \frac{w(t)}{[A(t)]^{m+r}} \ ve \ v(t) = [B(t)]^{m+p}$$

fonksiyonları için uygulandıktan sonra (5.1) eşitsizliği şu hale gelir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} = u(t)B^{m+p}(t)|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} -u(t)[B^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t. \qquad (5.5)$$

Yukarıda u^{∇}'nin nasıl verildiği göz önüne alındığında

$$u(t) = -\int_t^{\infty} \frac{w(s)}{[A(s)]^{m+r}}\nabla s$$

olduğu bulunur. Ayrıca $B(a) = 0$ ve $u(\infty) = 0$ ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}\nabla t}{[A(t)]^{m+r}} = \int_a^{\infty} -u(t)[B^{m+p}(t)]^{\nabla}\nabla t. \qquad (5.6)$$

$B^{\nabla}(t) = f(t)w(t) \geq 0$ eşitsizliği kullanılarak $[B^{m+p}(t)]^{\nabla}$'ye Teorem 1.1.6 (a)'da nabla türev için verilen Zincir Kuralı uygulanırsa

$$[B^{m+p}(t)]^{\nabla} = (m+p)B^{m+p-1}(d)B^{\nabla}(t) = (m+p)w(t)f(t)B^{m+p-1}(d)$$

elde edilir.

$m + p > 1$ ve $t \geq d \geq \rho(t)$ için $[B(d)]^{m+p-1} \geq [B^{\rho}(t)]^{m+p-1}$ olduğu görülür ve aşağıdaki sonuç bulunur.

$$[B^{m+p}(t)]^{\nabla} \geq (m+p)w(t)f(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-1}. \qquad (5.7)$$

Ayrıca $A^{\nabla}(t) = -w(t) \leq 0$ ve $m + r \leq 0$ olduğundan, Teorem 1.1.6 (b)'de nabla türev için verilen Zincir Kuralı'na göre

$$[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-m-r)A^{\nabla}(t)dh}{[hA(t)+(1-h)A^{\rho}(t)]^{m+r}}$$

$$= \int_0^1 \frac{-(1-m-r)w(t)dh}{[hA(t)+(1-h)A^{\rho}(t)]^{m+r}}$$

$$\geq -(1-m-r)\int_0^1 \frac{w(t)}{[hA^{\rho}(t)+(1-h)A^{\rho}(t)]^{m+r}}dh$$

$$= -(1-m-r)\frac{w(t)}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \geq= -(1-m-r)\frac{w(t)}{[A(t)]^{m+r}}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi

$$\frac{w(t)}{[A(t)]^{m+r}} \geq -\frac{[A^{1-m-r}(t)]^{\nabla}}{1-m-r}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

$$-u(t) = \int_t^{\infty} \frac{w(s)\nabla s}{[A(s)]^{m+r}} \geq -\int_t^{\infty} \frac{[A^{1-m-r}(s)]^{\nabla}\nabla s}{1-m-r} = \frac{-A^{1-m-r}(\infty) + [A(t)]^{1-m-r}}{1-m-r}$$

$$= \frac{[A(t)]^{1-m-r}}{1-m-r}. \tag{5.8}$$

(5.7) ve (5.8) eşitlikleri (5.6) eşitliğinde yazılırsa

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\nabla t \geq \frac{m+p}{1-m-r}\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p-1}}{[A(t)]^{m+r-1}}\nabla t \tag{5.9}$$

elde edilir. İspatların farkı bu adımdan sonra ortaya çıkar. Teorem 1.1.10'da nabla integral için verilen Ters Hölder eşitsizliği (1.6)'yı, (5.9) eşitsizliğinin sağ tarafına sabitleri $p < 0 \; ve \; 0 < \frac{p}{p-1} < 1$ olacak şekilde uygulayarak

$$\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\nabla t\right]^{\frac{1}{p}} \geq \frac{m+p}{1-m-r}\left[\int_a^{\infty} \frac{w(t)f(t)[B^{\rho}(t)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\nabla t\right]^{\frac{1}{p}} \tag{5.10}$$

bulunur. Daha sonra (5.10) eşitsizliğinin her iki tarafının $p < 0$ kuvvetini almak bu eşitsizliğin yönünü değiştirir ve bu da istenen sonuç (5.1)'i ifade eder. (5.2)-(5.4) eşitsizliklerinin ispatları yukarıdaki ile aynı yöntem izlenerek elde edilebilir. □

Sonuç 5.1.1. $p < 0$, $m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ için elde edilen (5.1)-(5.2) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 3.1.4'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde $p > 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için verilen ve Teorem 4.1.1'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ için verilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0$, $m \geq 0, m + r \leq 0$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (5.3)–(5.4) nabla eşitsizlikleri Teorem 4.1.1'de verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p <$

$1, m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Sonuç 5.1.2. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucunu verir. Ayrıca $L_1 = 1$ olur. Dolayısıyla, $0 < m + p$ için, (5.1)-(5.4) eşitsizlikleri çakışır ve delta versiyonları bunlarla tam olarak aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizlikleriyle birlikte (5.1) eşitsizliği $p < 0,\ m \geq 0$, ve $m + r \leq 0$ için aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} dt \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{[A(t)]^{m+r-p}} dt. \tag{5.11}$$

Burada A ve B fonksiyonları (3.49) eşitliklerinde tanımlandıkları gibidir.

Sürekli durum için, $p > 1, m \geq 0,$ ve $0 \leq m + r < 1$ olduğunda, ilk Hardy-Copson tipi eşitsizlik (Saker vd., 2018a) tarafından Sonuç 3.1.16'da ve $0 < p < 1, m \geq 0$, ve $m + r \leq 0$ olduğunda, ilk Hardy-Copson tipi eşitsizlik (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) tarafından Sonuç 4.1.2'da oluşturulmuştur. Bu eşitsizlikler (5.11) yeni sürekli Hardy-Copson tipi eşitsizlik ile $p < 0,\ m \geq 0,$ ve $m + r \leq 0$ durumlarına genişletilmiştir.

Sonuç 5.1.3. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir. (3.45b) eşitliklerinde tanımlanan A ve B serileri için

$$\int_t^{\infty} w(s) \nabla s = \sum_{k=t+1}^{\infty} w(k)$$

kullanılarak,

$$A^{\rho}(t) = A(t-1) = \sum_{k=t}^{\infty} w(k)$$

elde edilir.

$$\frac{A(t-1)}{A(t)} \leq L_1$$

olacak şekilde $L_1 > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $a = 0,\ p < 0,\ \ m \geq 0\ ve\ m + r \leq 0$ için, doğal sayılar kümesinde, (4.1)-(4.4) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir ve bunlardan ikisi sırasıyla (5.2) ve (5.4)'ten elde edilerek aşağıdaki gibi yazılabilir. $m + p > 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t-1)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_1}^{m+r}(m+p)}{1-m-r}\right]^{p} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{p}\,[B(t-1)]^{m}}{[A(t-1)]^{m+r-p}}$$

ve $0 < m + p < 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{p} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{p}\,[B(t)]^{m}}{[A(t-1)]^{m+r-p}}$$

elde edilir.

Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından $p > 1,\ m = 0\ ve\ 0 \leq r < 1$ elde edilen (2.7) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik ve $p > 1, m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen ve Sonuç 3.1.17.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.2.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler, Teorem 5.1.1 ve özellikle bu sonuç ile $p < 0,\ m \geq 0\ ve\ m + r \leq 0$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (2.7) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikde ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0,\ m \geq 0, m + r \leq 0$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Sonuç 4.1.2.'de verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır. □

$p < 0,\ \ m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem $p > 0,\ m \geq 0$ ve $m + r < 1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri şu şekilde listelenmiştir:

a) $p > 1$ için Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.7) ayrık eşitsizliği ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.17.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.6.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler

b) $p > 1$ için Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.16.'da gösterilen sürekli eşitsizlikler ve

$0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.5.'de gösterilen sürekli eşitsizlikler

c) $p > 1$ için Saker ve arkadaşları (Saker vd., 2018a) ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022) tarafından elde edilen Teorem 4.2.1.'de gösterilen delta eşitsizlikleri

d) $p > 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen ve Teorem 3.1.4.'de gösterilen ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022) tarafından elde edilen Teorem 4.1.1.'de gösterilen nabla eşitsizlikler

Teorem 5.1.2. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan A fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1 \geq \frac{A(t)}{A^{\rho}(t)} \geq L_2$$

olacak şekilde $L_2 > 0$ olsun. $p < 0,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{L_2(m+p)}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B^{\rho}(t)]^m}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.12}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B^{\rho}(t)]^m}{[A(t)]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.13}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.14}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{[A(t)]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.15}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025)

İspat. Bu teoremin kanıtı için, (Kayar vd., 2021) makalesinde sunulan nabla Bennet-Leindler tipi eşitsizlikleri içeren Teorem 3.1- Teorem 3.4 kanıtında kullanılan teknikler ile ve Teorem 5.1.1'in kanıtındaki tekniklerin kombinasyonu işe yarayacaktır.

