

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇOK DEĞERLİ (MULTİVALENT) LOJİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Şakir ALTUNLI
DANIŞMAN: Yrd.Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

VAN - 2009

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇOK DEĞERLİ (MULTİVALENT) LOJİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Şakir ALTUNLI

VAN - 2009

KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR danışmanlığında, Şakir ALTUNLI tarafından hazırlanan “Çok Değerli (Multivalent) Lojik” isimli bu çalışma 04/02/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Hakkı DURU..... İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’ nun 23/01/2009 gün ve 2009/2-II sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

ÇOK DEĞERLİ (MULTİVALENT) LOJİK

ALTUNLİ, Şakir

Yüksek Lisans Tezi , Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

Şubat 2009, 65 sayfa

Bu çalışmanın amacı; Fuzzy Lojikte Multivalent Lojik ile ilgili bilgileri bir arada vermek ve bunlara ilişkin yapılan çalışmaları özetlemek ve Fuzzy Graflardaki bazı özellikleri incelemektir.

Anahtar kelimeler : Fuzzy graf, Fuzzy Lojik, Fuzzy Multivalent Lojik, Graf, Multivalent Lojik.

ABSTRACT

MULTIVALENT LOGIC

ALTUNLI, Şakir

Msc, Mathematics Science

Supervisor: Assist. Prof. Dr. M. Şerif ALDEMİR

February 2009, 65 pages

The purpose of this study is to summarize informations making works concerning with multivalent logic in fuzzy logic and is investigate some features in Fuzzy Graphs.

Key words : Fuzzy graph, Fuzzy logic, Fuzzy multivalent logic, Graph, Multivalent logic.

ÖN SÖZ

Bu çalışma ikili mantığın genelleştirilmesi olan çok değerli mantık ve devamı fuzzy mantık ile graf ve fuzzy teorisinde mantık üzerine yapılmış çalışmalara ilişkin gerekli temel bilgileri içermektedir. Fuzzy teorisi, mantık yapısı alanındaki en önemli araçlardan birisidir. İkili bir mantık yapısı ile başlayan ve çok değerli mantık ile yükselen fuzzy mantık daha uygun bir matematiksel model olarak ortaya çıkarılmıştır.

Bu çalışmanın başlangıcında mantığın ortaya çıkışından itibaren fuzzy mantığa kadar geçen sürede yapılmış olan çalışmalarla ilgili bilimsel süreç detaya girmeden anlatılmıştır. Daha sonra konuyla ilgili bazı temel tanım ve teoremler sırasıyla verilmiştir. Yine fuzzy mantık yapısı bakımından çok değerli mantık kavramı incelenmiş ve fuzzy de çok değerli mantık kavramı ele alınmıştır.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Yrd.Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR'e teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Şakir ALTUNLİ

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. ÖNBİLGİLER	5
3. FUZZY ve ÇOK DEĞERLİ MANTIK TEORİSİ	37
KAYNAKLAR	53
ÖZ GEÇMİŞ	56

ŞEKİLLER DİZİNİ

	sayfa
Şekil 1.1. Üç değerli mantığın bazı ilkelleri tablosu	2
Şekil 2.1. Graf tablosu	28
Şekil 2.2. Graf tablosu2	29
Şekil 3.1. Dönüşüm tablosu	40
Şekil 3.2. Bağıntılar tablosu	40
Şekil 3.3. Bağıntılarının graf ile gösterilmesi	41
Şekil 3.4. On altı bağıntı için karşılık gelen değerler tablosu	43
Şekil 3.5. On altı bağıntı için yeni değerler tablosu	45

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$G = (V, E, g)$	: Bir graf
FG	: Bir fuzzy grafi
E	Ayrıt kümesi
V	Tepe kümesi
$P(X)$	Boolean latis
L_{N_I}	Lukasiewicz mantığı değeri

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Mantık yapısı, Graflar teorisi, Fuzzy teorisi gibi alanlarda en önemli araçlardan biridir. Mantık iki değerli mantık kavramı ile çok değerli olan mantığa doğru yayılmıştır. Mesela; alışılmış bir grafin bu yapıyı tam olarak gösteremediği bir durumda fuzzy graf daha uygun bir matematiksel model olarak ortaya çıkarılmıştır. Fuzzy teorisinin kökeninin başlangıcı Zadeh (1965) tarafından atıldığı pek çok atıftan açık olarak görülmektedir.

Klasik mantık (yada iki değerli mantık) üzerine kurulu temel varsayım yani her önermenin ya doğru ya yanlış olduğu Aristo'dan beri sorgulanmıştır. “Yorum üzerine” eserinde Aristo geleceğe bağlı olan meselelerin problematik doğruluk durumunu tartışmıştır. Aristo'ya göre gelecekteki olaylar hakkındaki önermeler, ne doğru ne de yanlıştır ama olasılıkla her ikisi de değil, burada onların doğruluk değerleri belirsizdir ve en azından olaylara öncüdür.

Buradan iyi anlaşılmaktadır ki; aslında problematik olan önermeler gelecekteki olaylarla sınırlı değildir. Belirsizliğin Heisenberg (1927) prensibinin (dalga ve parçacığı aynı anda net bir şekilde saptayamama durumu, Heisenberg'in (1927) ünlü belirsizlik ilkesinin özüdür) bir sonucu olarak ,mesela, bilinmektedir ki; kuantum mekaniğinde belirli önermelerin doğruluk değerleri ölçmenin temel sınırlarına göre belirleyici değildir.

Böyle önermelerle ilgili olmak için “belirsizlik” diye adlandırılan bir üçüncü doğru değere izin vererek klasik iki değerli mantığın doğru/yanlış diye bölünüşüne kolaylık sağlamak gerekir.

Klasik iki değerli mantık, çeşitli şekillerde üç değerli mantık içine genişletilebilir. Üç değerli mantıklar bu şekilde kendi rasyonelliği ile kurulabilir. Sırasıyla 1, 0 ve 1/2 ile doğru, yanlış ve belirsizliği göstermek bu mantıklara uygundur. Yine mesela $1 - a$ ile bir a önermesinin değilini $\bar{a}$ ile tanımlamak mümkündür. Diğer ilkelere $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ gibi üç değerli mantıkta biri diğerine farklılık gösterir.

En iyi üç değerli mantığın beşi kendi köken isimleriyle yazılı biçimde aşağıdaki tabloda $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ilkelerine göre ifade edilmektedir.

a	b	Łukasiewicz $\wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$				Bochvar $\wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$				Kleene $\wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$				Heyting $\wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$				Reichenbach $\wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$			
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Şekil 1.1. Üç değerli mantığın bazı ilkelleri tablosu

Bu tabloda görülmektedir ki; tüm mantıksal ilkeller $a, b \in [0,1]$ için klasik mantıkta bu ilkellerin bilinen tanımlarına uyumlu bazı üç değerli mantıklar için verilebilir ve yeni $1/2$ doğruluk değerinin davranışı ile birbirlerinden ayrılırlar.

Mesela günümüz bilgisayarlarında işlenen mantık iki değerli olup 0 ve 1 doğruluk(voltajlı) değere sahiptir. Gerçek bilgisayarlarda mantık çipleri çıktısı ani değişir, girdi bir başlangıç değerini aştığında 0 V ile 0.5 V arasında tüm girdilerin bir çıktısını verecek ve yine 0.5 V ile 1 V arasındakileri de verecektir. Eğer çıktıya karşın girdi tertip edilebilirse bir adım (basamak) fonksiyonu elde edilebilir.

Kolayca söylemek mümkündür ki; bu üç değerli mantığın hiç biri $a \wedge \bar{a} = 0$ çelişki kanununu ve $a \vee \bar{a} = 1$ dışlanmış orta kanunu ve iki değerli mantığın diğer bazı totolojilerini sağlamaz. Bochvar üç değerli mantığı, mesela, iki değerli mantığın herhangi totolojisini sağlamaz zira ilkellerin her biri $1/2$ değerini üretebilir ve her ne zaman olursa olsun en azından a ve b önermelerinden biri bu değeri varsayarak bunu yapacaktır.

Bu sebeple, klasik totoloji kavramı yerine yarı totoloji kavramını genişleterek ortaya koymak doğru olacaktır. Söylenebilir ki; kendi önemsel değerlerine yönelen doğruluk değerlerinin 0 (yanlış) veya 1 (doğru) dışında $1/2$ gibi başka doğruluk değeri de olabileceği yarı totolojileri kurmak gerekecektir. Aynı durum çelişkinin genişletilmiş yarı çelişki içinde geçerlidir.

Bir defa çeşitli üç değerli mantık anlamlı ve faydalı kabul edilebildi mi $n \geq 2$ doğruluk değerlerinin keyfi bir sayısı için n değerli mantığa genelleştirmeleri yapmak

doğal olacaktır. Birkaç n değerli mantık otuzlu yıllarda genellenmiştir. Herhangi verilen n değeri için bu genelleştirilmiş mantıklarda doğruluk değerleri aslında $[0,1]$ aralığı içinde rasyonel sayılarla ifade edilmektedir. Bu değerler 0 ve 1 arasında ve bunlar hariç aralıklarda sonsuzda bölünme ile elde edilebilmektedir.

n değerli bir mantığın doğruluk değerlerinin T_n kümesi

$$T_n = \left\{ 0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1 \right\}$$

olarak ifade etmek mümkündür. Bu değerler , doğruluk derecesi olarak belirtilir. İlki Lukasiewicz (1930) mantığı ile başlayan n değerli mantığın ilk serisi $n \geq 2$ için üç değerli mantıkla genelleştirilmiş ve devam etmiştir. Görülmektedir ki; mantıkla oluşturulan farklı değerlerin sayısı önceden 0 ve 1 arasında değişirken sonra $\{0, \dots, 1\}$ sonsuz değerlerde değişmiştir. Modern mantık olarak da ifade edilen n değerli mantığın öncüsü ise Leibniz'dir (1972). Leibniz'in (1972) tasarımıladığı evrensel sembolik dil ile bu dile dayalı evrensel matematik, modern mantığın olduğu kadar, elektronik beyin diye adlandırılan bilgisayarın yapı çekirdeklerini oluşturmuşlardır. Modern mantığın gerçek kurucuları Boole (1854) ile Frege'dir (1893). Whitehead ve Russell (1910) daha sonraları kurulmuş bu temelleri işlemiş ve yöntemleri geliştirmişlerdir. İşte bu geniş çaplı çok değerli mantık ile beraber fuzzy mantığı oluşmuştur. Mesela, bu işin nasıl çalıştığını görmek için “hangi üç odada verilen olası üç çıktı (sıcak, soğuk, nötr) tipi klima çıktısı olabilir?” sorusunu düşünürsek, istenen daha düşük yada daha yüksek girdiler olduğunda iş kolay ama ikisi arasında nasıl olacağı belirlemek önemli olmaktadır.

Bu doğrultuda çok değerli mantık, Fuzzy Mantık ve Fuzzy Graflarla ilgili tanım ve teoremler, Russell (1903), Lukasiewicz (1930), Hilbert (1918), Brower (1923), Black (1937), Birkhoff (1948), Heyting (1956), Curry ve Feys (1958), Zadeh (1965), Goguen (1967), Gentilhomme (1968), Netto (1968), Zadeh (1968), Dienes (1969), Goguen (1969), Rescher (1969), Brown (1971), Lee (1972), Leibniz (1972), Sinclair (1972), Kling (1973), Lakoff (1973), Zadeh (1973), Chapin (1974), Goguen (1974), LeFaivre (1974), Kaufmann ve Zadeh (1975), Maydole (1975), Zadeh (1975a; 1975b), Gaines (1976a; 1976b), Giles (1976), Pinkava (1976), Sanchez (1976), Willaeyes ve Malvache (1976), Dubois ve Prade (1980), Klir ve Yuan (1995), Günal (1997), Chen ve Pham (2001), Lucas (2002) çalışmalarında verilmiştir.

Bu çalışmanın amacı; Fuzzy Mantıkta çok değerli mantık ile ilgili bilgileri bir arada vermek ve bunlara ilişkin yapılan çalışmaları özetleyerek Fuzzy mantıktaki bazı özellikleri incelemektir.

Bu çalışmanın diğer bir yanı da Fuzzy çok değerli mantık ve Fuzzy Grafların tanım ve teoremleri ayrı bir matematik dalı olarak uygulamacıların hizmetinde olduğunu göstererek Fuzzy çok değerli mantığın teknoloji, mühendislik ve tıp alanlarında uygulamalarının yapılabilirliklerine dikkat çekmektir. Mantığın uygulamaları alanları arasından bilgisayar adı verilen otomatik makineler de bulunur. Modern yaşam bize gündelik yaşamımızda bile yararlar sağlamakta; daha sağlam akıl yürütmeler yapmamız, başkalarının düşünme zincirlerini daha başarılı izleyip eleştirebilmemiz için gerekli bilgileri vermeye devam etmektedir.

2. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, daha sonraki kısımlarda kullanılacak olan sürece yönelik bilgilerle temel tanım ve örnekler verilecektir.

2.1. Mantığın Oluşum Süreci

Mantık kelimesi, Yunanca Logike kelimesinin Arapça tercümesidir. Logikos, logos'a yani söze, akıl yürütmeye ait demektir. Kelime anlamından da anlaşılacağı gibi mantık kelimesi hem akıl hem de söz ile ilgilidir.

Günlük yaşamımızda mantık için mantıklı, mantıksız gibi deyimleri kullanır ve genellikle sözleri birbiri ile uymayan kimseler mantıksızlıkla suçlanır; davranışlarında, kararlarında aklına değil de, söz gelişi duygularına önem kişileri de aynı şekilde eleştiririz.

Günlük yaşamımızdaki anlamının paralelinde mantık sözcüğünün anlamı; çıkarımları denetlemek için geliştirilmiş olan yöntemi anlıyoruz. Çıkarım, eldeki bilgilerden yeni bilgiler türetme, eldeki verilerden bir takım sonuçlar çıkarma işlemidir. Eldeki verilerden beklenen sonuçların çıkıp çıkmadığını araştırmağa da denetleme işlemidir. Dikkat etmemiz gereken bir noktada mantığın klasik (iki değerli) ve modern (çok değerli) olarak ikiye ayrıldığıdır.