Sonuç 5.1.4. $p < 0,\ m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen (5.12)-(5.13) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 3.1.4'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan,

2021) makalesinde $p > 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için verilen ve Teorem 4.1.2'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ i için verilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0$, $m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (5.14)–(5.15) nabla eşitsizlikleri Teorem 4.1.2'de verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Sonuç 5.1.5. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t \; ve \; L_2 = 1$ sonucunu verir. Dolayısıyla, $0 < m + p$ için, (5.12)-(5.15) eşitsizlikleri çakışır ve delta versiyonları bunlarla tam olarak aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizlikleriyle birlikte (5.12) eşitsizliği $p < 0$, $m \geq 0$, ve $0 \leq m + r < 1$ için aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^\infty \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} dt \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^\infty \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{[A(t)]^{m+r-p}} dt. \tag{5.16}$$

Burada $A \; ve \; B$ fonksiyonları (3.49) eşitliklerinde tanımlandıkları gibidir.

Sürekli durum için, $p > 1, m \geq 0,$ ve $0 \leq m + r < 1$ olduğunda, ilk Hardy-Copson tipi eşitsizlik (Saker vd., 2018a) tarafından Sonuç 3.1.16'da ve $0 < p < 1, m \geq 0,$ ve $0 \leq m + r < 1$ olduğunda, ilk Hardy-Copson tipi eşitsizlik (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) tarafından Sonuç 4.1.5'de oluşturulmuştur. Bu eşitsizlikler (5.16) yeni sürekli Hardy-Copson tipi eşitsizlik ile $p < 0,$ $m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Sonuç 5.1.6. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir.

$$1 \geq \frac{A(t)}{A(t-1)} \geq L_2$$

olacak şekilde $L_2 > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $a = 0, p < 0, \quad m \geq 0 \; ve$ $0 \leq m + r < 1$ için, doğal sayılar kümesinde, (5.12)-(5.15) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir. (5.12) ve (5.14) denklemlerinden elde edilen ikisi sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir. $m + p > 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t-1)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \left[\frac{L_2(m+p)}{1-m-r}\right]^p \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^p\,[B(t-1)]^m}{[A(t-1)]^{m+r-p}}$$

ve $0 < m + p < 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{[A(t-1)]^{m+r}} \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^p\,[B(t)]^m}{[A(t-1)]^{m+r-p}}$$

elde edilir. Burada $A\ ve\ B$ serileri (3.50) eşitliklerinde tanımlandıkları gibidir.

Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından $p > 1,\ m = 0\ ve\ 0 \leq r < 1$ elde edilen (2.7) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik ve $p > 1, m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen ve Sonuç 3.1.17.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.6.'da gösterilen ayrık eşitsizlikler, Teorem 5.1.2 ve özellikle bu sonuç ile $p < 0,\ m \geq 0\ ve\ \ 0 \leq m + r < 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (2.7) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikte ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0,\ m \geq 0, m + r \leq 0$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Sonuç 4.1.6.'da verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır. □

$p < 0,\ \ m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem $p > 0,$ $m \geq 0$ ve $m + r < 1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri şu şekilde listelenmiştir:

a) $p > 1$ için Copson (1928) tarafından elde edilen (2.6) ayrık eşitsizliği, Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.7) ayrık eşitsizliği ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.13.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.7.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler

b) $p > 1$ için Hardy ve diğerleri (Hardy vd., 1934) tarafından elde edilen (2.3) sürekli eşitsizliği, Copson (1976) veya Pachpatte (1999) tarafından elde edilen (2.13) sürekli

eşitsizliği, Pečarić ve Hanjš (1999) tarafından elde edilen (2.15) sürekli eşitsizliği, (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.12.'de gösterilen sürekli eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.6.'da gösterilen sürekli eşitsizlikler

c) (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.12.'de gösterilen delta eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.6.'da gösterilen delta eşitsizlikler

d) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.12.'de gösterilen nabla eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.6.'da gösterilen nabla eşitsizlikler

Teorem 5.1.3. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$ fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1 \leq \frac{\overline{A}(t)}{\overline{A}^{\rho}(t)} \leq L_3$$

olacak şekilde $L_3 > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $p < 0,\ m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.17}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{{L_3}^{m+r-1}(m+p)}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.18}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.19}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.20}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025)

İspat. Bu teoremin kanıtı için, (Kayar vd., 2021) makalesinde sunulan nabla Bennet-Leindler tipi eşitsizlikleri içeren Teorem 3.9 kanıtında kullanılan teknik ile ve Teorem 5.1.1'in kanıtındaki tekniğin kombinasyonu işe yarayacaktır.

Sonuç 5.1.7. $p < 0$, $m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ için elde edilen (5.17)-(5.18) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 3.1.3'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde $p > 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için verilen ve Teorem 4.1.3'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0, m + r \leq 0$ için verilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0$, $m \geq 0, m + r \leq 0$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (5.19)–(5.20) nabla eşitsizlikleri Teorem 4.1.3'de verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Sonuç 5.1.8. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t \; ve \; L_3 = 1$ sonucunu verir. Dolayısıyla, $0 < m + p$ için, (5.17)-(5.20) eşitsizlikleri çakışır ve delta versiyonları bunlarla tam olarak aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizlikleriyle birlikte (5.17) eşitsizliği $p < 0$, $m \geq 0$, ve $m + r \leq 0$ için aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} dt \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} dt. \tag{5.21}$$

Burada $\overline{A} \; ve \; \overline{B}$ fonksiyonları (3.40) eşitliklerinde tanımlandıkları gibidir.

Eşitsizlik (5.21) yeni bir sonuçtur ve $p > 1, m = 0$, ve $r < 1$ için Hardy ve arkadaşları (Hardy vd., 1934) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.3)'ü ve Copson (1976) ve Pachpatte (1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.13)'ü, $p < 0$, $m \geq 0$, ve $m + r \leq 0$ durumlarına genelleştirmektedir.

Ayrıca, eşitsizlik (5.21), $p > 1, m \geq 0$, ve $0 \leq m + r < 1$ için Pečarić ve Hanjš (1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.15)'i de, $p < 0$, $m \geq 0$, ve $m + r \leq 0$ durumlarına genişletmektedir.

Sonuç 5.1.9. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise tüm $t\in\mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t)=t-1$ sonucunu verir. $\overline{A}$ ve $\overline{B}$ serileri (3.41) eşitliklerinde tanımlandıkları gibi olduğunda

$$\overline{A}^{\rho}(t)=\overline{A}(t-1)=\sum_{k=a+1}^{t-1}w(k)$$

elde edilir.

$$1\leq\frac{\overline{A}(t)}{\overline{A}(t-1)}\leq L_3$$

olacak şekilde $L_3>0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $a=0, p<0,\quad m\geq 0\ ve$ $m+r\leq 0$ için, doğal sayılar kümesinde, (5.17)-(5.20) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir ve bunlardan ikisi sırasıyla (5.18) ve (5.20)'den elde edilerek aşağıdaki gibi yazılabilir. $m+p>1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\leq\left[\frac{{L_3}^{m+r-1}(m+p)}{1-m-r}\right]^{p}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{p}\left[\overline{B}(t)\right]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}$$

ve $0<m+p<1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\leq\left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{p}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{p}\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}$$

elde edilir.

$p>1,\ m=0\ ve\ 0\leq r<1$ için Copson (1928) tarafından elde edilen (2.6) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik, Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.8) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik ve $p>1, m\geq 0\ ve\ 0\leq m+r<1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen ve Sonuç 3.1.13.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0<p<1, m\geq 0,$ ve $m+r\leq 0$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.9.'da gösterilen ayrık eşitsizlikler, Teorem 5.1.3 ve özellikle bu sonuç ile $p<0,\quad m\geq 0\ ve\quad m+r\leq 0$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ koşulu Copson (1928), Bennett (1987), Leindler (1993) ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0<m+p<1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p<0,\ m\geq 0, m+r\leq 0$ ve $0<m+p<1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Sonuç 4.1.9.'da

verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $m + r \leq 0$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır. □

$p < 0, \quad m \geq 0 \; ve \; 0 \leq m + r < 1$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem, $p > 1, \; m \geq 0 \; ve \; 0 \leq m + r < 1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri şu şekilde listelenmiştir:

a) $p > 1$ için Copson (1928) tarafından elde edilen (2.6) ayrık eşitsizliği, Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.7) ayrık eşitsizliği ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.13.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.7.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler

b) $p > 1$ için Hardy ve diğerleri (Hardy vd., 1934) tarafından elde edilen (2.3) sürekli eşitsizliği, Copson (1976) veya Pachpatte (1999) tarafından elde edilen (2.13) sürekli eşitsizliği, Pečarić ve Hanjš (1999) tarafından elde edilen (2.15) sürekli eşitsizliği, (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.12.'de gösterilen sürekli eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.6.'da gösterilen sürekli eşitsizlikler

c) (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.12.'de gösterilen delta eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.6.'da gösterilen delta eşitsizlikler

d) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.12.'de gösterilen nabla eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.6.'da gösterilen nabla eşitsizlikler

Teorem 5.1.4. (3.1) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$ fonksiyonu ve $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1 \geq \frac{\overline{A}^{\rho}(t)}{\overline{A}(t)} \geq L_4$$

olacak şekilde $L_4 > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $p < 0, \; m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{L_4(m+p)}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.22}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.23}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.24}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.25}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025).

İspat: Bu teoremin kanıtı için, (Kayar vd., 2021) makalesinde sunulan nabla Bennet-Leindler tipi eşitsizlikleri içeren Teorem 3.9 kanıtında kullanılan teknik ile ve Teorem 5.1.1'in kanıtındaki tekniğin kombinasyonu işe yarayacaktır.

Sonuç 5.1.10. $p < 0,\ m \geq 0$ ve$0 \leq m + r < 1$ için elde edilen (5.22)-(5.23) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 3.1.3'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde $p > 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için verilen ve Teorem 4.1.4'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ için verilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0,\ m \geq 00 \leq m + r < 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (5.24)–(5.25) nabla eşitsizlikleri Teorem 4.1.4'de verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Sonuç 5.1.11. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t \; ve \; L_4 = 1$ sonucunu verir. Dolayısıyla, $0 < m + p$ için, (5.22)-(5.25) eşitsizlikleri çakışır ve delta versiyonları bunlarla tam olarak aynı eşitsizlikler

haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizlikleriyle birlikte (5.22) eşitsizliği $p<0$, $m\geq 0$, ve $0\leq m+r<1$ için aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}dt\leq\left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}dt. \tag{5.26}$$

Burada $\overline{A}\ ve\ \overline{B}$ fonksiyonları (3.40) eşitliklerinde tanımlandıkları gibidir.

Eşitsizlik (3.24) yenidir ve Hardy ve diğerleri tarafından elde edilen sürekli eşitsizliği (2.3) genelleştirir.

Sonuç 5.1.12. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise tüm $t\in\mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t)=t-1$ sonucunu verir. $\overline{A}$ ve $\overline{B}$ serileri (3.41) eşitliklerinde tanımlandıkları gibi olsun.

$$\frac{\overline{A}(t)}{\overline{A}(t-1)}\leq\frac{1}{L_4}$$

olacak şekilde $L_4>0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $a=0, p<0,\quad m\geq 0\ ve$ $0\leq m+r<1$ için, doğal sayılar kümesinde, (5.22)-(5.25) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir ve bunlardan ikisi sırasıyla (5.22) ve (5.24)'den elde edilerek aşağıdaki gibi yazılabilir. $m+p>1$ için $m+p>1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\leq\left[\frac{L_4(m+p)}{1-m-r}\right]^{p}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{p}\left[\overline{B}(t)\right]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}$$

ve $0<m+p<1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\leq\left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{p}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{w(t)f^{p}\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}$$

elde edilir.

$p>1,\ m=0\ ve\ 0\leq r<1$ için Copson (1928) tarafından elde edilen (2.6) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik, Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.8) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik ve $p>1, m\geq 0\ ve\ 0\leq m+r<1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen ve Sonuç 3.1.13.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0<p<1, m\geq 0,$ ve $0\leq m+r<1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.12.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler, Teorem 5.1.4 ve özellikle bu sonuç ile $p<0,\ m\geq 0\ ve\ 0\leq m+r<1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ koşulu Copson (1928), Bennett (1987), Leindler (1993) ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0<m+p<1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p<0,\ m\geq 0, 0\leq m+r<1$ ve $0<m+p<1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Sonuç 4.1.12.'de verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0<p<1, m\geq 0$ ve $0\leq m+r<1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır. ▢

$p<0,\ m\geq 0\ ve\ m+r>1$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem, $p>1$, $m\geq 0\ ve\ m+r>1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri şu şekilde listelenmiştir:

a) $p>1$ için Hardy (1920) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.1), Copson (1928) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.5), Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.10) ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.4.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0<p<1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.15.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler

b) $p>1$ için Hardy ve diğerleri (Hardy vd., 1934) tarafından elde edilen (2.3) sürekli eşitsizliği, Copson (1976) veya Pachpatte (1999) tarafından elde edilen (2.12) sürekli eşitsizliği, Pečarić ve Hanjš (1999) tarafından elde edilen (2.14) sürekli eşitsizliği, (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.3.'de gösterilen sürekli eşitsizlikler ve $0<p<1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.14.'de gösterilen sürekli eşitsizlikler

c) (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Teorem 3.2.4'de gösterilen delta eşitsizlikler ve $0<p<1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Teorem 4.2.5.'de gösterilen delta eşitsizlikler

d) Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Teorem 3.1.1.'de gösterilen nabla eşitsizlikler ve $0<p<1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Teorem 4.1.5.'de gösterilen nabla eşitsizlikler

Teorem 5.1.5. $t\in(a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A},B$ fonksiyonları ve Teorem 5.1.4'de tanımlanan $L_4>0$ sayısını ele alalım. $p<0,\ m\geq 0$ ve $m+r>1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m+p>1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\leq\left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\rho}(t)]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}\nabla t, \tag{5.27}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B^{\rho}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\leq\left[\frac{{L_4}^{m+r-1}(m+p)}{1-m-r}\right]^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\rho}(t)]^{m}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-p}}\nabla t. \tag{5.28}$$

2. Eğer $0<m+p<1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\leq\left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}\nabla t, \tag{5.29}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r}}\nabla t\leq\left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{\left[\overline{A}^{\rho}(t)\right]^{m+r-p}}\nabla t. \tag{5.30}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025).

İspat. Bu teoremin kanıtı için, (Kayar vd., 2021) makalesinde sunulan nabla Bennet-Leindler tipi eşitsizlikleri içeren Teorem 3.12'nin kanıtında kullanılan teknik ile ve Teorem 5.1.1'in kanıtındaki tekniğin kombinasyonu işe yarayacaktır.

Sonuç 5.1.13. $p<0,\quad m\geq 0\ ve\ \ m+r>1$ için elde edilen (5.27)-(5.28) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 3.1.1'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde $p>1,\ m\geq 0\ ve\ m+r>1$ için verilen ve Teorem 4.1.5'de gösterilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0<p<1,\ m\geq 0\ ve\ m+r>1$ için verilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ koşulu (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0<m+p<1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p<0,\ m\geq 0, m+r>1$ ve $0<m+p<1$ koşulları için elde edilen (5.29)–(5.30) nabla eşitsizlikleri Teorem 4.1.5'de verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde

$0 < p < 1, m \geq 0$ ve $m + r > 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Sonuç 5.1.14. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t \; ve \; L_4 = 1$ sonucunu verir. Dolayısıyla, $0 < m + p$ için, (5.27)-(5.30) eşitsizlikleri çakışır ve delta versiyonları bunlarla tam olarak aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizlikleriyle birlikte (5.27) eşitsizliği $p < 0$, $m \geq 0$, ve $m + r > 1$ için aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} dt \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} dt. \tag{5.31}$$

Burada $\overline{A} \; ve \; B$ fonksiyonları (3.16) eşitliklerinde tanımlandıkları gibidir.