2.1.1. Geleneksel (formel) mantık

Aristo, mantığın babası, mantığı tanımlamayı unutmuştur. Belki de bu yüzden, bugüne kadar bir mantık tanımı üzerinde hem fikir olunamamıştır. Ama buna karşılık, herkes, bu disipline, onun temel özelliğine bakarak formel mantık olarak bakar ve Aristo'dan günümüze kadar da böyle öğretilmiş gelmiştir. Çok genel bir ifadeyle, formel mantığın çıkarım tekniklerini konu edindiği ve çıkarımların geçerliliği ile, önermelerin içeriğinden, bu önermelerin taşıdıkları özel anlam kapsamından bağımsız olarak, sadece onların formu yönünden ilgilendiği söylenebilir.

2.1.1.1. Geleneksel (formel) mantığın konusu

Geleneksel biçimiyle formel mantık, kategorik ve model kavramlar mantığından oluşur ve bu haliyle bileşik önermeler mantığının çok küçük bir bölümünü de içerir.

Aristo mantığı, temelinde, bir soyut kavramlar mantığıdır; “kırmızı”, “insan”, “ölümlü”; A, B, C ile gösterdiğimiz kavramlar olsun. Aristo, kendi kategorik yargılar mantığında, yargılanan dört ifade içinde bu aşağıdaki gibi ele alır:

- “Tüm A’lar, B’dir”,
- “Hiçbir A, B değildir”,
- “Bazı A’lar, B’dir”,
- “Bazı A’lar, B değildir”.

Bu önerme örneklerine göre o, “mantıksal kare” denilen bir grafiğe göre kurallar koymuştur. O, tasarım yöntemini, buna dayanarak, bir ve aynı “orta terim”e sahip iki öncül önermeyi içeren ve bu öncüllerden kalkarak, orta terimi içermeyen bir önerme (sonuç) elde etme yolu olarak gösterir. Bunu iki örnekle açıklayalım:

- (i) Tüm Alar B’dir; tüm B’ler C’dir: O halde tüm A’lar C’dir.
- (ii) Hiçbir A, B değildir; Bazı C’ler A’dır: O halde bazı C’ler B değildir.

Aynı şekilde Aristo, modelitenin zorunluluk ve olanak olarak görülmesi halinde, “her A zorunlu olarak B’dir” gibi model yargıları da ele alır, model yargıların kapsayıcı bir tasarımını kurmaya çalışır.

Antik mantık, hem Aristo hem de Stoa okullarında, dil bilgisinde “bileşik” adıyla anılan yargıları da aynı tarzda ele alıp işlemiştir.

Bu yargılar,hipotetik (koşullu), konjunktif (birleşik) ve disjunktif (ayrışıklı) sonuçlar verirler. Tıpkı, basit yargıların kategorik ya da model sonuçlar vermesi gibi. Sözü edilen bu çıkarım kuralları, Antikçağdan buyana, hiçbir önemli değişikliğe uğramadan aynen kalmışlardır.

2.1.1.2. Geleneksel (formelleşmemiş) mantık

Geleneksel mantık, formelleşmemiş mantıktır; çünkü bu mantık günlük dildeki sözcüklerle iş görür. Bu mantıkla doğruluk, sözel ifadenin yapısına göre değil, tersi bu ifadenin işaret ettiği görsel anlama göre temellendirilir. Onun çıkarım yöntemlerini çözümlemesi, ne var ki, sözcüğün iki anlamlı olması halinde bile, dikkati çekecek kadar yanılgıdan arınmıştır. Ama bu mantık, görevini, önerme ve çıkarımların temel türlerinin ancak bir kaç adediyle sınırlar. O, başlangıçtan beri kendini bunlarla sınırlamıştır. Ama ne var ki, bu mantığın elde ettiği sonuçlar, sadece “sağlıklı insan aklına, sağduyuya dayalı ilkelerin apaçıklığını onaylamaktadır.

2.1.1.3. Geleneksel mantıkta metodoloji

Aristo’nun “Organon”unda aldığı biçimiyle geleneksel mantık, sadece formel mantıkla da sınırlı değildir. Geleneksel mantık, aynı zamanda metodolojik mantığın birkaç formu için de geçerlidir.

Organon’un en büyük bölümü, Aristo’nun “İkinci Analitikler” de formüle ettiği ikili (dedüktif) bilim kuramıdır. Aristo burada, geometrinin kendi zamanında ulaşmış olduğu ve yüzyıllar boyunca da kesin bir dedüksiyona olanak tanımış olan biçimini örnek olarak alıp olağanüstü bir başarıya ulaşmıştır.

Öyle ki, Spinoza zamanında *more geometrico*, “dedüksiyonun sağlamlığına dayanarak en son şeye kadar ulaşmak” olarak anlaşılmıştır. Aristo’nun dedüktif yönteminin en önemli dayanaklarını anımsayalım: Her şeyi kanıtlamak olanaksızdır, çünkü bu geriye doğru *in finitum*’a, sonsuza kadar gitmek olurdu. Bu nedenle, yapılabilecek olan şey kanıtlanamaz aksiyomlardan yola çıkmaktır ki, bir kuramın ilkeleri de bu tür aksiyomlardan türetilir. Bu yüzden de, sonsuz bir geriye dönüşe başvurmadan, her şeyi tanımlamak olanaklıdır, yani bir tanımlanamayandan hareket etme gereği vardır. Ama bu tanımlanamayanın apaçıklığı sezgisel olarak bilinir ve tanımın oluşumu ve bizzat aksiyomlar açık olarak tasarlanırlar. İşte, buna göre dedüksiyon, yine dedüktif bir kuramdan kalkılarak (formelleşmemiş) mantık yardımıyla konumlanmış olur.

Eskiçağda, mantığın (apaçık olduğu tasarlanan) aksiyomlardan türemiş olduğu konusunda herkesin aynı kanıda olduğu kuşkuludur. Dedüksiyon, aksiyomlardan türemiş haliyle formel mantığın ancak bir yüzüdür. Çünkü geleneksel mantık, sadece bilimlere yönelik bir uğraş değildir, hatta daha çok, “olasılı” çıkarımlar denen retorik argümantasyon için de kullanılır ve özellikle bu iş için öğretilir.

Böyle olduğu içindir ki, eski mantıkçılar, kendi formel mantıklarının dayandığı kurallar içerisinde çıkan ve ilk kez günümüzde sistemli olarak ele alınmış olan çıkarım bozuklukları da keşfetmişlerdir. Hatta onlar, bu konudaki güçlükleri aşmak için şu ya da bu tarzda “meta-mantıksal” bir tasarımı önceden gerektiren bir düşünce grameri olması gerektiğini bile vurgulamışlardır.

Yanlış çıkarımlarla ilgili tartışmalar, geleneksel mantıkçıları, günümüz mantıkçılarınca yeniden tartışma konusu yapılan paradokslara yöneltmişse de, geleneksel mantıkçıların önerdikleri çözümler, formel düşünme yasaları yerine ifadelerin anlamlanması üzerine dayatılmıştır.

Yeniçağ, metodolojik mantığı, indüktif bilim metodolojisinin formülleri yetkinleştirmeyi denemiştir.

Geleneksel mantık, formelleştirilmiş mantığa göre çok daha sınırlı olan kendi düşünsel işlemleri içinde, bugün artık mantığın dışına atılmış olan sorunlar üzerinde de uzun uzun durmuştur. Bu sorunlar, bilgi-kuramsal, psikolojik, fenomenolojik ve hatta metafiziksel türden sorunlardır.

2.1.2. Formelleştirilmiş mantık

On dokuzuncu yüzyıldan bu yana yeni bir mantık geliştirilmiştir ki, bu mantık geleneksel mantığı genişletmiş ve ona göre çok önemli bir gelişme göstermiştir.

2.1.2.1. Mantık cebiri

Formelleştirilmiş bir mantık, bir program halinde ilk kez Leibniz (1972) tarafından düşünülmüştür. O, bu konuda kendi cebirsel hesabını örnekle almıştır. Bu

mantık, dedüksiyona dayalı işlemleri teknik simgelerle yapan karakterler hakkındaki işlem kipleri modus operandi per characteres olarak düşünülmüştür.

Leibniz (1972), bir tümel karakteristikler, gerçekleştirmeyi umuyor, böylece tüm bilimsel bilgiyi bir formülasyon altında toplamak istiyordu. Ama bir mantık cebiri, ilk kez on dokuzuncu yüzyılın ortalarında Boole (1854) tarafından gerçekleştirilebilmiştir. Daha sonra “mantık cebiri” olarak tam şeklini almıştır. Bu mantık cebiri artık aşılmış olan bir cebirdir ve büyük bölümüyle günümüzün soyut cebirini ilgilendirmektedir.

2.1.2.2. Formelleştirme düşüncesi

Formelleştirilmiş bir sistem şunları içerir:

- (i) Temel simgeler ve yapısal kanunlar (yasaları) içeren bir simgeler topluluğu,
- (ii) Gerekli tanımlar,
- (iii) Temel önermeler (aksiyomlar) ve dedüksiyon kuralları.

Böyle bir sistemde dedüksiyonlar önermelerin herhangi bir yorumundan bağımsızdırlar. Aksiyomlar ve yasalar, onlara bir anlam yüklemekten önce, yani önceden sağlanan bir uzlaşım ile, ilgili oldukları alanlar için tasarlanırlar. Uygulamada, simgeleri geleneksel mantık diline çevirmek olanaklıdır; ama bu çeviri işlemleri, günlük dilin bulanıklığından arınmış oldukları ve başka türden yorumlara “dönüştürülmedikleri” sürece sağlıklı olabilir.

Formelleştirilmiş bir sistemi karakterize eden şey, böyle sistemin, yapı ve dedüksiyon kuralları gibi yoruma açık olmaması, yorumlardan bağımsız olmasıdır. Simgeler, bu sisteme sadece dıştan bakıldığında sağlam bir görünüm vermekle kalmazlar; hatta daha çok, ifadelerin kuruluşu ve bu ifadeler hakkındaki dedüksiyonlar için sınırsız olanaklar sağlarlar.

Geleneksel mantıkta, sözel sentaksa dayalı olduklarından, kuruluş olanakları çok sınırlıdır. Buna karşılık, formelleştirilmiş bir sistemde yapma simgelerle (yarı) işlem yapılır ve bu işlemler her zaman tekrarlanabilir ki, formelleştirilmiş bir sistem, giderek karmaşılaşan ifadeler hakkında da rekursif kuruluşlar yapma olanağını sağlar. Dedüksiyonlar, dedüksiyon kurallarının her zaman kullanılabilir ve tekrarlanabilir

olma özelliğine dayanılarak kurulurlar, Tanımlar ise rekursiftirler ve bu yüzden sınırsız bir gelişmeye izin verirler.

2.1.2.3. “Klasik” formelleştirilmiş mantık

Formelleştirilmiş mantık, kullanıma elverişli bir form içinde, ilk kez. Frege (1893) tarafından ortaya atılmıştır, ama tanınması, Whitehead ve Russell’in (1910) “Principia Mathematica” adlı büyük yapıtlarıyla olmuştur. Biz burada, ancak sistemin ilkelerini ifade edeceğiz:

(i) İfadeler üç tarzda sembolleştirilir. Önce basit ifadeler gelir. Bunlar özne ve yükleme göre çözümlenmezler; p , q , r gibi basit değişkenlerle gösterilirler ya da bir ‘yüklemi bir veya daha çok özneye ait kırlarlar. Böylece “ x bir a ’dır”, “ x ve y , r ile ilişkilidir” ya da “ a , k özelliğine sahiptir” türünden önermeler yapılmış olur.

Böylece önerme işlemleri, yani doğru (evetleyici) ifadeler, değilleyici (olumsuz) ifadelere, hatta birleşik (konjunküf), seçeneksel (veya), koşullu (eğer, öyleyse), eşdeğer (denk) (sağın anlamıyla “aynen” veya eşit) ifadelere dönüştürme işlemleri ortaya çıkar.

Niceleyicilerle temsil edilen ve tekil ya da tümel bir ifadeye dönüşen genelleştirmeler, “ x , bir a ’dır” genelleştirmesi “tüm z ’ler için “ x ” bir a ’dır”, “bazı x ’ler için: x bir a ’dır” şekline sokulur.

Önerme işlemleri ve genelleştirmelerin bu tarza sokulmasıyla, çok karmaşık düşünceleri ve özellikle de matematikteki öndeyişsel düşünceleri betimleme olanağı doğmuş olur. Böylece matematik bu öndeyişsel düşünceler rahatça “mantıksal” olarak gösterilir.

(ii) Aksiyomlar ve dedüksiyon kurallarının küçük bir bölümü, yukarıda karakterize edilen mantıksal ifadeler için formüle edilir. Böylece şu görülmüş olur ki, klasik mantık, postulatlarını (aksiyom ve kurallarını) ancak model olmayan bir mantığın doğruladığı bir mantıktır. Oysa, klasik mantığın dayandığı postulatlardan çok daha başka sonuçlar çıkarılabilir.

(iii) Tüm önerme işlemlerini ve genelleştirmeleri, bir ilk temele dayandırarak konumlamak hiç de zorunlu ve gerekli değildir. Çünkü bunlar biri öbüründen tanım yoluyla türetilen şeylerdir.

Aynı şekilde basit tanımlarla karmaşık ifadeleri daha basit ifadelere ve günlük dile uygun bir biçime çevirmek olanaklıdır.

“Bazı x’ler için x, ‘a’dır” ifadesi “a diye bazı sayılar vardır” ifadesine;

“bazı x’ler için x, z’nin babası ve z, y’nin kardeşidir” ifadesi de

“x, y’nin kardeşlerinin babasıdır” ifadesine çevrilebilir.

Klasik mantıkta çeşitli basamaklar vardır:

Sözü edilen temeller üzerinde çeşitli zeminlere bağlı mantıklar hatta çeşitli zeminler üzerinde sınırsız sayıda sistemler kurulabilir.