Eşitsizlik (5.31) yeni bir sonuçtur ve $p > 1, m = 0 \; ve \; r > 1$ için Hardy ve arkadaşları (Hardy vd., 1934) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.3) ve Copson (1976) ve Pachpatte (1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.12), Pečarić ve Hanjš (1999) tarafından elde edilen sürekli eşitsizlik (2.14) ile $p > 1, m \geq 0 \; ve \; m + r > 1$için (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.3.'de gösterilen sürekli eşitsizlikleri ve $0<p < 1, \; m \geq 0 \; ve \; m + r > 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.14.'de gösterilen sürekli eşitsizlikleri $p < 0, \; m \geq 0 \; ve \;\; m + r > 1$ durumlarına genelleştirmektedir.

Sonuç 5.1.15. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir. $\overline{A}$ ve B serileri (3.17) eşitliklerinde tanımlandıkları gibi olsun. Ayrıca L_4 sabitinin Sonuç 5.1.12'deki gibi tanımlandığını varsayalım. Doğal sayılar kümesinde $a = 0, p < 0, \;\; m \geq 0 \; ve \;\; m + r > 1$ için, (5.27)-(5.30) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir. (5.28) ve (5.30) denklemlerinden elde edilen ikisi sırasıyla aşağıdaki gibi yazılılabilir. $m + p > 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t-1)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_4}^{m+r-1}(m+p)}{m+r-1}\right]^p \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^p\,[B(t-1)]^m}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r-p}}$$

ve $0 < m + p < 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r}} \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^p\,[B(t)]^m}{\left[\overline{A}(t-1)\right]^{m+r-p}}$$

elde edilir.

$p > 1,\ m = 0\ ve\ 0 \leq r < 1$ için Hardy (1920) tarafından elde edilen (2.1) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik, Copson (1928) tarafından elde edilen (2.5) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik, Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen (2.10) ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlik ve $p > 1, m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen ve Sonuç 3.1.4.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0 < p < 1, m \geq 0$, ve $0 \leq m + r < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.15.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler, Teorem 5.1.5 ve özellikle bu sonuç ile $p < 0,\ \ m \geq 0\ ve\ \ 0 \leq m + r < 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu Hardy (1920), Copson (1928), Bennett (1987), Leindler (1993) ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0,\ m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Sonuç 4.1.15.'de verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

□

$p < 0,\ \ m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ için kanıtlanmış olan bir sonraki teorem, $p > 1,$ $m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ için daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin bazılarının tamamlayıcılarını sağlar. Daha önce verilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri şu şekilde listelenmiştir:

a) $p > 1$ için Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.9) ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.8.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.18.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler

b) $p > 1$ için (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.7.'de gösterilen sürekli eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.17.'de gösterilen sürekli eşitsizlikler

c) $p > 1$ için (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Teorem 3.2.2'de gösterilen delta eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Teorem 4.2.6.'da gösterilen delta eşitsizlikler

d) $p > 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Teorem 3.1.2.'de gösterilen nabla eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Teorem 4.1.6.'da gösterilen nabla eşitsizlikler

Teorem 5.1.6. $t \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1) eşitliklerinde tanımlanan $A, \overline{B}$ fonksiyonları ve Teorem 5.1.2'de tanımlanan $L_2 > 0$ sayısını ele alalım. Ayrıca $p < 0,\ m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.32}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{{L_2}^{m+r-1}(m+p)}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{[A(t)]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.33}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{[A^{\rho}(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^m}{[A^{\rho}(t)]^{m+r-p}} \nabla t, \tag{5.34}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \nabla t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}^{\rho}(t)\right]^m}{[A(t)]^{m+r-p}} \nabla t. \tag{5.35}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025).

İspat. Bu teoremin kanıtı için, (Kayar vd., 2021) makalesinde sunulan nabla Bennet-Leindler tipi eşitsizlikleri içeren Teorem 3.4'ün kanıtında kullanılan teknik ile ve Teorem 5.1.1'in kanıtındaki tekniğin kombinasyonu işe yarayacaktır.

Sonuç 5.1.16. $p < 0,\ m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ için elde edilen (5.32)-(5.33) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Teorem 3.1.2'de gösterilen ve $p > 1,\ m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde verilen ve Teorem 4.1.6'da gösterilen

ve $0 < p < 1,\ m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde verilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0,\ m \geq 0, m + r > 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (5.34)–(5.35) nabla eşitsizlikleri Teorem 4.1.6'da verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $m + r > 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

Sonuç 5.1.17. Eğer zaman skalası reel sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{R}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t$ sonucu verir. Ayrıca $L_2 = 1$ olur. Dolayısıyla, $0 < m + p$ için, (5.32)-(5.35) eşitsizlikleri çakışır ve delta versiyonları bunlarla tam olarak aynı eşitsizlikler haline gelir. Dolayısıyla, çakışan eşitsizlikleriyle birlikte $p < 0,\ m \geq 0$, ve $m + r > 1$ için (5.32) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\,dt \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{[A(t)]^{m+r-p}}\,dt. \tag{5.36}$$

Burada A ve $\overline{B}$ fonksiyonları (3.32) eşitliklerinde tanımlandıkları gibidir.

Eşitsizlik (5.36) yeni bir sonuçtur ve $p > 1, m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ için (Saker vd., 2018a) veya Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.3.'de gösterilen sürekli eşitsizlikleri ve $0 < p < 1, m \geq 0\ ve\ m + r > 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.14.'de gösterilen sürekli eşitsizlikleri $p < 0,\ m \geq 0\ ve\ \ m + r > 1$ durumlarına genelleştirmektedir.

Sonuç 5.1.18. Eğer zaman skalası doğal sayılar kümesi ise tüm $t \in \mathbb{N}$ için geriye sıçrama operatörü $\rho(t) = t - 1$ sonucunu verir. Ayrıca $A\ ve\ \overline{B}$ serilerinin (3.33) eşitliklerinde verildiği gibi olduğunu ve $L_2 > 0$ sabitinin Sonuç 5.1.6'daki gibi tanımlandığını varsayalım. Doğal sayılar kümesinde $a = 0, p < 0,\ \ m \geq 0\ ve\ \ m + r > 1$ için, (5.32)-(5.35) eşitsizlikleri yeni ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler haline gelir. (5.33) ve (5.35) denklemlerinden elde edilen iki eşitsizlik sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir. $m + p > 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left[\frac{{L_2}^{m+r-1}(m+p)}{m+r-1}\right]^p \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^p\left[\overline{B}(t)\right]^m}{[A(t)]^{m+r-p}}$$

ve $0 < m + p < 1$ için

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{p} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{w(t) f^{p}\left[\overline{B}(t-1)\right]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}$$

elde edilir.

$p > 1$ için Bennett (1987) veya Leindler (1993) tarafından elde edilen ayrık eşitsizlik (2.9) ve Kayar ve Kaymakçalan (2021) tarafından elde edilen Sonuç 3.1.8.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler ve $0 < p < 1$ için Kayar ve Kaymakçalan (2022b) tarafından elde edilen Sonuç 4.1.18.'de gösterilen ayrık eşitsizlikler, Teorem 5.1.6 ve özellikle bu sonuç ile $p < 0,\ m \geq 0\ ve\ 0 \leq m + r < 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu Bennett (1987), Leindler (1993) ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2021) makalesinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0,\ m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen ayrık Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, Sonuç 4.1.18'de verilen ve (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde $0 < p < 1, m \geq 0$ ve $0 \leq m + r < 1$ için elde edilen nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerinin tamamlayıcılarıdır.

5.2 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizlikleri

Bu bölümün temel amacı, negatif olmayan, rd-sürekli, Δ-diferansiyellenebilir ve lokal olarak delta integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için 5.1 bölümünde $p<0$ için nabla zaman skalasında verilen Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta karşılıklarını vermektir. Bunun için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesindeki sonuçlar gösterilecektir.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ olsun. $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında negatif olmayan, rd-sürekli, Δ−diferansiyellenebilir ve lokal olarak delta integrallenebilir $w(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları ile $A, \overline{A}, B, \overline{B}$ fonksiyonları (3.46)'daki gibi tanımlansın.

Teorem 5.2.1. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan A fonksiyonu ve $t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{A(t)}{A^{\sigma}(t)} \leq M_1$$

olacak şekilde $M_1 > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $p < 0,\ m \geq 0, m + r \leq 0$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m+p>1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\Delta t}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-p}}\Delta t, \tag{5.37}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{{M_1}^{m+r-1}(m+p)}{1-m-r}\right)^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\Delta t. \tag{5.38}$$

2. Eğer $0<m+p<1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-p}}\Delta t, \tag{5.39}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}} \leq \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\Delta t. \tag{5.40}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025).

İspat. Teorem 5.1.1'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (5.1)–(5.4) eşitsizliklerinde (3.1) denklemlerinde tanımlanan A^{ρ}, A, B^{ρ}, B fonksiyonları yerine, (3.51) denklemlerinde tanımlanan $A, A^{\sigma}, B, B^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_1 yerine M_1 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 5.2.1. $p<0,\ m\geq 0,\ m+r\leq 0$ için elde edilen (5.37)-(5.40) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p>1,\ m\geq 0,\ 0\leq m+r<1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve $0<p<1,\ m\geq 0,\ m+r\leq 0$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.43)-(4.46) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p<0,\ m\geq 0,\ m+r\leq 0$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.1)-(5.4) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 5.2.2. Eğer $m=0$ ise, $p>1, 0\leq r<1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (5.37)-(5.38) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $0<p<1, r\leq 0$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0<m+p<1$ ilk

kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p<0,\ m\geq 0, m+r\leq 0$ ve $0<m+p<1$ koşulları için elde edilen (5.38)-(5.39) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler $0<p<1,\ \ m\geq 0,\ m+r\leq 0, 0<m+p<1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.45)-(4.46) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p<0,\ \ m\geq 0,$ $m+r\leq 0, 0<m+p<1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.3)-(5.4) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır. ▢

Teorem 5.2.2. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan A fonksiyonu ve $t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1\geq\frac{A^{\sigma}(t)}{A(t)}\geq M_2$$

olacak şekilde $M_2>0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $p<0,\ \ m\geq 0,\ 0\leq m+r<1$ reel sabitler olsun.

1**.** Eğer $m+p>1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}}\leq\ \left(\frac{M_2(m+p)}{1-m-r}\right)^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\Delta t, \tag{5.41}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B(t)]^{m+p}\Delta t}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}\leq\ \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B(t)]^{m}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-p}}\Delta t. \tag{5.42}$$

2**.** Eğer $0<m+p<1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{[A(t)]^{m+r}}\leq\ \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\Delta t, \tag{5.43}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}\Delta t}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}\leq\ \left(\frac{m+p}{1-m-r}\right)^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)[B^{\sigma}(t)]^{m}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-p}}\Delta t. \tag{5.44}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025)

İspat. Teorem 5.1.2'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (5.12)–(5.15) eşitsizliklerinde (3.1) denklemlerinde tanımlanan A^{ρ},A,B^{ρ},B fonksiyonları yerine, (3.51) denklemlerinde tanımlanan $A,A^{\sigma},B,B^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_2 yerine M_2 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 5.2.3. $p<0$, $m\geq 0$, $0\leq m+r<1$ için elde edilen (5.41)-(5.44) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p>1$, $m\geq 0$, $0\leq m+r<1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve $0<p<1$, $m\geq 0$, $0\leq m+r<1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.47)-(4.50) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p<0$, $m\geq 0$, $0\leq m+r<1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.12)-(5.15) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 5.2.4. Eğer $m=0$ ise, $p>1, 0\leq r<1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (5.41)-(5.42) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $p<0, 0\leq r<1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0<m+p<1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p<0$, $m\geq 0, 0\leq m+r<1$ ve $0<m+p<1$ koşulları için elde edilen (5.43)-(5.44) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler $0<p<1$, $m\geq 0$, $0\leq m+r<1, 0<m+p<1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.49)-(4.50) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p<0$, $m\geq 0$, $0\leq m+r<1, 0<m+p<1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.14)-(5.15) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Teorem 5.2.3. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$ fonksiyonu ve $t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1\leq \frac{\overline{A}^{\sigma}(t)}{\overline{A}(t)}\leq M_3$$

olacak şekilde $M_3>0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $p<0$, $m\geq 0$, $m+r\leq 0$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m+p>1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}}\Delta t\leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}}\Delta t, \tag{5.45}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}}\Delta t\leq \left[\frac{{M_3}^{m+r-1}(m+p)}{1-m-r}\right]^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r-p}}\Delta t. \tag{5.46}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t, \tag{5.47}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t. \tag{5.48}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025).

İspat. Teorem 5.1.3'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (5.17)–(5.20) eşitsizliklerinde (3.1) denklemlerinde tanımlanan $\overline{A}^{\rho}, \overline{A}, \overline{B}^{\rho}, \overline{B}$ fonksiyonları yerine, (3.51) denklemlerinde tanımlanan $\overline{A}, \overline{A}^{\sigma}, \overline{B}, \overline{B}^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_3 yerine M_3 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 5.2.5. $p < 0,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ için elde edilen (5.45)-(5.48) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p > 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.51)-(4.54) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p < 0,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.17)-(5.20) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 5.2.6. Eğer $m = 0$ ise, $p > 1, 0 \leq r < 1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (5.45)-(5.46) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $p < 0, r \leq 0$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0,\ m \geq 0, m + r \leq 0$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (5.47)-(5.48) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0\ , 0 < m + p < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.53)-(4.54) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p < 0,\ m \geq 0,\ m + r \leq 0\ , 0 < m + p < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.19)-(5.20) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Teorem 5.2.4. (3.51) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}(t)$ fonksiyonu ve $t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$1 \geq \frac{\overline{A}(t)}{\overline{A}^{\sigma}(t)} \geq M_4$$

olacak şekilde $M_4 > 0$ sabitinin olduğunu varsayalım. $p < 0,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ reel sabitler olsun.

1**.** Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{M_4(m+p)}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t, \tag{5.49}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t. \tag{5.50}$$

2**.** Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t, \tag{5.51}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{m+p}{1-m-r}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)\left[\overline{B}(t)\right]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t. \tag{5.52}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025).

İspat. Teorem 5.1.4'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (5.22)–(5.25) eşitsizliklerinde (3.1) denklemlerinde tanımlanan $\overline{A}^{\rho}, \overline{A}, \overline{B}^{\rho}, \overline{B}$ fonksiyonları yerine, (3.51) denklemlerinde tanımlanan $\overline{A}, \overline{A}^{\sigma}, \overline{B}, \overline{B}^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_4 yerine M_4 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 5.2.7. $p < 0,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ için elde edilen (5.49)-(5.52) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p > 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.55)-(4.58) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p < 0,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.22)-(5.25) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 5.2.8. Eğer $m = 0$ ise, $p > 1, 0 \leq r < 1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (5.49)-(5.50) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $p < 0, 0 \leq r < 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0,\ m \geq 0, 0 \leq m + r < 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (5.51)-(5.52) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ 0 \leq m + r < 1, 0 < m + p < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.57)-(4.58) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p < 0,\ m \geq 0,$ $0 \leq m + r < 1, 0 < m + p < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.24)-(5.25) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Teorem 5.2.5. $t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.51) eşitliklerinde tanımlanan $\overline{A}$, B fonksiyonlarını ve Teorem 5.2.4'deki $M_4 > 0$ sayısını ele alalım. $p < 0,\ m \geq 0, m + r > 1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m + p > 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t, \tag{5.53}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{{M_4}^{m+r-1}(m+p)}{m+r-1}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B(t)]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t. \tag{5.54}$$