(i) Öncelikle, “önergeler mantığı”, yani, analitik olmayan ifadelere dayalı önerme işlemleri yardımıyla önermeler hakkında bir mantık kurulur. Bu mantık, geleneksel mantığın koşullu, birleşik ve koşullu tasarımlarını içerir.

(ii) Daha sonra, yüklem alanında, kendileri bizzat yüklem ya da bir dizi olmayan bireylerle ilgi kurularak, yukarıdaki ilk düzene bağlı sonsuz sayıda mantıksal sistem kurma olanağı doğmuş olur.

Mantığın en basit hali sınıflar mantığı , yani bir bireyden söz edebilen kavramların mantığıdır. Bu haliyle sınıflar mantığı, kategorik önermeler üzerine kurulu geleneksel mantığın özel bir dalıdır.

Ama ne var ki, klasik mantık, iki birey arasındaki ilişkiyi, yine sınıflar mantığına dayandıran bir ilişkiler mantığı geliştirmiştir. Oysa başka türden ilişki mantıkları da kolayca geliştirilebilir. Yeni ilişki mantığı, geleneksel mantığın kavramlara dayalı ilişki mantığı için hiçbir anlam taşımayan işlemler geliştirmiştir. Bir ilişkiden öbürüne geçilebilir; ilişkiler bir araya toplanabilir. Mesela, “baba ile kardeş” ilişkisi, “babanın” ve “kardeşin” sahip olduğu ilişkileri birbirlerine zincirleme bağlamak yoluyla da kurulabilir ve aynı şey tüm akrabalık dereceleri için uygulanabilir. Bir ilişkiyi, ilişkinin kendisinden yola çıkarak ele almakla, çok daha fazla ilişki potansiyeli kurgulanabilir. Örneğin “çocuğun” sahip olduğu ilişkiler, “torunun”, “torunun torununun”, v.b. sahip olduğu ilişkileri potansiyel olarak kapsar. Bu ölçüte göre sınıf, bir bireye ya da bir gruba belli bir ilişkiye dayalı olarak uygun

düşen şey diye tanımlanabilir. Örneğin “x’in soyundan gelenler”, “a’nın soyundan gelenler” gibi

(iii) Başlangıçta verilen mantıklardan daha yüksek düzeydeki mantıklara çıkılır.

İkinci düzen mantığı, sadece sınıflar ve bireyler hakkındaki ilişkileri görmeye değil, hatta sınıfların sınıflarını, bağıntı sınıflarını, sınıflar hakkındaki ilişkileri, v.b. görmeye de olanak sağlar. Mesela, her tamsayı, sınıflar hakkındaki bir sınıf olarak görülebilir; yani bir tamsayı, öğeleri halka halka bir bağlaşım içinde bulunabilen diziler hakkındaki bir sınıf (ya da ortak özellik) olarak konumlanabilir.

Leibniz’e (1972) göre özdeşlik, aynı özelliklere sahip bireyler hakkındaki bir ilişki olarak tanımlanabilir. Bu bağlamda, Russell’in (1903) ünlü betimleme (deskripsiyon) kuramına bakmak gerekmektedir. Bu kuram, bir bireyi özellikle, ama sadece ona uygun düşen özellikle karakterize eden ifadelerle ilgilidir. “Deskripsiyonlar” a başvurmak kaçınılmazdır. Ama her hangi bir “deskripsiyon” un bir bireye varoluşsal olarak ait olması gerektiği kabul edilirse, ortaya paradoksal bir durum çıkar. İşte formelleştirilmiş mantık, tam bu noktada kendini dilin bağlayıcılığından kurtarır ve mesela “Fransa kralı keldir” önermesini, “Fransa kralı” na hiç varolmamış bir birey olarak, önermeye de bir birey hakkındaki bir sav diye bakar. Formelleştirilmiş mantık, bu önermede karmaşık bir say bulur: “Fransa’nın bir kralı vardır ve o bir tek kişidir ve o keldir”. Böyle bir say, daima doğru ya da yanlış olabilen bir anlam taşır kuşkusuz. Ona bir anlam verilmezse yapısal bir gerçeklik elde edilmiş olurdu.

Aksiyomlardan ilkeler (önermeler) türetmek, çok uzun süre Öklit geometrisinin apaçıklığının sezgisel olarak kesin biçimde kabullenilmesi yoluyla olmuştur. İlk kez, Öklitçi olmayan geometrilerin keşfiyle, bu yoldan elde edilen dedüksiyonların hayranlık verici gücü kuşkulu hale gelmiştir, Çünkü, bu gücün gerçeklikten değil, kuramın kendisinden anlaşılmıştır.

Klasik mantığın postulatları uzlaşılara dayanmasına rağmen, bu mantık uzun süre, ‘biricik ve “sarsılmaz düşünme yasaları” olarak görülmüştür. Bu görünüm, klasik olmayan mantıkların bulunması, yani klasik mantığın yasalarından başka türlü “yasa”lara dayalı çelişkisiz mantıkların yirmi ve otuzlu yılları arasında ortaya atılmasıyla değişmiş ve bu değişme yeni ufuklara yol açmıştır.

Klasik olmayan mantıkları topluca üç grupta sıralamak olanaklıdır:

(i) İlk sırada yer alan model mantıklar en az yenilikçi olanlardır. Çünkü burada klasik mantığın teoremleri yerli yerinde bırakılır. Bu mantıklarda, klasik mantığın daha da zenginleştirilmesi ve geliştirilmesi, yine klasik mantık tabanında kalınarak denenir. Bu nedenle de model mantığın yeri henüz klasik mantığın içindedir.

(ii) Klasik mantıkta bir ifade sadece iki “doğruluk değeri” ne sahiptir; yani bir ifade ya doğru ya yanlıştır. Oysa “çok değerli mantıklar” da, bir ifadenin ikiden fazla doğruluk değeri olabileceği kabul edilir. Öyle ki, örneğin üç, dört, hatta sonsuz doğruluk değerleri olabilir. Bu tür mantıklar, çoğunlukla klasik mantığın çelişki ve üçüncü halin olmazlığı ilkelerini dışta bırakırlar.

(iii) “Sezgisel tip” mantıklar matematiksel sezgicilik yandaşlarınca geliştirilmiş mantıklardır. Bunlar önce Brower (1923) tarafından formüle edilmişler, daha sonra Heyting (1956) tarafından formelleştirilmişlerdir. Sezgisel tip mantık, daha en başta klasik mantığın temel ilkelerinden olan üçüncü halin olmazlığı ilkesini bir yana atmakla, aslında çelişkiye dayanan bir mantık türüdür. Klasik mantıkta üçüncü halin olmazlığı ilkesi, aslında aksiyomlardan çıkarılır. Oysa sezgisel tip mantıkta, bu ilkenin başka türden aksiyomlardan çıkarılamayacağı gösterilmiştir.

Üçüncü halin olmazlığı ilkesinin aksiyomlar listesinden silinmesi halinde ortada çelişki diye bir şeyin olmayacağı görülür. Gerçi, üçüncü halin olmazlığı ilkesini, listeden “silmek”, onun yanlış olduğunu söylemek anlamına da gelmiyor. Hatta, Brower (1923) mantığında, üçüncü halin olmazlığı ilkesinin yanlış olduğunu söylemenin yanlış olacağı gösterilir.

Üçüncü halin olmazlığı ilkesini silmek, “doğru ile yanlış arasında” bir ara-değer olduğunu söylemek de değildir. Bu mantıkta aslında hiçbir şey savlanmaz, hiçbir şey değillenmez. Sadece, üçüncü halin olmazlığı ilkesinin dedüksiyon için kullanılamayacağını belirtmekle yetinilir.

Brower (1923)-Heyting (1956) mantığı , klasik mantığın sonuçlarından çoğunu doğrular. Bu mantık bize şunları göstermiştir: Mesela çifte değilleme, evetlemeden daha zayıftır ve üçlü değilleme tek (basit) değilleme ile eşdeğerdir.

Bu mantıkta bir başka klasik aksiyomdan kurtulmak denenmiştir. Minimal mantığı sadece üçüncü halin olmazlığı ilkesini “silmek” ile yetinmez, “yanlıştan öncül

çıkar” (ex falso sequitur quodlibet) aksiyomunu da atar. Ama bu yapılırken yine Brower (1923)-Heyting (1956) mantığının teoremlerine dayanılır. Bu çalışmalar bize şunu göstermiştir ki, değilleme işlemleri çok yüksek derecede çeşitli yorumlara bağlı işlemlerdir.

2.1.2.4. Klasik olmayan mantıkların durumu

Klasik olmayan mantıkların teknik sağlamlığı kuşkusuz ki tamdır. Bunlar sağlam bir kurguya sahiptirler ve çelişkiyi dışta bırakırlar. Onların keşfi, klasik mantığın hiç de yetkin olmadığını ve mutlak bir geçerliliği bulunmadığını iyice göstermiştir.

Artık mantık, aynı mantıksal işaretlerin belirli mantıksal yasalara uyduğu bir bütün değildir. Formelleştirilmiş iki değişik sistem, simgeleri değişik biçimde yorumlarlar. Bu yüzden, çok değerli mantıkları, klasik mantığın “doğru” ve “yanlış” değerlerine bakarak, doğru ile yanlış arasında bir ara değer konumlayan mantıklar olarak görmemek gerekir. Bu mantıkların içerdiği değerlerden en az biri “doğru” ya da “yanlış” dan başka bir değer olmalıdır.

Ama çeşitli klasik olmayan mantıkların değerlerini ve işlemlerini nasıl kavrayabiliriz? Başka bir deyişle, bu mantıkları tanımamıza yarayacak bir model var mıdır? Buna hem evet, hem de hayır denebilir. Bu mantıkların gerçekliğe uygulanmasını sağlayan modeller geliştirilmiştir.

Mesela kuantum mekaniğini çok değerli mantıklar yoluyla yorumlamak denenmiştir ve görülmüştür ki, kuantum mekaniğinin çok değerli mantık ve modelite mantığı terimleriyle betimlenmesi, ortaya birbirine karşıt iki ayrı yorum çıkarmıştır (Heisenberg, 1927).

Çok değerli mantıklara bağlı yorumlar arasında en doyurucu olanlar Brower (1923)-Heyting (1956) mantığı ile yapılanlar olmuştur. Aslında bu mantık, nesnel durumu klasik mantıktan çok farklı biçimde de betimlemez. Ama bu mantık, daha yüksek kesinlik derecesi peşindeki tutkulu insani tutuma daha uygun düşebilir.

Burada bir “p” sayı “p doğrudur” tarzında yorumlanmak zorunda değildir. Yorum daha çok “p kanıtlanabilir” tarzındadır. Bu nedenle, özellikle günümüzün matematikçileri, bizzat kendi matematiksel kuramlarını betimlemekte sezgici tip mantığa başvurumaktadırlar.

2.1.2.5. Derleyici (kombinatorik) mantık

En genel formu, yani tüm formelleştirilmiş sistemlerde ortak olan formu bulma denemesine, simgeler kombinasyonu, ideler kurgusu olarak derleyici (kombinatorik) mantık diye ifade edilir.

Burada ikili bir hesap söz konusudur. Bir yanda değişkenlere bağlı bir hesap (lamda–konversiyonu), öbür yanda değişkenleri içermeyen kombinatörler hesabı bir araya getirilir. Yüklemler türlerine göre, bu hesaplardan biri ya da öbürü dilin aynı kategorisine ait deyimleri ele alırlar. Bir hesap ya da hesap makinesi ile yapılan her dedüksiyonun lamda –konversiyonu ile kanıtlanabileceği gösterilebilir (Günal, 1997).

2.1.3. Formelleştirilmiş mantığın kullanımı

Geleneksel mantık, okul örneklerinde ve ifadesel biçimlerde çok yaygın olarak kullanılır. Ama geleneksel mantığın, bir bilimin içeriğini tam olarak ifade etmek ve bilimsel çıkarım sürecinin çeşitliliğini doğrulamak işinde açıkta dışta kaldığı görülmüştür.

Formelleştirilmiş mantığın gösterdiği gelişme, onun bilimlerde kullanılmasına yol açmıştır. Bu matematikte gerçekleşmiştir. Formelleştirilmiş mantığın matematikte kullanımı üç form gösterir:

(i) Matematik tanımsal yolla mantığa indirgenir.

(ii) Bir bilimsel disiplin, mantığın bir kullanımı ya da uzantısı olarak ele alınır.

Burada iki durumu birbirinden ayırmak gerekir: Biri; kullanım, mantığa yabancı

işlemleri ve işaretleri içermez iken diğeri; kullanım, “mantıksal olmayan” işlemsel işaretleri içerir.

(iii) Ya da tersine, mantık, formelleştirilmiş matematiğin bir alt bölümü olarak görülür.

2.1.3.1. Matematiği mantığa indirgeme denemesi

Leibniz (1702), kendi mantıksal hesabı ile tüm bilimleri dedüksiyon ile doğrulayabileceğini düşünmüştü. Buna karşı biz şunu yinelemek zorundayız; doğa bilimlerinin formelleştirilmesi bugüne kadar gerçekleştirilememiştir. Gerçi klasik mantığın ustalarının, çabalarını matematiğin formelleştirilmesine yönelttiklerini görürüz. Whitehead ve Russell’in (1910) büyük yapıtlarının adı da zaten bunu (Principia Mathematica) gösterir. Üç ciltlik yapıtın ilk iki cildi tamsayılar görelî sayılar ve düzen sayıları kuramının tıpsel bir formelleştirmesidir ve bu çabaya daha Frege’nin (1893) “Aritmetiğin Temelleri” adlı önemli yapıtında da rastlarız.

(i) Bu yapıtlarda sadece matematik kavramları formüle edilmez tersine matematiksel kavramlar mantıksal kavramlara geri götürülür

Aynı şey sonsuzluk (infinite) ve sonluluk (finite) konusunda da yapılır. Matematiksel kavramların indirgenmek istendiğı mantıksal kavramlar çok karmaşıktırlar. Biz bir sayma sayısını (kardinal sayı) sınıfların sınıfı olarak kabul etmişizdir. Bir görelî sayı ise bir işaretler sınıfıdır. Ama bunları yapabilmek için önce özel aksiyomlara başvurma gereğı vardır.

(ii) İşte burada temel güçlükler çarpılır. “Principia Mathematica”dan önce, Frege (1893) bazı postulatlarıdaki çelişkilere işaret etmişti. Bu çelişkilerin ilk türü olarak yalancı paradoksu yeniden gündeme getirilmişti: “Ben yalan söylüyorum” ya da “şimdi yazdığım tümce yanlıştır” savları sağlam ve somut bir yapıya sahip görünürler ama, buna rağmen içlerinde bir çelişki taşırlar.

İkinci tarz paradoksları Russell’a (1903) borçluyuz. Biz “k” yı kendinden başka elemanı olmayan bir sınıfın özelliği sayarsak, “herhangi x için: x bir k’dır” önermesi, tanım gereği “x bir x değildir” önermesi ile eşanlamlı olur. Biz, özel bir durum olarak x k olduğunu düşünürsek, “k bir k’dır” ‘e “k bir k değildir” önermelerinin ikisi de geçerli olur ki, burada açık bir çelişki vardır.

Buna dayanılarak bu çelişkilere paradokslar denmesi adet olmuştur. Gerçekte, burada antinomiler söz konusudur. Antinomiler, ait oldukları sistemleri çelişkili kılarlar. Okuyucu, bu türden antinomilere bakarak bunları sofizmal (safsata) sayabilir ve insanın sağlıklı sezgisel anlayışının bunları yadsıyacağını söyleyebilir. Ne var ki, sağlıklı sezgisel anlayışının teknik güçlüklerin üstesinden gelemediği anlaşılmıştır. Öbür yandan, okuyucu bu paradoksların pratik hayat için önem taşımadıklarını da söyleyebilir. Ama formelleştirilmiş mantık kuramcısı için bu paradokslar, kendi formelleştirme çabaları için ciddi tehlikelerdir. Bu paradokslar bize, düşünsel işlemlerimizde kullandığımız kavram ve kavram gruplarının kurulmasında belli sınırlara gelip dayandığımızı göstermiştir ki, bunlara dikkat etmeden yapamayız.

(iii) Russell’in (1903) “tipler” kuramı paradoksların yarattığı güçlüklerin giderilmesi için yeterli bir çözüm sunmaktadır. Basitçe ele alındığında bu tipler, birinci türden paradoksları (yalancı paradoksu, v.b.) semantik yoldan aşmaktadırlar.

İkinci türden paradoksları aşmak için, çeşitli mantıksal tipler ya da kategoriler ortaya konmuştur. Örneğin, bireyler (tekler) sınıflar ve sınıfların sınıfları gibi. Her özne ya da yüklem, belirli bir mantıksal tipe aittir ve yüklem de daima aracısız olarak özneye göre düzenlenmiş bir tiptir. (Yalnız, burada ilişkiler mantığına ait bir durumdan söz edilmediğini belirtelim). Bu nedenle, “x bir k’dır” örneğinde, x bir sınıf ise, k sınıfların sınıfı olur.

Buna göre artık “k bir k’dır” türünden ifadelere başvurulmaz. Öyleyse çelişki, tipler kuramıyla aşılmış olmaktadır. Tiplerin benimsenmesi akla uygun görünmektedir. Ama bu tipler, kalkülü iyice karmaşık hale de sokmaktadır. Bu yüzden bu tipleri çeşidi yollardan basitleştirme denemelerine başvurulmuştur.

2.1.3.2. Mantığın mantıksal olmayan yüklem ve sembollerle genişletilmesi

Her sistem, başka bir sistemin, yani, artık tanımlanamaz türden olan nihai (sonul) simge ve aksiyomları içeren başka bir sistemin uzantısıdır. Matematiğin “Principia” daki formelleştirilme biçimi, aslında bizzat kendisi nihai (sonul) aksiyomlara dayalı olarak klasik mantığın genişletilmesinden başka bir şey değildir.

Bunun gibi, geometrinin ve doğa bilimlerinin ayrı ayrı, kendi bağlamları içinde formelleştirilmesi denemesi, yine aynı şekilde klasik mantığın genişletilmesine dayanır. Mantıksal simgelerin formelleştirilmesi, aslında doğa gerçekliğine işaret etmeye hizmet eder. Ama bu simgeler, mantıksal kategorileri belirli tiplerden kalkarak düzenlerler ki, böylece yine mantık yasalarına dayanılarak bir refleksiyona başvurulmuş olur. Örneğin doğa bilimlerinde bu tipler, fiziksel verilen ifadeye yarayan nihai (sonul) aksiyomlardır.

2.1.3.3. Formelleştirmeye dayalı genişleme

Genişletme çabası, mantıksal kategorileri altına alamayan simgelerle yapıldığında özellikle ilgi çekicidir. Hilbert (1918), aritmetiği formelleştirirken, “a” ile “a sayısının ardılı” üzerinde durur. “a” yı gösteren simge, ne bir birey (tek), ne bir sınıf, ne de bir ilişkiyi gösterir, v.b.

Ama dikkat edelim: Formelleştirilmiş bir sistem, hiç de her zaman zorunlu olarak bir mantıksal uzanımda olmayabilir. Ama bu yüzden, örneğin formelleştirilmiş bir matematiksel sistemin postulatlarını, zorunlu olarak, bir bölümünü mantıksal postulatlar, öbür bölümünü de sisteme özgü postulatlar olarak iki diziye bölmek gerekmez. İlk dizi yetkin olmayabilirse de her iki diziye birbirlerinden ayırmaya hiç de gereksinme duymayabiliriz.

Böylece mantıkçılar adım adım şuna vardılar: Onlar, artık salt mantık olarak gösterilebilecek a priori bir sistemle fazla ilgilenmiyorlar. Tersine, onları ilgilendiren, artık, tüm formelleştirilmiş sistemlerde salt bir mantığın olmadığını görmek, başka bir deyişle bu sistemlerin salt bir mantığa indirgenemeyeceğini saptamaktır. Böylece, bize

mantıksal ya da matematiksel olarak görünen tüm formelleştirilmiş sistemler üzerine bir meta-kuramsal inançlar sorunu ortaya çıkmış oldu.

2.1.3.4. Soyut cebir karşısında formelleştirilmiş mantık

Artık, çağdaş mantık, tüm çıkarım yöntemlerini tek “mantık”a indirgemekten çok, formelleştirilmiş sistemleri birbirleriyle karşılaştırma işiyle ilgilenmektedir. Sistemler, biri öbürünün uzantısı, genişlemesi olarak görülmeksizin de karşılaştırılabilirler. Bu da, birini öbürüne dayanarak yorumlamakla, birindeki geçerli bir ifadeyi, öbürünün geçerli bir ifadesiyle uzlaşma getirmekle olur.

Bu bakımdan, özellikle mantıksal ve matematiksel sistemler arasında yapılan karşılaştırma ilgi çekicidir. Öyle ki, bu karşılaştırma sonunda matematik yeni bir yönelim kazanmıştır.

Mesela “soyut cebir” üzerine yeni bir form geliştirilmiştir ve artık burada yapılan yorumlar, az ya da çok bulanık “nicel” veriler ile sınırlı değildir. Soyut cebir sistemleri, “nicelik” lerle değil, birlikler, gruplar, halkalar kümeler, v.b. ile ilgilidirler. Bu sistemler belli aksiyomlardan yola çıkılarak formelleştirilebilir ve ne var ki, bu aksiyomlar hiç da mantıksal aksiyomlar değildir. Öyle ki, bu sistemler elementer cebir işlemlerini de içerirler. Sonuç olarak, formelleştirilmiş sistemlerin iki büyük grubu olduğunu görüyoruz: Mantık sistemleri ve soyut cebir sistemleri ve son kuşak mantıkçıları için en korkutucu olan şey şudur: Bu sistemlerden biri öbüründen daha elementer ya da fundamental değildir.

Buna karşılık, bu sistemler arasında giderek bir uzlaşım sağlanabilir. Birinin elemanları ile öbürünün elemanları arasında eşbiçimsel (isomorf) bir uygunluk oluşturulabilir. Bu da iki şekilde olabilir:

1. Soyut cebir sistemleri mantıksal sistemlerin eşbiçimseli olarak görülebilirler,
2. Uzlaşımsal sayıların ve rekursif işlevlerin kullanılmasıyla, bu teknik konusunda büyük başarıya ulaşılmıştır, ayrıca mantıksal ifadeler ve mantıksal kanıtlamalar aritmetiğin ifadeleri ve işaretleri ile formüle edilebilir.

2.2. Fuzzy Mantık Süreci ve Temel Kavramları

2.2.1. Fuzzy mantık süreci

Fuzzy (bulanık) mantık veya fuzzy logic kavramı ilk kez 1965 yılında California Berkeley Üniversitesinden Zadeh'in (1965) bu konu üzerinde ilk makalelerini yayınlamasıyla duyuldu. O tarihten sonra önemi gittikçe artarak günümüze kadar gelen fuzzy mantık, belirsizliklerin anlatımı ve belirsizliklerle çalışılabilmesi için kurulmuş katı bir matematik düzen olarak ifade edilmiştir. Bu konuda bulanıklaşma anlamında flu kavramını Gentilhomme (1968) ifade etmiştir. olma yani flu kavramını Bilindiği gibi istatistikte ve olasılık kuramında, belirsizliklerle değil kesinliklerle çalışılır. Ama insanın yaşadığı ortam daha çok belirsizliklerle doludur. Bu yüzden insanoğlunun sonuç çıkarabilme yeteneğini anlayabilmek için belirsizliklerle mücadele etmek gereklidir. Fuzzy mantıkta, sonuç çıkarma veya karar verme sıfır veya birlerle ifade edilen kesin yanlış ve doğru önermeler veya var-yok gibi kesin gerçeklerle yapılır. Fakat bu şekildeki ikili mantık gerçek dünyanın belirsizliği gibi ifade etmede yetersizdir. Mesela $1+1=2$ kesin bir gerçektir ve doğruluk değeri birdir. Fakat "otlar yeşildir" ifadesi tam doğru olmamakla birlikte yanlış da değildir ve biz bunu klasik mantıkta tam olarak ifade edemeyiz. İnsan beyni ise "açık yeşil", "serin hava" veya "yüksek hız" gibi matematiksel olarak kesin olmayan belirsiz ya da değer yargıları içeren "bulanık dilsel niteleyicileri" kullanarak sağduyulu kararlar verebilir ve sonuç çıkartabilir. Fuzzy mantık, temel olarak yaklaşıklık ve kesin olmama gibi insan düşüncesinde ve doğada var olan belirsizliği kullanmaktadır ve kesin doğru veya kesin yanlış yerine doğruluk derecesi doğru yada yanlışlık belirten tanımlar kullanır. Böylelikle fuzzy mantıkta, günlük konuşmalarda kullanılan belirsiz ifadeler tanımlanabilmekte ve bu dilsel niteleyiciler kullanılarak insan benzeri sonuç çıkarma işlemleri gerçekleştirilebilmektedir. Bu sayede fuzzy mantık, bilgisayarlara dolayısıyla kontrol sistemlerine insan düşünme ve karar verebilme yeteneğinin kazandırılmasında başarılı bir yol sağlamaktadır.

Bulanık mantık kavramı yeni değildir. Yirmili yıllarda Polonya'lı mantıkçı Lukasiewicz (1930), önermelerin sadece bir veya sıfır doğruluk değeri alabildiği klasik mantıktan farklı olarak önermelerin bir ve sıfır arasında da kesirli doğruluk değeri

alabildiği "çok değerli" mantık ilkelerini oluşturdu. Otuz yedide ise kuantum felsefecisi Black (1937) yayımlanan bir makalesinde liste ya da nesnelerden oluşan kümelere "çok değerli mantığı" uygulayarak ilk fuzzy küme graflarını (eğrilerini) çizdi. Daha sonra 1965'de Zadeh bu alana adını veren " Fuzzy Kümeler" adlı çığır açıcı yazısını [Zadeh,1965] yayınladı. Zadeh bu makalede, bir kümenin tüm elemanlarına Lukasiewicz'in (1930) mantığını uygulayarak fuzzy kümeler için eksiksiz bir cebir geliştirdi. Buna rağmen, bir buhar makinesi için fuzzy mantıkla çalışan bir kontrol sistemi gerçekleştirdiği yetmişli yılların ortalarına dek fuzzy kümeler kullanım alanı bulamadı ve bu tarihten itibaren " fuzzy mantık" terimi fuzzy kümeler yardımıyla akıl yürüten herhangi bir matematik ya da bilgisayar sistemini ifade etmektedir.

Fuzzy mantığın uygulama alanları kontrol sistemleriyle sınırlı değildir. Geliştirilen son teoremler fuzzy mantığın ilke olarak, ister mühendislik, ister biyoloji ve hatta isterse ekonomi olsun, her türlü alanda sürekli sistemleri modellemek için kullanılabileceğini göstermektedir. Çoğu alanda fuzzy mantık temelli sağduyulu modellerin standart matematiksel modellerden daha yararlı ya da daha kesin sonuçlar verdiği görülmektedir.

Fuzzy kuramının merkez kavramı fuzzy kümeleridir. Küme kavramı kulağa biraz matematiksel gelebilir ama anlaşılması kolaydır. Mesela “orta yaş” kavramını inceleyecek olursak, bu kavramın sınırlarının kişiden kişiye değişiklik gösterdiğini görürüz. Kesin sınırlar söz konusu olmadığı için kavramı matematiksel olarak da kolayca formüle edemeyiz. Ama genel olarak 35 ile 55 yaşları orta yaşlılık sınırları olarak düşünülebilir. Bu kavramı grafik olarak ifade etmek istediğimizde karşımıza bir eğri çıkacaktır. Bu eğriye “aitlik eğrisi” adı verilir ve kavram içinde hangi değer hangi ağırlıkta olduğunu gösterir.