2. Eğer $0 < m + p < 1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B^{\sigma}(t)]^m}{\left[\overline{A}^{\sigma}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t, \tag{5.55}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r}} \Delta t \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^p \int_a^{\infty} \frac{w(t) f^p(t)[B^{\sigma}(t)]^m}{\left[\overline{A}(t)\right]^{m+r-p}} \Delta t. \tag{5.56}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025)

İspat. Teorem 5.1.5'de nabla kalkülüsü ile elde edilen (5.27)–(5.31) eşitsizliklerinde (3.1) denklemlerinde tanımlanan $\overline{A}^{\rho}, \overline{A}, \overline{B}^{\rho}, \overline{B}$ fonksiyonları yerine, (3.51)

denklemlerinde tanımlanan $\overline{A}, \overline{A}^{\sigma}, \overline{B}, \overline{B}^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_4 yerine M_4 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 5.2.9. $p<0,\ m\geq 0,\ m+r>1$ için elde edilen (5.53)-(5.56) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p>1,\ m\geq 0,\ m+r>1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve $0<p<1,\ m\geq 0, m+r>1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.59)-(4.62) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p<0,\ m\geq 0, m+r>1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.27)-(5.30) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 5.2.10. Eğer $m=0$ ise, $p>1, r>1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (5.53)-(5.54) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $p<0, r>1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m+p>1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0<m+p<1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p<0,\ m\geq 0, m+r>1$ ve $0<m+p<1$ koşulları için elde edilen (5.53)-(5.54) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler $0<p<1,\ m\geq 0,\ m+r>1, 0<m+p<1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.59)-(4.60) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p<0,\ m\geq 0, m+r>1, 0<m+p<1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.55)-(5.56) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Teorem 5.2.6. $t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.51) eşitliklerinde tanımlanan A, $\overline{B}$ fonksiyonlarını ve Teorem 5.2.2'deki $M_2>0$ sayısını ele alalım. $p<0,\ m\geq 0, m+r>1$ reel sabitler olsun.

1. Eğer $m+p>1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\Delta t\leq\left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\Delta t, \tag{5.57}$$

$$\int_a^{\infty}\frac{w(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m+p}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}\Delta t\leq\left[\frac{{M_2}^{m+r-1}(m+p)}{m+r-1}\right]^{p}\int_a^{\infty}\frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}^{\sigma}(t)\right]^{m}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-p}}\Delta t. \tag{5.58}$$

2. Eğer $0<m+p<1$ ise, o zaman

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A(t)]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}}\Delta t, \tag{5.59}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{w(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m+p}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}\Delta t \leq \left[\frac{m+p}{m+r-1}\right]^{p} \int_a^{\infty} \frac{w(t)f^{p}(t)\left[\overline{B}(t)\right]^{m}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-p}}\Delta t. \tag{5.60}$$

(Kayar ve Kaymakçalan, 2025)

İspat. Teorem 5.1.6'da nabla kalkülüsü ile elde edilen (5.32)–(5.35) eşitsizliklerinde (3.1) denklemlerinde tanımlanan $\overline{A}^{\rho}, \overline{A}, \overline{B}^{\rho}, \overline{B}$ fonksiyonları yerine, (3.51) denklemlerinde tanımlanan $\overline{A}, \overline{A}^{\sigma}, \overline{B}, \overline{B}^{\sigma}$ fonksiyonları sırasıyla kullanılarak ve L_2 yerine M_2 sabiti yerleştirilerek delta kalkülüsdeki ikiz (dual) eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 5.2.11. $p < 0,\ m \geq 0,\ m + r > 1$ için elde edilen (5.57)-(5.60) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, (Saker vd., 2018a) makalesinde $p > 1,\ m \geq 0,\ m + r > 1$ için elde edilen delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve $0 < p < 1,\ m \geq 0, m + r > 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.63)-(4.66) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p < 0,\ m \geq 0, m + r > 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.32)-(5.35) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

Sonuç 5.2.12. Eğer $m = 0$ ise, $p > 1, r > 1$ için (Saker vd., 2014b) makalesinde elde edilen delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler, (5.57)-(5.58) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikleri sayesinde $p < 0, r > 1$ durumlarına genişletilmiştir.

Şunu belirtmek gerekir ki, $m + p > 1$ koşulu (Saker vd., 2014b) ve (Saker vd., 2018a) makalelerinde otomatik olarak sağlanırken, diğer koşul olan $0 < m + p < 1$ ilk kez (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde göz önüne alınmıştır. Bu nedenle, $p < 0,\ m \geq 0, m + r > 1$ ve $0 < m + p < 1$ koşulları için elde edilen (5.57)-(5.58) delta Hardy-Copson tipi eşitsizlikler $0 < p < 1,\ m \geq 0,\ m + r > 1, 0 < m + p < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2022b) makalesinde elde edilen (4.63)-(4.64) delta Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin ve tamamlayıcılarıdır. Ayrıca $p < 0,\ m \geq 0,$ $m + r > 1, 0 < m + p < 1$ için (Kayar ve Kaymakçalan, 2025) makalesinde elde edilen (5.59)-(5.60) nabla Hardy-Copson tipi eşitsizliklerin delta versiyonlarıdır.

5.3 Delta Dinamik Hardy-Copson Eşitsizliklerinin Uygulamaları

Bu bölüm, beşinci bölümde elde edilen Hardy-Copson eşitsizliklerinin uygulamalarından birine ayrılmıştır. İlgili yarı lineer dinamik denklemler için salınımsızlık kriterini bulmak amacıyla, sırasıyla Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.2.2'de sunulan (5.39) ve (5.43) delta Hardy-Copson eşitsizlikleri kullanılacaktır. Diğer delta (veya nabla) eşitsizlikleri için de benzer bir süreç izlenebilir ve benzer teoremler elde edilebilir.

Burada 4.3 bölümünde ele alınan (4.67)-(4.68) denklemleri göz önüne alınacaktır.

Yarı lineer dinamik denklemler ve bunların salınım özellikleri hakkında ayrıntılı bilgi için (Řehák, 2002; Agarwal vd., 2003; Řehák, 2004) kaynakları kullanılabilir. İkinci mertebeden yarı lineer dinamik denklemlerin ve salınım teorisi kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve denklem (4.67)'nin salınım ve salınımsızlık koşullarını bulmak için birçok teknik geliştirilmiştir. Reid Roundabout Teoremi ve Sturm Karşılaştırma Teoremi'ne dayanan iki önemli yönteme odaklanmak için, salınım teorisinin kullanılacak olan temel tanım ve teoremleri Tanım 4.3.1, Tanım 4.3.2, Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2 ile dördüncü bölümde verilmiştir.

Teorem 5.4.1. A, B, w ve f fonksiyonları (3.51) eşitliklerinde tanımlandıkları gibi olsun. $p < 0,\ m \geq 0$, $0 < m + p < 1$ ve $q > 1$ olsun. Ayrıca

$$L = \left(\frac{1 - m - r}{m + p}\right)^{p}$$

olarak tanımlansın.

1. Eğer $m + r \leq 0$ ve $B(t) \in \mathrm{U}$ için

$$r(t) = \frac{w^{1-q}(t) f^{p-q}(t) [B^{\sigma}(t)]^{m}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-p}} \ ve\ c(t) = L \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-q}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}$$

ise denklem (4.67) salınımlı değildir.

2. Eğer $0 \leq m + r < 1$ ve $B(t) \in \mathrm{U}$ için

$$r(t) = \frac{w^{1-q}(t) f^{p-q}(t) [B^{\sigma}(t)]^{m}}{[A(t)]^{m+r-p}} \ ve\ c(t) = L \frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-q}}{[A(t)]^{m+r}}$$

ise denklem (4.67) salınımlı değildir.

İspat. İspat için (Řehák, 2005) makalesindeki İddia 3.7'de kullandığı teknik kullanılacaktır. $\mathrm{a} \in \mathbb{T}$ için $a > 0$ seçelim. Negatif olmayan w ve f fonksiyonları için

(3.46) eşitliklerinde tanımlanan B fonksiyonu $B(t)\in$U olsun. Burada $B^{\Delta}(t) = w(t)f(t)$ olduğu açıktır.