Bir fuzzy kümesi kendi aitlik (üyelik değeri) fonksiyonu ile açık olarak temsil edilebilir. Aitlik fonksiyonu 0 ile 1 arasındaki her değeri alabilir. Böyle bir aitlik fonksiyonu ile “kesinlikle ait” veya “kesinlikle ait değil” arasında istenilen incelikte ayarlama yapmak mümkündür.

Fuzzy mantık ile matematik arasındaki temel fark bilinen anlamda matematiğin sadece aşırı uç değerlerine izin vermesidir. Klasik matematiksel yöntemlerle karmaşık sistemleri modellemek ve kontrol etmek işte bu yüzden zordur, çünkü veriler tam olmalıdır. Fuzzy mantık kişiyi bu zorunluluktan kurtarır ve daha niteliksel bir

tanımlama olanağı sağlar. Bir kişi için 38,5 yaşında demektense sadece orta yaşlı demek bir çok uygulama için yeterli bir veridir. Böylece azımsanamayacak ölçüde bir bilgi indirgenmesi söz konusu olacak ve matematiksel bir tanımlama yerine daha kolay anlaşılabilen niteliksel bir tanımlama yapılabilecektir. Fuzzy mantıkta fuzzy kümeleri kadar önemli bir diğer kavramda linguistik değişken kavramıdır. Linguistik değişken “sıcak” veya “soğuk” gibi kelimeler ve ifadelerle tanımlanabilen değişkenlerdir. Bir linguistik değişkenin değerleri fuzzy kümeleri ile ifade edilir. Örneğin oda sıcaklığı linguistik değişken için “sıcak”, “soğuk” ve “çok sıcak” ifadelerini alabilir. Bu üç ifadenin her biri ayrı ayrı fuzzy kümeleri ile modellenir.

Fuzzy mantığın uygulama alanları çok geniştir. Sağladığı en büyük fayda ise “insana özgü tecrübe ile öğrenme” olayının kolayca modellenebilmesi ve belirsiz kavramların bile matematiksel olarak ifade edilebilmesine olanak tanımasıdır. Bu nedenle lineer olmayan sistemlere yaklaşım yapabilmek için özellikle uygundur.

Fuzzy mantık konusunda yapılan araştırmalar Japonya’da oldukça fazladır. Özellikle fuzzy process controller olarak isimlendirilen özel amaçlı fuzzy mantık mikroişlemci çipi’nin üretilmesine çalışılmaktadır. Bu teknoloji fotoğraf makineleri, çamaşır makineleri, klimalar ve otomatik iletişim hatları gibi uygulamalarda kullanılmaktadır. Bundan başka uzay araştırmaları ve havacılık endüstrisinde de kullanılmaktadır. Yine bir başka uygulama olarak otomatik civatalamaların değerlendirilmesinde fuzzy mantık kullanılmaktadır. Bulanık mantık yardımıyla civatalama kalitesi belirlenmekte, civatalama tekniği alanında bilgili olmayan kişiler açısından konu şeffaf hale getirilmektedir. Burada bir uzmanın değerlendirme sınırlarına erişilmekte ve hatta geçilmektedir.

Fuzzy mantık, karışık endüstriyel proseslerin ve metro sistemlerinin kontrolü ile uzman sistemlerin tasarımında kazançlı bir araç olarak ortaya çıkmıştır. Fuzzy mantık ilk olarak Amerika’da keşfedilmiş olmasına rağmen teknolojinin hızlı ilerleyişi Japonya’dan başlayıp tekrar Amerika’ya ve Avrupa’ya ulaşmıştır. Fuzzy mantık hala Japonya’da hızlı bir ilerleme seyri sürdürmektedir. Basit bulanık kontrol kurallarının kullanıldığı uygulamalarda 'fuzzy' kelimesi pazarlamada anahtar kelime durumuna gelmiş durumdadır. Japonya’da bulanık mantık araştırmaları dev bir bütçeyle desteklenmektedir. Avrupa’da ve Amerika’da çalışmalar bu muhteşem Japon başarısını

yakalama yönünde sürdürülmektedir.Örneğin NASA uzay üssü şu an fuzzy mantığı karmaşık iniş kalkış manevralarına uygulamaya çalışmakla meşgul durumdadır.

Klasik mantık ile fuzzy mantık arasındaki farkı en açık şekilde iki mantık sisteminin temelini oluşturan, kullandıkları küme teorilerini incelemekte görebiliriz.

Klasik ikili mantığın dayandığı standart küme teorisinde, herhangi bir nesne bir kümeye ya aittir ya da değildir. Bunun ortası yoktur. Yani bir nesnenin bir kümeye aitlik derecesini gösteren "üyelik derecesi" ya "birdir" ya da "sıfırdır". Mesela; beş sayısı kesinlikle tek sayılar kümesine aittir ve asla bu kümenin tümleyeni olan çift sayılar kümesine ait değildir. Ayrıca bu birbirinin tümleyeni olan iki kümeden hiç birine ait olmaması da söz konusu değildir. Bu ilke hem klasik mantığın yapısını korumakta hem de bir nesnenin aynı anda hem bir şey olup hem de o şey olmaması çelişkisini ortadan kaldırmaktadır.

Fuzzy mantığın kullanıldığı "multivalent-multi-valued" yada başka bir deyişle "çok değerli" kümelerde ise, nesneler fuzzy bir kümeye ve bu kümenin tümleyeni olan kümeye aynı anda sonsuz farklı derecelerde ait olabilir. Buradaki tek sınırlama bu iki üyelik derecesinin toplamının bir olması gerektiğidir. Mesela eğer hava, %20 serin ise %80 serin-değil olmalıdır. Fuzzy mantık bu yolla, klasik mantığı geçersizleştiren "havanın %100 serin iken %100 serin-değil" ifadesinde olduğu gibi, çift çelişkiden kaçınır. Bunun yerine nesneler birbirlerinin tamamlayıcısı olan iki fuzzy kümeye, hava %20 serin iken %80 serin-değil olması gibi aynı anda kısmen aittir. Ve bu da dilsel (linguistik) niteleyicilerde olduğu gibi kısmi çelişkilere sebep olur. Fuzzy kümeler nesnelerin %100 üye olup-olmadığı özel durumlar için klasik kümenin özelliklerini taşır ve klasik küme teorisi işlemleri uygulanabilir. Önemli bir nokta da bulanık kümedeki üyelik derecelerinin olasılık yüzdeleriyle aynı şey olmadığıdır. Olasılığı gösteren sayılar bir şeyin olup olmayacağının ölçütüdür. Fuzzy sayıların üyelik dereceleri ise bir olayın ne dereceye kadar olduğunu, bir koşulun ne dereceye kadar gerçekleştiğini gösterir; sabah hava %30 olasılıkla serin olacak önermesi sabah havanın serin olma ihtimalini gösterir; sabah hava %30 serindi veya hava %30 serin gibi ifadeler ise geçmişte veya o andaki havanın serinlik derecesini göstermektedir. Bu konudaki ikinci bir örnek de şu şekilde olabilir: X bütün sıvılardan oluşan bir küme olsun. X'in bir alt kümesi olan Y kümesi ise içilmesi zararsız olan sıvıların kümesi olsun. Farz edelim ki elimizde A ve B olmak üzere etiketi kapatılmış dolu iki şişe var.

Bize verilen bilgi ise A şişesindeki sıvının Y kümesine üyelik derecesinin %91 ve B şişesindeki sıvının Y kümesine üye olma olasılığının %91 olduğudur. Eğer bu iki şişeden birini içmek zorunda kalırsak A şişesinin tehlikesi B'ye göre daha azdır. Çünkü B şişesi onda bir olasılıkla zararlı bir sıvıyla doludur ve B şişesini içersek ani bir ölümle karşılaşabiliriz. Fakat A şişesine ait %91'lik üyelik derecesi bize şişedeki sıvının zararsız sıvılara örneğin saf suya %91 oranında benzediğini ve asla hidroklorik asit (HCl) gibi zararlı bir sıvı olmadığını ifade eder. Bu yüzden bu sıvının bize verebileceği zarar sınırlıdır ve ölüm tehlikesi yoktur. Hatta bulanık bir su olarak düşünülebilir. Şimdi etiketleri açıp olasılık ve üyelik derecesinin durumunu tekrar inceleyelim. Etiketler açıldığında A şişesinde çamurlu su B şişesinde ise hidroklorik asit (HCl) çıktığını farz edelim. Buna göre A şişesindeki çamurlu suyun Y kümesine üyelik değeri yine %91'dir; fakat B şişesinin Y kümesine üye olma olasılığı sıfırdır. Sonuç olarak üyelik derecesi, bir nesnenin herhangi bir kümeye ne derece üye olduğunu, ne derece benzediğini veya bir olayın bir şartın ne derece var olduğunu gösterir ve aldığı değer sabittir. Buna karşılık olasılık ise bir olay gerçekleşmeden önce olup-olmayacağı veya ne derece olabileceği hakkında bilgi verir ve zamana bağlı olarak duruma göre değişebilir. Üyelik derecesi daha çok bir olayın benzerlik derecesini ifade ederken, olasılık olma sıklığını gösterir.

Klasik kümede üyelik durumunu gösteren üyelik fonksiyonu ikili mantıkta bir önermenin doğru olup olmadığını ifade eder. Şimdi klasik mantığın bazı durumlarda içine düştüğü tanımlama eksikliğine bir örnek olması açısından bir örnek daha verelim: Bu örnekte genç insanların oluşturduğu bir küme tanımlamak istiyoruz. Biçimsel olarak göstermek gerekirse; $B = \{\text{genç insanlar kümesi}\}$. Yaş kavramı genelde 0'dan başladığı için kümemizin alt değerleri için değerlendirme yapmamız kolay olacaktır. Ancak diğer taraftan yüksek değerler için tanımlama yapmak bayağı zor olacaktır. İlk bir hamle olarak üst değerimizi 20 olarak kabul edelim. Bu tanımlama sonucu B kümemizi keskin küme gösterimi olarak $B = [0, 20]$ gibi gösterebiliriz. Şimdi hemen sorular olacaktır. Niçin bir insan yirminci yaş gününde gençken ertesi gün genç olarak kabul edilmiyor? Bunun yapısal bir problem olduğu açıktır zira kümemizin üst değerini farklı bir değere de taşısak aynı soruyla tekrar karşılaşacağımız muhakkaktır. B kümesini inşa etmenin daha tabi ve kolay yolu genç ve genç olmayan keskin ayrımını biraz gevşetmek olacaktır. Bunu “evet”, o genç insanlar kümesinin bir

elemanıdır veya “hayır”, o genç insanlar kümesinin bir elemanı değildir gibi keskin cümleler yerine daha esnek olan "o kısmen genç insanlar kümesine aittir." veya "o genç insanlar kümesine üye sayılamaz." gibi cümleler kullanmak suretiyle gerçekleştiririz.

Fuzzy mantıkla ilgili ilk makalesinde Zadeh iki bulanık kümenin kesişimi için minimum operatörünü birleşimi için de maksimum operatörünü önermişti. Bu yaklaşımın üyelik değerlerinin 0 ya da 1 olması durumunda keskin kümelerdeki kesişim ve birleşim işlemleriyle birebir örtüştüğü kolayca görülebilir.

2.2.2. Fuzzy mantık kavramları

Tanım 2.2.2.1.

Belli bir özelliği sağlayan nesnelerin topluluğuna küme denir. Evrensel küme bütününe içine alır.

Tanım 2.2.2.2.

X evrensel küme ve $A \subset X$ olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_A(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı $\chi_A(x): X \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonuna A nın karakteristik (belirsizlik) fonksiyonu denir.

Örnek 2.2.2.1.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ve $A = \{x_2, x_3, x_5\}$ olsun. O halde

$$\mu_A(x_1) = 0, \mu_A(x_2) = 1, \mu_A(x_3) = 1, \mu_A(x_4) = 0, \mu_A(x_5) = 1$$

olur. O halde karakteristik fonksiyon değerli X in elemanlarından oluşan A kümesi

$$A = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1)\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2.2.3.

V ve E ayrık iki küme, g 'de E 'nin her elemanını V 'nin kesinlikle farklı veya aynı iki elemanına eşleyen bir bağıntı ise (V, E, g) üçlüsüne bir graf denir ve bu $G = (V, E, g)$ biçiminde gösterilir. Yani; herhangi $e_k \in E$, eğer $v_i, v_j \in V$ ile eşleşirse bu $E \xrightarrow{g} V$ veya

$$g : E \rightarrow V, e_k \rightarrow g(e_k) = (v_i, v_j)$$

şeklindeki bağıntı ile ifade edilir.

Tanım 2.2.2.4.

(i) Bir (V, E, g) grafında; E 'nin her bir elemanı bir ayrıt ve V 'nin her bir elemanı bir tepedir.

(ii) Bir tepe, bir ayrıtın son noktası ise; bu tepe ile bu ayrıt birbirleriyle bağlantılıdır denir.

(iii) Bir grafın veya alt grafın ayrıtları sıralanabiliyorsa öyle ki; bu dizide her ayrıt tepelerinden birini kendisinden önceki ayrıtla diğerini de kendisinden sonra gelen ayrıtla birleştirebiliyorsa, bu alt grafa bir sıralı ayrıt denir.

(iv) Bir sıralı ayrıtta her ayrıtın tekrarı bir ise bu sıralı ayrıt, bir ayrıt katarıdır denir.

(v) Bir ayrıt katarının her bir iç tepesinin derecesi iki ve her bir uç tepesinin derecesi bir ise bu ayrıt katarına yol denir.

(vi) Bir ayrıt katarındaki her tepelerinin derecesi 2 ise bu ayrıt katarına çevredir denir.

(vii) Bir grafın her iki tepesi arasında bir yol var ise bu grafa birleştirilmiş graftır denir.

(viii) Grafın bir ayrıt katarı, grafın tüm ayrıtlarını kapsıyorsa bu grafa Euler grafıdır denir.

Tanım 2.2.2.5.

(i) Bir graftaki her bir ayrıta yön vererek elde edilen grafa, yönlü graf denir.

(ii) Bir grafın içindeki tepe ve ayrıtların bir kısmına sahip olan başka bir grafa, alt graf denir.

Tanım 2.2.2.6 (Graflarda Birleşim İşlemi)

G_1 ve G_2 iki graf olsun. G_1 ve G_2 'nin bütün ayrıtlarını içeren G grafına G_1 ve G_2 'nin bileşim grafı denir ve

$G = G_1 \cup G_2$ ile gösterilir.

Burada $G = G_1 \cup G_2$, $V = V_1 \cup V_2$ ve $X = X_1 \cup X_2$ ' ye sahiptir.

Önerme 2.2.2.1.

$0 < \alpha_i \leq 1$ ($i = 1, 2$) olmak üzere G_{α_i} grafı ile R_{α_i} fuzzy bağıntısı verilsin.

Buna göre

(i) $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$

(ii) $R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2}$

yazılır.

Teorem 2.2.2.1. (Ayrışım Teoremi)

$$\mu_{A_{\alpha_i}}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \mu_{\tilde{A}}(x, y) \geq \alpha_i \\ 0 & , \quad \mu_{\tilde{A}}(x, y) < \alpha_i \end{cases}$$

olmak üzere, herhangi bir $\tilde{A}$ fuzzy alt kümesi,

$$A = \max_{\alpha_i} [\alpha_1 A_{\alpha_1}, \alpha_2 A_{\alpha_2}, \dots, \alpha_n A_{\alpha_n}] \quad 0 < \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde ayrışabilir. Burada $\alpha_i A_{\alpha_i}$, A_{α_i} bağıntısının tüm elemanları α_i ile çarpılarak elde edilir.

İspat :

$$\mu(x) = \max_{\alpha_i} [\alpha_i A_{\alpha_i}] = \max_{\alpha_i \leq \mu_{\tilde{A}}(x)} [\alpha_i] = \mu_{\tilde{A}}(x)$$

olarak yazılır.

Örnek 2.2.2.2.

	V_1	V_2	V_3
V_1	0,2	0,3	1
V_2	0,2	1	0,2
V_3	0,3	0,2	1

Şekil 2.1. Graf tablosu

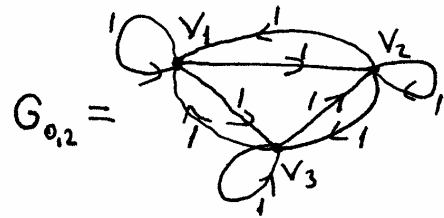
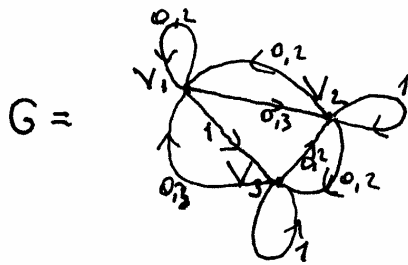
fuzzy grafi verilmiş olsun. Verilen bu grafi aşağıdaki şekilde ayrıştırabiliriz.

	v_1	v_2	v_3
v_1	0,2	0,3	1
v_2	0,2	1	0,2
v_3	0,3	0,2	1

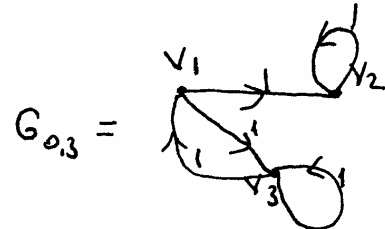
=



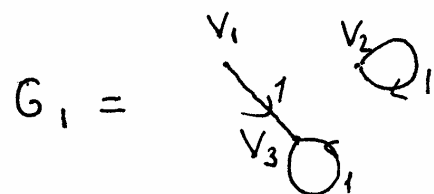
	v_1	v_2	v_3
0,2	1	1	1
	1	1	1
	1	1	1



	v_1	v_2	v_3
0,3	0	1	1
	0	1	0
	1	0	1



	v_1	v_2	v_3
1	0	0	1
	0	1	0
	0	0	1



Şekil 2.2. Graf tablosu2

Tanım 2.2.2.7 (Fuzzy Küme)

(i) $X = \{x\}$ boş olmayan noktaların kümesi olmak üzere A , X ’in bir alt kümesi olsun. X ’den $I = [0,1]$ kapalı aralığına tanımlı olan μ_A fonksiyonu ile belirtilen bir A kümesine X içinde tanımlı fuzzy kümesi denir.

(ii) Ayrıca; (i)’de tanımlanan μ_A ’ya A fuzzy kümesinin “üyelik fonksiyonu” ve herhangi $x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine de x noktasının A fuzzy kümesine üyelik derecesi yada değeri denir.

(iii) $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu; yani A , X ’in herhangi bir alt kümesi iken A ’nın

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlı karakteristik fonksiyonu A ’nın üyelik fonksiyonunun özel bir halidir.

(iv) Burada $I^X = F(X) = F$ ’ye fuzzy sınıfı denir. X ’in üyelik fonksiyonu μ_X ise her $x \in X$ için $\mu_X(x) = 1$ olur. Burada $\mu_A(x)$ değeri ne kadar çok 1 e yaklaşır ise x elemanı da o kadar A fuzzy kümesine aittir anlamına gelir.

(v) Eğer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu kümes ise X üzerinde fuzzy kümesi

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

ile de ifade edilir. Eğer X sonlu değilse

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x} dx$$

ile ifade edilir.

Her A fuzzy kümesi $X \times [0,1]$ kartezyen çarpımının bir alt kümesi olduğundan, A fuzzy kümesine X den $[0,1]$ aralığına tanımlanmış bir fonksiyon olarak bakılabilir.

Çoğu kez bir $\tilde{A}$ fuzzy kümesi ile $\mu_{\tilde{A}}$ fonksiyonu özdeşleştirilir. Diğer bir deyişle $\tilde{A}$ fuzzy kümesi yerine $\mu_{\tilde{A}}$ fuzzy kümesi deyimi kullanılır. $\mu_p : X \rightarrow [0,1]$ iken

$$\begin{cases} \mu_p(x) = t & , \quad x = x_p \\ \mu_p(x) = 0 & , \quad \text{aksi} \end{cases} \quad (0 < t \leq 1) , (x \in X)$$

ile tanımlı üyelik fonksiyonunun belirttiği p fuzzy kümesine, X in p fuzzy noktası denir. x_p ye p nin dayanağı ve t ye de p nin değeri denir.

Bir p fuzzy noktası X içindeki bir fuzzy A kümesine aittir $(p \in A) \Leftrightarrow \mu_p(x_p) < \mu_A(x_p)$ ve $x \neq x_p$ ise $\mu_p(x) < \mu_A(x)$ olmasıdır.

Tanım 2.2.2.8 (Fuzzy Alt Küme)

Sayılabılır yada sayılabılır olmayan bir E kümesi ile onun bir x elemanı verilsin. Bu durumda; $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $\tilde{A}$ 'daki x 'in üyelik derecesi yada değeri iken her $x \in E$ için $\left\{ \left(x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \right) \right\}$ sıralı çiftlerinin kümesine E 'nin bir fuzzy $\tilde{A}$ alt kümesi denir.

Tanım 2.2.2.9 (Fuzzy Graf)

E_1 ve E_2 gibi iki küme ele alalım. x , E_1 'de ve y , E_2 'de tasarlanmış noktalar olsun. $E_1 \times E_2$ çarpım kümesi (x, y) ile tanımlı sıralı çiftlerinin kümesi ve M , $E_1 \times E_2$ 'nin herhangi bir üyelik kümesi olmak üzere her $(x, y) \in E_1 \times E_2$ için $\mu_G(x, y) \in M$ olacak şekilde bir G fuzzy alt kümesine bir fuzzy graf denir.

Tanım 2.2.2.10 (X in Fuzzy Alt Kümelerinin Kümesinin Yapısı)

X in keyfi alt kümelerinin kümesi $P(X)$ olsun. $P(X)$, $\cup$ ve $\cap$ için bir Boolean latistir (Dubois ve Prade, 1980).

Kısmi sıralı (yansıma ve geçişmeli $\leq$ bağıntısına göre) bir L kümesi latistir gerek ve yeter koşul

$$\forall a \in L, \forall b \in L \text{ için } \begin{cases} \exists c \in L, & c = \inf(a, b) \\ \exists d \in L, & d = \sup(a, b) \end{cases}$$

var ve tektir. L tümleyeninin olmasıdır gerek ve yeter koşul $\forall \mathbb{O} \in X, \forall \mathbb{I} \in X, \forall a \in L, \exists \bar{a} \in L, \inf(a, \bar{a}) = \mathbb{O}, \sup(a, \bar{a}) = \mathbb{I}$ ve eğer $a \neq \mathbb{I}$ ise $\bar{a} \neq \mathbb{O}$ ve eğer $\bar{a} \neq \mathbb{O}$ ise $\bar{a} \neq \mathbb{I}$ olmasıdır. Burada $\mathbb{O}$ ve $\mathbb{I}$, L nin sırasıyla en küçük ve en büyük elemanıdır. Ayrıca $\forall a \in L$ için $\inf(a, \mathbb{O}) = \mathbb{O}, \sup(a, \mathbb{I}) = \mathbb{I}$ yazılabilir.

$\mathbb{O}$ ve $\mathbb{I}$ li bir latıs tam latıdır.

L dağılılıdır gerek ve yeter koşul “sup ve inf” karşılıklı olarak dağılılı olmasıdır.

Tanım 2.2.2.11.

Bir tümleyenli dağılılı latıs, Boolean Latis olarak adlandırılır. Bir Boolean latıs'te a nın $\bar{a}$ tümleyeni tektir. $P(X)$ in yapısı, bir Boolean latısının bildik bir durumu olan $\{0,1\}$ in Boolean latısından ortaya çıktığı şekilde görülebilir.

$\tilde{P}(X)$, X in fuzzy alt kümelerinin kümesi olsun. $\tilde{P}(X)$ in yapısı $[0,1]$ reel aralığının yapısından ortaya çıkarılabilir. Max ve min'u sup ve inf'da rol oynadığı pseudo tümlemeli dağılılı latıs $[0,1]$ dir. Pseudo tümleme 1'e tümlemedir. 0, bir hakiki tümleme değildir. $\tilde{P}(X)$, X den $[0,1]$ e dönüşümlerin kümesi olarak bir pseudo tümlemeli dağılılı latıdır. Daha açığı $\cup, \cap, ^-$ için aşağıdaki özellikler vardır:

- (i) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ (Değişme Özelliği)
- (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (Birleşme Özelliği)
- (iii) $A \cup A = A, A \cap A = A$ (İdempotent)
- (iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Dağılıma Özelliği)
- (v) $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup X = X$
- (vi) $A \cup \emptyset = A, A \cap X = A$ (Birimli)
- (vii) $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ (Yutan eleman)

(viii) $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (De Morgan kanunları)

(ix) $\overline{\bar{A}} = A$ (Tümleyeninin tümleyeni)

(x) $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ (Eşitlik formülü)

(xi) $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cup B)$ (Simetrik fark formülü)

Önceleri bilinen fuzzy küme teorisinin tek kanunu, $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$, $A \cup \bar{A} = X$ şeklindeki dışlanmış orta kanunu iken bu artık günümüzde doğru değildir.

Bir A fuzzy kümesi ne sınırlı tanımlı ne de $\bar{A}$ a sahip olduğundan A ve $\bar{A}$ nın çakışık olduğu doğal görülebilir. Bununla birlikte çakışıklık her zaman sınırlıdır, çünkü

$$\forall A , \forall x , \min(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)) \leq \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

olur.

Aynı sebepten $A \cup \bar{A}$, X i tam olarak örtmez; bununla birlikte

$$\forall A , \forall x , \max(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)) \geq \frac{1}{2} \quad (3.2)$$

olur.

Mesela; eğer X renkli nesnelerin bir kümesi ve A kırmızı nesnelerin bir alt kümesi ise $\mu_A(x)$, x in kırmızılık derecesini ölçen değerdir. Bir pembe nesne $\frac{1}{2}$ ye yakınsak bir üyelik değerine sahiptir ve böylece hemen hemen eşit oranda A , $\bar{A}$ ya aittir.

Eşitlik ile birinci mertebe adi mantıkla formüle edilen Zermelo-Fraenkel benzeri bir aksiyom oluşturma, ilk olarak Netto (1968) tarafından araştırılmış ve tam olarak Chapin (1974) tarafından geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda fuzzy kümeler başlangıçta adi kümelerin ilk belirgin teorisinin bir üst yapısı gibi görülmeden inşa edildiler. Teoride kullanılan tek ilkel bağıntı, bir üyelik bağıntısı olarak görülen üçlü bağıntıdır. 14 aksiyomu vardır ve bunların bazıları daha güçlü bir versiyona da sahiptir. Bununla birlikte Goguen'de (1974) uygulandığı gibi böyle bir teorideki zorluk göstermektedir ki, yalnızca onun modeli fuzzy kümelerinin asıl evrenidir. Goguen bu

eksikliğin üstesinden gelmek için kategori teorisinin iskeletinde fuzzy kümeler için dörtlü aksiyom inşa etmiştir.

Tanım 2.2.2.12 (Zayıf küme kapsamı)

Herhangi bir A fuzzy kümesine ait olan bir $x \in X$ elemanı alındığında $\alpha \in]0,1]$ iken

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklindeki A nın α -kesim kümesini düşünelim. Bu durumda herhangi $x \in A$ elemanı için x , A ya aittir $\Leftrightarrow x \in A_\alpha$ dır. Benzer şekilde A nın kuvvetli α -kesim kümesi de

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X : \mu_A(x) > \alpha\}$$

ile tanımlanır.