1. Delta Hardy-Copson eşitsizliği (5.39)'dan

$$\int_a^{\infty}\left[r(t)\left|B^{\Delta}(t)\right|^q - c(t)|B^{\sigma}(t)|^q\right]\Delta t = \int_a^{\infty}[r(t)[w(t)f(t)]^q - c(t)[B^{\sigma}(t)]^q]\Delta t$$

$$= \int_a^{\infty}\left[\frac{w^{1-q}(t)f^{p-q}(t)[B^{\sigma}(t)]^m}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-p}}[w(t)f(t)]^q - L\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p-q}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}[B^{\sigma}(t)]^q\right]\Delta t$$

$$= \int_a^{\infty}\left[\frac{w(t)f^p(t)[B^{\sigma}(t)]^m}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r-p}} - L\frac{w(t)[B^{\sigma}(t)]^{m+p}}{[A^{\sigma}(t)]^{m+r}}\right]\Delta t \geq 0$$

elde ederiz. Dolayısıyla, (4.67) denklemi Teorem 4.3.1'e göre salınımlı değildir.

2. 1'in ispatında $A^{\sigma}(t)$ yerine $A(t)$ konularak ve delta Hardy-Copson eşitsizliği (5.43) kullanılarak elde edilebilir.

Teorem 5.4.2. Teorem 5.4.1'in varsayımlarının geçerli olsun ve $R(t) \geq r(t)$ ve $c(t) \geq C(t)$ eşitsizlikleri I^küzerinde sağlansın.

(i) Eğer $r(t)\ ve\ c(t)$, Teorem 5.4.1'in (1)'inde tanımlandığı gibi ise, o zaman denklem (4.68) salınımlı değildir.

(ii) Eğer $r(t)\ ve\ c(t)$, Teorem 5.4.1'in (2)'sinde tanımlandığı gibi ise, o zaman denklem (4.68) salınımlı değildir.

İspat. Teorem 5.4.1'in (1) ve (2) maddelerine göre (4.67) denklemi salınımlı değildir. Sturm Karşılaştırma Teoremi (Teorem 4.3.2) kullanılırsa, sırasıyla (i) ve (ii)'yi kanıtlanır.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Zaman skalası kalkülüsü (time scale calculus), sürekli (diferansiyel) denklemler ve ayrık (fark) denklemler gibi iki ana matematiksel modelleme biçimini tek bir şemsiye altında birleştiren, nispeten yeni ve hızla gelişen bir matematik dalıdır. Bu teori, reel sayıların herhangi bir kapalı alt kümesi olan $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlanır ve geleneksel kalkülüsteki türev ve integral işlemlerini delta (Δ) ve nabla (∇) operatörleri ile birleştirip genelleştirir. Bu birleştirme, bilim insanlarının ve mühendislerin sistemleri analiz ederken sürekli ve ayrık durumlar için ayrı ayrı kanıtlar türetme zorunluluğunu ortadan kaldırır ve bu durumların nabla ya da delta kalkülüs aracılığıyla birleştirilmesini sağlar. Bu sayede, dinamik denklemlerin sadece şimdiki zamanı değil, aynı zamanda geçmiş zaman tarihini içeren modelleri sağlayabilmesi ve çok karmaşık yapıdaki sistemleri anlamaya yönelik yeni bir bakış açısı sunması gibi özellikleriyle, fizikten mühendisliğe kadar birçok alanda büyük ilgi görmektedir.

Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, klasik analizin temel taşlarından olup, matematiksel fizikten diferansiyel operatörlerin spektral teorisine kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. İlk olarak G.H. Hardy (Hardy, 1920) tarafından toplam formda keşfedilen bu eşitsizlikler, bir fonksiyonun p-normları ile onun integral ortalamaları veya ağırlıklı türevleri arasındaki ilişkiyi kurar. Bu eşitsizlikler, matematiğin birçok alanında bir fonksiyonun integrali ile türevi arasındaki sınırları ve davranışsal kısıtlamaları tanımlamada kritik rol oynar. Özünde, bu eşitsizlikler, bir fonksiyonun yerel davranışının (türev/türev benzeri ifadeler) genel davranışı (integral/integral ortalamaları) üzerindeki etkisini gösterir. Bu özellikleri sayesinde, Hardy-Copson tipi eşitsizlikler, yeni matematiksel teorilere sürekli ilham kaynağı olmaya devam etmektedir.

Bu tezde Hardy-Copson tipi eşitsizlikler tarihsel süreç içerisinde sistematik bir biçimde sunulmuş, detaylı bir şekilde incelenmiş, aralarındaki farklılıklar ve benzerlikler belirtilmiş ve bu konuda bir derleme oluşturulmuştur. İlk olarak kesikli ve sürekli durumlarda elde edilen Hardy-Copson tipi eşitsizlikler gösterilmiş ve daha sonra kesikli ve sürekli durumların genel hali ve birleştirilmesi olan zaman skalasındaki dinamik Hardy-Copson tipi eşitsizlikler verilmiştir.

Birinci bölümde zaman skalası teorisindeki önemli tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde Hardy–Copson tipi eşitsizliklerin tarihsel süreci gösterilirken kullanılan kaynaklardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde $p > 1, m \geq 0$ için, dördüncü bölümde $0 < p < 1, m \geq 0$ için beşinci bölümde ise $p < 0, m \geq 0$ için elde edilen nabla ve delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler verilmiştir. Bu eşitsizlikler gösterilirken zaman skalası kalkülüsteki (nabla ve delta) kısmi integrasyon formülü, $p > 1$ ve $0 < p < 1$ için zaman skalası kalkülüsteki Hölder eşitsizliği ve $p < 0$ için zaman skalası kalkülüsteki ters Hölder eşitsizliği kullanılmıştır.

Ayrıca dördüncü ve beşinci bölümde ikinci mertebeden yarı lineer dinamik denklemlerin salınım teorisi alanında delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler için bir uygulama verilmiştir. Yeni delta Hardy–Copson tipi eşitsizlikler kullanılarak, ikinci mertebeden yarı lineer dinamik denklemlerin salınımı için gerek ve yeter koşullar elde edilmiş ve birkaç salınım teoremi kanıtlanmıştır.

KAYNAKLAR

Agarwal R. P., Bohner M, Peterson A. (2001). Inequalities on time scales: A survey. *Mathematical Inequalities & Applications*, 4(4), 535-557.

Agarwal R. P., O'Regan D., Saker S. (2014). ***Dynamic Inequalities On Time Scales***. Switzerland: Springer International Publishing.

Agarwal R. P., O'Regan D., Saker S. (2016). ***Hardy Type Inequalities on Time Scales***. Switzerland: Springer International Publishing

Agarwal R. P., Mahmoud R. R., Saker S., Tunç C. (2017). New generalizations of Németh-Mohapatra type inequalities on time scales. *Acta Mathematica Hungarica*,152(2), 383-403.

Agarwal, R., Bohner, M., Řehák, P. (2003). Half-linear Dynamic Equations. In R. P. Agarwal, D. O'Regan (Ed.), ***Nonlinear Analysis and Applications to V. Lakshmikantham on his 80th Birthday*** (Vol. 1, no. 2, pp. 1–57). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Anderson, D. R. (2005). Time-scale integral inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 6(3), 1–15.

Atici F. M., Guseinov G. Sh. (2002). On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 141, 75-99.

Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T. (2015). ***The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality***. Switzerland: Springer International Publishing.

Beesack P. R. (1961). Hardy's inequality and its extensions. *Pacific Journal of Mathematics*, 11, 39-61.

Bennett G. (1987). Some elementary inequalities. *Quarterly Journal of Mathematics*, 38(4), 401-425.

Bohner M., Peterson A. (2001). ***Dynamic Equations on Times Scales: An Introduction with Applications***. Boston, MA, USA, Springer Science+Business Media New York.

Bohner M., Peterson A. (2003). ***Advances in Dynamic Equations on Time Scales***. Birkhäuser Boston Inc, Boston, MA, USA, Springer Science+Business Media New York.

Bohner M., Mahmoud R., Saker S. H. (2015). Discrete, continuous, delta, nabla, and diamond-alpha Opial inequalities. *Mathematical Inequalities & Applications*, 18(3), 923-940.

Brown, R. C., Hinton, D. B. (1992). A weighted Hardy's inequality and nonoscillatory differential equations. *Quaestiones Mathematicae*, 15, 197–212.