Bu bilgiler altında eğer X in tüm elemanları $\bar{A}$ ye veya B ye α ait ise yani

$$A \xrightarrow[\alpha]{} B \Leftrightarrow x \in (\bar{A} \cup B)_\alpha, \forall x \in X$$

olacak biçimde yada

$$\forall x \in X, \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(x)) \geq \alpha$$

şeklinde bir durum sağlanıyorsa A , B de zayıf içerimlidir denir ve $A \xrightarrow[\alpha]{} B$ ile

gösterilir. Buna göre;

Herhangi A , B fuzzy kümesinde α – kesimi için bazı özellikler aşağıdadır:

i) $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$

ii) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$

Operatörler arasındaki ilişkiyi şu şekilde gösterebiliriz:

$$\forall A, B \in \tilde{P}(X) \text{ için } \begin{cases} A \cap B \subseteq A \cdot B \subseteq A \cap B \\ A \cup B \subseteq A \hat{+} B \subseteq A \cup B \end{cases}$$

Tanım 2.2.2.13 (Simetrik fark)

X in elemanlarının A ve B ye bağlı olan $A \nabla B$ fuzzy kümesi, “eğer B ye ait olduğundan daha fazla A ya ait veya tersine $\forall x \in X$ için

$$\mu_{A \nabla B}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$$

olacak biçimde sağlanıyorsa” simetrik fark A ve B kümeleri arasında söz konusudur denir.

A ya ait B ye ait olmayan yada tersine ve B ye ait A ya ait olmayan elemanların $A \Delta B$ fuzzy kümesi, $\forall x \in X$,

$$\mu_{A \Delta B}(x) = \max[\min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)), \min(1 - \mu_A(x), \mu_B(x))]$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.2.14 (Sınırlı fark)

X in elemanlarının A ve B ye bağlı olan $A|-|B$ fuzzy kümesi B ye ait olduğundan daha fazla A ya ait veya $\forall x \in X$ için

$$\mu_{A|-|B}(x) = \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x))$$

olacak biçimde sağlanıyorsa sınırlı fark A ve B kümeleri arasında söz konusudur denir (Zadeh, 1975b).

Klasik $A - B$ ye genişletilebilir.

Tanım 2.2.2.15.

L herhangi bir küme olsun. Bir A L –fuzzy kümesi X evrensel kümesinden L ye bir μ_A fonksiyonu ile birleştirilir (Goguen, 1967). Böyle bir latis (grup) yapısı $P_L(K)$ ile gösterilir ve X üzerinde L –fuzzy kümesinde yapı oluşturur. İlk olarak L bir latis olsun. O zaman L –fuzzy kümelerinin kesişim ve birleşimi,

$$\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = ebas(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = eküs(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

olur. Dikkat edilir ise, L bir lineer sıralı olmadıkça, L –fuzzy kümelerinin üyelik değerleri daima karşılaştırılmaz. Üstüne üstlük, daha zengin bir tanım yapabilmek için, dağılımlı ve tümlene gerek. Bir Brouwerian latisi bir L latisidir öyle ki $\forall a \in L$, $\forall b \in L$ için $\{x \in L : \inf(a, x) \leq b\}$ biçiminde en az bir üst sınıra sahiptir ve $a \alpha b$ ile gösterilir. $a \alpha b$, b ye göre a nın kısmi pseudo tümlemesidir (Brower, 1923). Mesela,

bir en büyük eleman olarak $\mathbb{I}$ e sahip olan bir lineer sıralı küme, bir Brouwerian latistir. Bir dual Brouwerian latisi, $\forall a \in L, \forall b \in L$ için $\{x \in L : \sup(a, x) \geq b\}$ bir en büyük üst sınıra sahip ve $a \neg b$ ile gösterilen, bir L latisidir. Mesela; $[0,1]$ bir tam Brouweriandır ve dual Brouwerian latisi:

$$a \alpha b = \begin{cases} 1 & , \quad a \leq b \\ b & , \quad b < a \end{cases} ; \quad a \neg b = \begin{cases} b & , \quad a < b \\ 0 & , \quad b \leq a \end{cases}$$

olur.

Dağılımlı ve Brouwerian latisler arasındaki ilişkiyi Birkhoff (1948), aşağıdaki şekilde ortaya koymuştur:

“ Bir tam latis, Brouwerian olması için $\Leftrightarrow$ inf nun tamamıyla sup üzerinde dağılımlı olmasıdır”. Yani;

$$\forall I \subseteq L, \forall a \in L, \inf \left(a, \sup_{b \in I} b \right) = \sup_{b \in I} b \inf(a, b)$$

olur. Ayrıca, “hem Brouwerian hem de dual Brouwerian olan bir tam latisin, Booleana olması için $\Leftrightarrow \forall a \in L, a \alpha \mathbb{O} = a \in \mathbb{I}$ olmasıdır” özelliğini $L = [0,1]$ de sağlanamaz (Brown, 1971).

3. FUZZY ve ÇOK DEĞERLİ MANTIK TEORİSİ

3.1. Latisler ve Fuzzy Teorisi

Bir tümleyenli dağılmalı latis, Boolean Latis olarak adlandırılır. Bir Boolean latis'te a nın $\bar{a}$ tümleyeni tektir. $P(X)$ in yapısı, bir Boolean latisinin bildik bir durumu olan $(0,1)$ in Boolean latisinden ortaya çıktığı şeklinde görülebilir.

3.2. $\tilde{P}(X)$ Üzerindeki Alternatif Operatörler

Diğer operatörler, birleşim ve kesişim için tanımlanabilir:

İlk olarak aşağıda olasılık benzeri operatörler vardır:

Kesişim:

$$(i) \forall x \in X, \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x) \text{ (çarpma)} \quad (3.3)$$

Birleşim:

$$(ii) \forall x \in X, \mu_{A \dot{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \mu_B(x) \text{ (olasılıksal toplam)} \quad (3.4)$$

Bu operatörler ve bilinen pseudo tümleme altında $\tilde{P}(X)$ sadece pseudo tümlemeli dağılmalı olmayan yapıdır. Dahası özellikle $\dot{+}$ ve $\bullet$, sadece değişmelilik, birleşme, birimli olma, De Morgan kanunları ve $A \cdot \emptyset = \emptyset$, $A \dot{+} X = X$ i sağlar. Böyle operatörler A ve B arasında değişimi yansıtır ve min ile max'a karşı etkileşimli olarak adlandırılır. Bu son operatörlerden dolayı A yada B nin değişimi $A \cap B$ veya $A \cup B$ nin değişimini gerekli kılmaz. $\cup$ ve $\cap$, etkileşimsiz olarak adlandırılır.

İkinci olarak;

$$\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)) \quad (3.5)$$

biçiminde (Zadeh'e (1975a)ve ayrıca Giles'e (1976) göre koyu birleşimli olarak adlandırılan) $\cup$ sınırlı toplam operatörü verilsin ve

$$\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \quad (3.6)$$

biçiminde koyu kesişim olarak adlandırılan kesişimi $\cap$ operatörü verilsin.

$\cup$, $\cap$ ve bilinen pseudo tümleme, $\tilde{P}(X)$ tümlmeli dağılımlı olmayan yapıdır. Dahası özellikle idempotentlik dağılımlılık ve yutan eleman artık geçerli değil ama değişmelilik, birim, De Morgan kanunları, $A \cap \phi = \phi$, $A \cup X = X$ ve hatta dışlanmış orta kanunları da sağlanır. Bu küme teorisinde $\bar{A}$, A nın gerçel tümlemesidir (Giles, 1976).

Operatörler arasındaki ilişkiyi şu şekilde gösterebiliriz:

$$\forall A, B \in \tilde{P}(X) \text{ için } \begin{cases} A \cap B \subseteq A \cdot B \subseteq A \cap B \\ A \cup B \subseteq A \hat{+} B \subseteq A \cup B \end{cases}$$

(3.2) denkleminin ifadesinde fuzzy ayrışımı $\cup$, $\cap$ 'nin anlamında bir adi bölüntüdür.

$$\left(\forall x \in X, \sum_{i=1}^m \mu_{A_i}(x) = 1 \right) \Rightarrow \begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = X \\ \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \phi \end{cases}$$

Tersi $m > 2$ için yanlıştır. $\cup$, $\cap$ 'nin anlamında bölüntü fuzzy bölüntüden daha geneldir. İç orta kanununun varlığı deneyin yapıldığı durumla tutarlı olup sonucu A fuzzy kümesi olarak modellenebilir:

$A \cap \bar{A} = \phi$ nin anlamı şudur:

Tümlemesi olan gibi aynı zamanda olamaz. Yine de $\cup$, $\cap$ operatörlerinin tam yorumu henüz sağlanamamıştır.

Son olarak aşağıdaki özelliklerin sağlandığını dikkate alalım:

$$A \cup A \cup \dots \cup A_m \text{ (m defa) } = \cup^m A$$

ve

$$A \cap A \cap \dots \cap A_m \text{ (m defa) } = \cap^m A$$

ile

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{\cup^m A}(x) = 1 \Leftrightarrow \mu_A(x) \neq 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{\cap^m A}(x) = 0 \Leftrightarrow \mu_A(x) \neq 1$$

olacak biçimde

$$\forall x, \mu_{\cup^m A}(x) = \min(1, m\mu_A(x)), \mu_{\cap^m A}(x) = \max(0, m\mu_A(x) - m + 1)$$

yazalım.

Yukarıdaki ($\cup$ ve $\cap$) operatörler üzerindeki ve üç $(\tilde{P}(X), \cup, \cap)$, $(\tilde{P}(X), \hat{+}, \cdot)$, $(\tilde{P}(X), \cup, \cap)$ latis yapısı üzerindeki detaylara şimdi girebiliriz.

3.3. Çok Değerli Mantıklar

Daha önceden üç $(\tilde{P}(X), \cup, \cap, -)$, $(\tilde{P}(X), \hat{+}, \cdot, -)$, $(\tilde{P}(X), \cup, \cap, -)$ fuzzy küme tanım ve teorileri verilmiştir. Bu küme teorileri ve birkaç diğerleri için tabanları olan çok değerli mantık bu kısmın konusudur.

Anlamsal bakımdan burada yalnızca sayılabilir değerli mantıkları düşüneceğiz ve bunların doğruluk uzayı $[0,1]$ reel aralığıdır. Dolayısıyla biz burada Pinkava (1976) anlamında ikili ve sonlu çok değerli mantık hesabının “fuzzyleştirilmesi” ile (yani “genelleştirilmiş” bağıntılarla fonksiyonel olarak bir tam mantık hesabı elde etmek için) uğraşmayacağız. Açıklama ilk defa görülen dönüşümlerin Piaget grubunu kullanacaktır. Çok değerli mantığın genel bir araştırması Rescher’de (1969) bulunabilir.

3.3.1. Piagetler grubu

ϕ mantıksal bağıntılarla ilişkili elementer P , Q , R , ... önermelerini içeren bir önermesel değer olsun. ϕ sembolik olarak $\phi = f(P, Q, R, \dots)$ şeklinde yazılan bir wff (çıkarım kuralları kümesi) dir.

ϕ üzerinde dört dönüşüm tanımlanabilir:

(i) Birim: $I(\phi) = \phi$

(ii) Tümlen: $N(\phi) = \neg \phi$

(iii) Karşılıklı ilişki: $R(\phi) = f(\neg P, \neg Q, \neg R, \dots)$

(iv) Karşılıklı ters ilişki: $C(\phi) = \neg R(\phi)$

olup burada $\neg$, bir önermenin olumsuzu için tekli bağıntıyı gösterir. Bir fonksiyonun tümlenme kanunu için, (i)-(iv) dönüşümleri, Şekil 3.1 de verilen tabloda, bir Klein grup yapısına sahiptir.

	I	N	R	C
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

Şekil 3.1. Dönüşüm tablosu

Piaget göstermiştir ki; insan muhakemesinin çocuklar için öğrenimi, bu dönüşümlerin bir idrakini yani

$\phi = \text{"iyi ozanlar kötü kocalardır"} \cong I(\phi) = \phi$

$N(\phi) = \text{"iyi ozanlar kötü kocalar değildir"} \cong N(\phi) = \neg \phi$

$R(\phi) = \text{"kötü ozanlar iyi kocalardır"} \cong R(\phi) = f(\neg P, \neg Q, \neg R, \dots)$

$C(\phi) = \text{"kötü ozanlar iyi kocalar değildir"} \cong C(\phi) = \neg R(\phi)$

gibi cümleler arasındaki farklı anlamayı gerektirir.

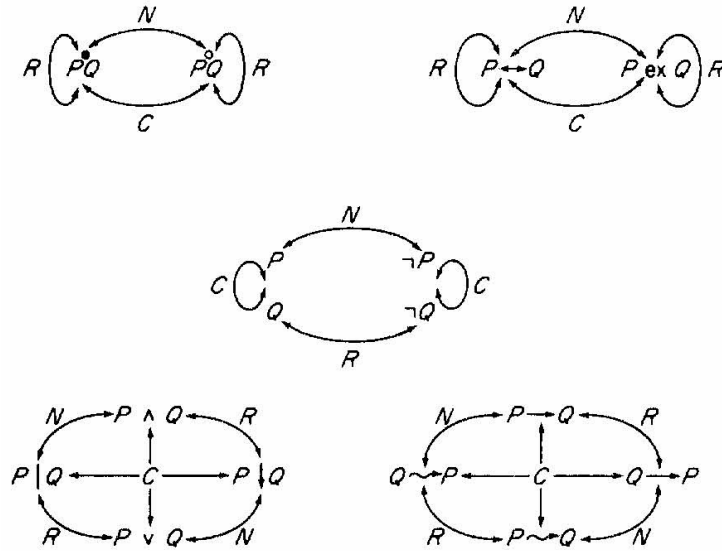
Dönüşümlerin bu grubunun matematiksel formülleşmesi (mesela) Sinclair'de (1972) bulunabilir.

İkili önerme hesabı olduğu takdirde ikili bağıntıları ve bu dönüşümler arasındaki bağıntıları açık biçimde yazalım.

P	Q	$\dot{P}Q$	$P \vee Q$	$Q \rightarrow P$	P	$P \rightarrow Q$	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

P	Q	$P \mid Q$	$P \text{ ex } Q$	$\neg Q$	$Q \rightsquigarrow P$	$\neg P$	$P \rightsquigarrow Q$	$P \downarrow Q$	$\circ PQ$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Şekil 3.2. Bağıntılar tablosu



Şekil 3.3. Bağıntılarının graf ile gösterilmesi

16 standart ikili bağıntının doğruluk tabloları Şekil 3.2’de verilmiştir ve bu tabloda $\bullet$, totolojiyi; $\vee$, ayrılma; $\rightarrow$, gerektirmeyi; $\leftrightarrow$, denkliği; $\wedge$, birleşimi; $\mid$, Scheffer bağıntısını; ex , dış ayrışımı; $\downarrow$, Peirce bağıntısını; $\circ$, çelişkiyi; $\rightsquigarrow$, yaygın (ortak) adı olmayan bağıntıyı gösterir.