Caputo M. C. (2010). Time scales: From nabla calculus to delta calculus and vice versa via duality. *International Journal of Difference Equations*, 5(1), 25–40.

Chu Y. M., Xu Q., Zhang X. M. (2014). A note on Hardy's inequality. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014(271), 1-10.

Copson E. T. (1928). Note on series of positive terms. *Journal of the London Mathematical Society*, 3, 49-51.

Copson E. T. (1976). Some integral inequalities. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, 75(2), 57-164.

Gao, P., Zhao, H. Y. (2020). On Copson's inequalities for $0<p<1$. *Journal of Inequalities and Applications*, 2020(72), 1–13.

Guseinov, G. S., Kaymakçalan, B. (2002). Basics of Riemann delta and nabla integration on time scales. *Journal of Difference Equations and Applications*, 8(11), 1001–1017.

Gürses, M., Guseinov, G. S., Silindir, B. (2005). Integrable equations on time scales, *Journal of Mathematical Physics*, 46(11),113510, 1–22.

Güvenilir A. F., Kaymakçalan B., Pelen N. N. (2015). Constantin's inequality for nabla and diamond-alpha derivative. *Journal of Inequalities and Applications*, 2015(167), 1-17.

Hardy G. H. (1920). Note on a theorem of Hilbert. *Mathematische Zeitschrift*, 6(3-4), 314-317.

Hardy G. H. (1925). Notes on some points in the integral calculus, LX. An inequality between integrals. *Messenger of Mathematics*, 54, 150-156.

Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. (1934). ***Inequalities***. London, UK, Cambridge University Press.

Hilger S. (1988). *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Ph.D. thesis. Universität Würzburg, Würzburg.

Hilger S. (1990). Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results in Mathematics*, 18, 18-56.

Iddrisu M. M., Okpoti A. C., Gbolagade A. K. (2014). Some proofs of the classical integral Hardy inequality. *The Korean Journal of Mathematics*, 22, 407-417.

Kayar Z., Kaymakçalan B. and Pelen N. N. (2021). Bennett-Leindler type inequalities for nabla time scale calculus. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 18(14), 1-18.

Kayar Z., Kaymakçalan B. (2021). Hardy-Copson type inequalities for nabla time scale calculus. *Turkish Journal of Mathematics*, 45(2), 1040–1064.

Kayar Z., Kaymakçalan B. (2022a). The complementary nabla Bennett-Leindler type inequalities. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 71(2), 1–28.

Kayar Z., Kaymakçalan, B. (2022b). Some extended nabla and delta Hardy-Copson type inequalities with applications in oscillation theory. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 48(5), 2407–2439.

Kayar Z., Kaymakçalan, B. (2025). Complements of nabla and delta Hardy–Copson type inequalities and their applications. *Miskolc Mathematical Notes*, 26(1), 335–365.

Kufner A., Maligranda L., Persson L. E. (2006). The Prehistory of the Hardy Inequality. *The American Mathematical Monthly*, 113(8), 715-732.

Kufner A., Maligranda L., Persson L. E. (2007). ***The Hardy Inequality. About Its History and Some Related Results***. Pilsen, Vydavatelský Servis.

Kufner A., Persson L. E., Samko N. (2017). ***Weighted Inequalities of Hardy Type***. New Jersey, USA, World Scientific.

Lakshmikantham V., Sivasundaram S., Kaymakcalan B. (1996). ***Dynamic Systems on Measure Chains***. Springer Science+Business Media Dordrecht.

Landau E., Schur, I. and Hardy, G. H. (1926). A Note on a Theorem Concerning Series of Positive Terms: Extract from a Letter. *Journal of the London Mathematical Society*, s1(1), 38-39.

Lefèvre, P. (2020). A short direct proof of the discrete Hardy inequality. *Archiv der Mathematik*, 114(2), 195–198.

Leindler L. (1993). Some inequalities pertaining to Bennett's results. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 58, 261-279.

Liao Z. W. (2015). Discrete Hardy-type inequalities. *Advanced Nonlinear Studies*, 15, 805-834.

Masmoudi N. (2011). About the Hardy Inequality. In D. Schleicher, M. Lackmann (Ed.), ***An Invitation to Mathematics. From Competitions to Research (***pp. 165-180***)***. Heidelberg, Germany: Springer.

Nikolidakis E. N. (2014). A sharp integral Hardy type inequality and applications to Muckenhoupt weights on R. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 39(2), 887–896.

Özkan U. M., Sarikaya M. Z., Yildirim H. (2008). Extensions of certain integral inequalities on time scales. *Applied Mathematics Letters*, 21, 993-1000.

Pachpatte B. G. (1999). On some generalizations of Hardy's integral inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 234, 15-30.

Pečarić J., Hanjš Z. (1999). On some generalizations of inequalities given by B. G. Pachpatte, *Annals of the Alexandru Cuza University. Mathematics*, 45(1), 103-114.

Pelen N. N. (2019). Hardy–Sobolev–Mazya inequality for nabla time scale calculus, *Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences*, 7(2), 133–145.

Řehák P. (2002). Half-linear dynamic equations on time scales: IVP and oscillatory properties. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*, 7(3), 361–403.

Řehák P. (2004). On certain comparison theorems for half-linear dynamic equations on time scales. *Abstract and Applied Analysis*, 2004(7), 551–565.

Řehák P. (2005). Hardy inequality on time scales and its application to half-linear dynamic equations. *Journal of Inequalities and Applications*, 2005(5), 495–507.

Saker S. H. (2012). Dynamic inequalities on time scales: A survey. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 3(S)(2),1-36.

Saker S. H., O'Regan D., Agarwal R. P. (2014a). Dynamic inequalities of Hardy and Copson type on time scales. *Analysis*, 34(4), 391-402.

Saker S. H., O'Regan D., Agarwal R. P. (2014b). Generalized Hardy, Copson, Leindler and Bennett inequalities on time scales. *Mathematische Nachrichten*, 287(5-6), 686-698.

Saker S. H., Mahmoud R. R., Osman M. M., Agarwal R. P. (2017). Some new generalized forms of Hardy's type inequality on time scales. *Mathematical Inequalities & Applications*, 20(2), 459-481.

Saker S. H., Osman M. M., O'Regan D., Agarwal R. P. (2018a). Inequalities of Hardy type and generalizations on time scales. *Analysis*, 38(1), 47-62.

Saker S. H., Mahmoud R. R., Peterson A. (2018b). A unified approach to Copson and Beesack type inequalities on time scales. *Mathematical Inequalities & Applications*, 21(4), 985-1002.

Saker, S. H., Mahmoud, R. R. (2019). A connection between weighted Hardy's inequality and half-linear dynamic equations. *Advances in Difference Equations*, 2014(129), 1–15.

Saker, S. H., Sayed, A.G., AlNemer, G., Zakarya, M. (2020). Half-linear dynamic equations and investigating weighted Hardy and Copson inequalities. *Advances in Difference Equations*, 2020(549), 1-19.

Skrzypczak I. (2013). Hardy-type inequalities derived from p-harmonic problems. *Nonlinear Analysis*, 93, 30–50.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Hatice TÜNER

Eğitim Bilgileri

Lisans

Üniversite : Ankara Üniversitesi
Fakülte : Fen Fakültesi
Bölüm : Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı : 2008

Lisans

Üniversite : Bursa Uludağ Üniversitesi
Fakülte : Eğitim Fakültesi
Bölüm : İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı : 2020

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu

Tez Başlığı: ZAMAN SKALASINDA HARDY-COPSON TİPİ DİNAMİK EŞİTSİZLİKLER

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam 117 (yüz on yedi) sayfalık kısmına ilişkin, 05/01/2026 tarihinde tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı %16 (on altı) dır.

Orijinallik raporu, aşağıdaki filtreler kullanılarak oluşturulmuştur:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

05 / 01 / 2026

İmza

Hatice TÜNER

Öğrenci No	22910001028
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	☒ Yüksek Lisans ☐ Doktora

UYGUNDUR
imza

Danışman
Prof. Dr. Zeynep KAYAR

UYGUNDUR
imza

Enstitü Onayı
(Enstitü Müdür/Müdür Yrd)