Bu on altı bağıntı, Şekil 3.3’de verilen grafta I , R , N , C ye doğru deyiş tokuş edilirler.

3.3.2. Fuzzy küme teorileriyle birleştirilen çok değerli mantıklar

Üç $(\tilde{P}(X), \cup, \cap, -)$, $(\tilde{P}(X), \hat{+}, \cdot, -)$, $(\tilde{P}(X), \cup, \cap, -)$ fuzzy küme teorisinin altında yatan üç çok değerli mantığın anlamlı doğruluk fonksiyonları verilebilir. Bir P önermesinin doğruluk değeri $v(P)$ ile gösterilsin. $v(P) \in [0,1]$ dir.

Üç durum içinde değilin değeri $v(\neg P) = 1 - v(P)$ dir. Böylece $v(\neg \neg P) = v(P)$ dir. Yine üç durum içinde $\rightarrow$ gerektirme bağıntısı hep

$$v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) ,$$

denklik bağıntısı

$$v(P \leftrightarrow Q) = v[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)] ,$$

ex , $|$, $\downarrow$, $\sim \sim$ sırasıyla $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftarrow$ un olumsuzu olarak; totoloji ve çelişkide sırasıyla

$$v(\bullet P) = v(P \vee \neg P) , v(\circ P) = v(P \wedge \neg P)$$

olarak tanımlanır. Daha genel olarak,

$$v(\bullet PQ) = v((P \vee \neg P) \vee (Q \vee \neg Q)) ,$$

$$v(\circ PQ) = v((P \wedge \neg P) \wedge (Q \wedge \neg Q))$$

olur.

Bu üç çok değerli mantık, klasik iki değerli mantığın genişlemesidir.

3.3.2.1. $(\tilde{P}(X), \cup, \cap, -)$ ile birleştirilen mantık

$\cup$ ve $\cap$ altında yatan ayrışım ve birleşim değerleri sırasıyla

$$v(P \vee Q) = \max(v(P), v(Q)) ,$$

$$v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$$

olur.

Açıktır ki; $\vee$, $\wedge$; değişmeli, birleşimli, idempotent, biri diğeri üzerine dağılımlı ve dışlanmış orta kanununu

$$v(P \vee \neg P) \neq 1 \text{ ile } v(P \wedge \neg P) \neq 0$$

anlamında sağlamaz,dahası

$$\begin{aligned}
v(P \vee (P \wedge Q)) &= v(P) , \quad v(P \wedge (P \vee Q)) = v(P) \text{ (emilim) } , \\
v(\neg(P \wedge Q)) &= v(\neg P \vee \neg Q) , \quad v(\neg(P \vee Q)) = v(\neg P \wedge \neg Q) \text{ (De Morgan) } , \\
v[(\neg P \vee Q) \wedge (P \wedge \neg Q)] &= v[(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] \text{ (denklik) } , \\
v[(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)] &= v[(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)] \text{ (dışlanmış ayrışım) } ,
\end{aligned}$$

Şekil 3.4 , $v(P)=p$, $v(Q)=q$ ile tarif edilen 16 bağıntının değeri verilmektedir.

P	Q	$\dot{P}Q$	$P \vee Q$	$Q \rightarrow P$	P
p	q	$\max(p, 1-p, q, 1-q)$	$\max(p, q)$	$\max(p, 1-q)$	p
P	Q	$P \rightarrow Q$	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$
p	q	$\max(1-p, q)$	q	$\min(\max(1-p, q), \max(p, 1-q))$	$\min(p, q)$
P	Q	$P Q$	$P \text{ ex } Q$	$\neg Q$	$Q \rightsquigarrow P$
p	q	$\max(1-p, 1-q)$	$\max(\min(1-p, q), \min(p, 1-q))$	$1-q$	$\min(p, 1-q)$
P	Q	$\neg P$	$P \rightsquigarrow Q$	$P \downarrow Q$	$\dot{P}Q$
p	q	$1-p$	$\min(1-p, q)$	$\min(1-p, 1-q)$	$\min(p, 1-p, q, 1-q)$

Şekil 3.4. On altı bağıntı için karşılık gelen değerler tablosu

Niceliklerin değerleri, söylem evreninin bir x elemanı için

$$v(\forall x P(x)) = \inf_x (v(P(x))) , \quad v(\exists x P(x)) = \sup_x (v(P(x)))$$

olarak ($\wedge$ ve $\vee$ ile uyumlu olacak biçimde) dosdoğru tanımlanmıştır.

Bu çok değerli mantık, ilk olarak Dienes (1969) tarafından geliştirilen K-standart dizi mantığı (K-SEQ) olarak adlandırılır. Bu mantık, Şekil 3.3'deki anlamda dönüşümlerin Piaget grubu ile uyumludur.

Dahası, aşağıdaki özellikler elde edilmiştir:

$$v[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] = v[(P \wedge Q) \rightarrow R] \text{ (gerektirme için) } ,$$

$$v(P \rightarrow P) = v(\dot{P}) , \quad v(\dot{P} \rightarrow P) = v(P) ,$$

$$\begin{aligned}
v(P \rightarrow \dot{P}) &= v(\dot{P}) , \quad v(P \leftrightarrow P) = v(\dot{P}) , \\
v(\dot{P} \rightarrow P) &= v(\dot{P}) , \quad v(P \rightarrow \ddot{P}) = v(\neg P) , \\
v(P \leftrightarrow \neg P) &= v(\ddot{P}) \text{ (totoloji ve çelişki için) ,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\neg P) &= v(P|P) , \quad v(P \rightarrow Q) = v(P|(Q|Q)) , \\
v(\dot{P}) &= v(P|(P|P)) \text{ (Sheffer ve Peirce bağıntıları için).}
\end{aligned}$$

Sheffer (yada Peirce'nin) bağıntısı, standart ikili mantıkta her ikili ve birli bağıntıyı kurmak için yeterlidir. Bu sonuç K-SEQ'in dışlanmış bağıntıları için de geçerli olur.

$\rightarrow$ gerektirmesi zayıf küme kapsamı ile ilgili iken ex , Δ simetrik farkı ile ilgilidir.

Gaines (1976a; 1976b) göstermiştir ki; bu çok değerli mantık standart önermeli hesaplamının fuzzyleştirmesi (genişleme prensibi anlamında) hariç hiçbir şeydir. Her P önermesi $\{0,1\}$ üzerindeki normalleştirilmiş bir fuzzy kümesi ile bileştirilebilir yani $(\mu_P(0), \mu_P(1))$ çifti ile birleştirilebilir olup burada $\mu_P(0)$ yanlışın bir değeri ve $\mu_P(1)$ de doğrunun bir değeri olarak yorumlanabilir. Standart önermeli hesabın mantıksal bağıntıları gerçek fonksiyonel olduğundan yani fonksiyonel olarak gösterilebildiğinden onlar fuzzyleştirilebilir. Gaines (1976a; 1976b)

$$v(P) = \frac{(1 - \mu_P(0) + \mu_P(1))}{2} \in [0,1]$$

tanımlarken yukarıda tanımlı çok değerli mantığı elde etmiştir.

Son olarak bu çok değerli mantık iki çıkarım kuralı olduğunda, yukarıdaki bağıntılarla inşa edildiğinde ve $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ de sağlandığında $[0,1]$ üzerinde de olduğu aşikar çıkar.

3.3.2.2. $(\tilde{P}(X), \cup, \cap, -)$ ile birleştirilen mantık

$\cup$ ve $\cap$ altında yatan birleşim ve kesişim değerleri sırası ile,

$$v(P \dot{\vee} Q) = \min(1, v(P) + v(Q))$$

$$v(P \wedge Q) = \max(0, v(P) + v(Q) - 1)$$

olur.

Açıktır ki; $\dot{\vee}$ ve $\wedge$, değişmeli ve birleşimlidir fakat idempotentli değildir ve bir diğeri üzerinde dağılımlı değildir;

$$v(\neg(P \wedge Q)) = v(\neg P \dot{\vee} \neg Q)$$

$$v(\neg(P \dot{\vee} Q)) = v(\neg P \wedge \neg Q) \text{ (De Morgan)}$$

$$v(P \dot{\vee} \neg P) = 1, v(P \wedge \neg P) = 0 \text{ (Dışlanmış orta kanunları)}$$

Şekil 3.5, ($v(P) = p$, $v(Q) = q$) ile tanımlanan 16 bağıntının değerini verir (Dubois ve Prade, 1980). (Karışıklığı önlemek için $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vdash$, ex , $\sim\sim$, $\downarrow$ için bu mantıkta $\dot{\vee}$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\parallel$, $\textcircled{ex}$, $\Rightarrow$, $\downarrow\downarrow$ ile gösterilir)

$\frac{P \ Q}{p \ q}$	$\frac{\dot{P}Q}{1}$	$\frac{P \vee Q}{\min(1, p + q)}$	$\frac{Q \Rightarrow P}{\min(1, p + 1 - q)}$	$\frac{P}{p}$
$\frac{P \ Q}{p \ q}$	$\frac{P \Rightarrow Q}{\min(1, 1 - p + q)}$	$\frac{Q}{q}$	$\frac{P \Leftrightarrow Q}{1 - p - q }$	$\frac{P \wedge Q}{\max(0, p + q - 1)}$
$\frac{P \ Q}{p \ q}$	$\frac{P \parallel Q}{\min(1, 1 - p + 1 - q)}$	$\frac{P \textcircled{ex} Q}{ p - q }$	$\frac{\neg Q}{1 - q}$	$\frac{Q \Rightarrow P}{\max(0, p - q)}$
$\frac{P \ Q}{p \ q}$	$\frac{\neg P}{1 - p}$	$\frac{P \Rightarrow Q}{\max(0, q - p)}$	$\frac{P \downarrow\downarrow Q}{\max(0, 1 - p - q)}$	$\frac{\dot{P}Q}{0}$

Şekil 3.5. On altı bağıntı için yeni değerler tablosu

Bu mantık, Şekil 3.3'ün anlamında dönüşümlerin Piaget grubu ile uyumludur. Dahası, totoloji ve çelişki için aşağıdaki özellikler yazılabilir:

$$v(P \Rightarrow P) = v(\dot{P}) , v(\dot{P} \Rightarrow P) = v(P) ,$$

$$v(P \Rightarrow \dot{P}) = v(\dot{P}) , v(P \Leftrightarrow P) = v(\dot{P}) ,$$

$$v(\dot{P} \Rightarrow P) = v(\dot{P}) , v(P \Rightarrow \dot{P}) = v(\neg P) ,$$

$\Rightarrow$ gerektirmesi, fuzzy kümeler için (Zadeh anlamında) bilinen kapsama ile açıkça ilgilidir.

$(\bar{x})$ ve $\Rightarrow$, ∇ (simetrik fark) ile $|-|$ (sınırlı fark) küme operatörlerine uygundur.

Sonuç olarak,

$$v(P \rightarrow Q) = v(\bar{1}P \dot{\vee} (P \wedge Q))$$

$$v(P \Rightarrow Q) = v(\bar{1}P \dot{\vee} (P \wedge Q))$$

olur.

3.3.2.2. $(\tilde{P}(X), \hat{+}, \cdot, -)$ ile birleştirilen mantık

$\hat{+}$ ve $\bullet$ altında yatan ayrışım ve birleşme değerleri, sırasıyla

$$v(P \gamma Q) = v(P) + v(Q) - v(P).v(Q)$$

$$v(P \& Q) = v(P).v(Q)$$

olur.

Açıktır ki; γ ve $\&$ değişmeli, birleşmelidir fakat idempotentli değildir ve biri diğeri üzerine dağılımlı değildir ve

$$v(\bar{1}(P \& Q)) = v(\bar{1}P \gamma \bar{1}Q) ;$$

$$v(\bar{1}(P \gamma Q)) = v(\bar{1}P \& \bar{1}Q) \text{ (De Morgan)}$$

yazılır.

Bir önceki her iki mantıkta olduğu üzere on altı bağıntının değerini inşa etmek açık olmasına karşın $v(P) = p$ ve $v(Q) = q$ ile bunlardan bir kaçını verelim:

$$\text{Gerektirme: } v(P \circ \rightarrow Q) = 1 - p + pq$$

$$\text{Totoloji: } v(\dot{P}) = 1 - p(1 - p)$$

$$\text{Çelişki: } v(\overset{\circ}{P}) = p(1 - p)$$

Ayrıca karma bazı formülleri de verelim:

$$v(P \circ \rightarrow Q) = v(\bar{1}P \dot{\vee} (P \& Q))$$

$$v[(P \circ \rightarrow Q) \wedge (Q \circ \rightarrow P)] = v[(P \& Q) \dot{\vee} (\bar{1}P \& \bar{1}Q)] = v[(P \& Q) \Leftrightarrow (P \gamma Q)]$$

Bu mantık, Şekil 3.3'deki anlamdaki dönüşümlerin Piaget grubu ile uyumludur ve çoğunlukla Stokastik mantık diye ifade edilir.

Hangi durumlarda $\&$, $\wedge$ yada $\hat{\wedge}$ (veyahut $\vee$ yada $\hat{\vee}$ ile γ) çakıştığına bakalım. İlk olarak,

$$0 \leq \max(0, p + q - 1) \leq pq \leq \min(p, q)$$

$$1 \geq \min(1, p + q) \geq p + q - pq \geq \max(p, q)$$

olduğuna dikkat edelim.

$v(P \& Q) = v(P \wedge Q)$ olduğunu yani “ $pq = \min(p, q) \Leftrightarrow P$ nin yada Q nun değeri 0’ yada 1’e denk” olduğunu kontrol etmek kolaydır. $v(P \gamma Q) = v(P \vee Q)$ aynı koşullar altında sağlanır ve bu $v(P \& Q) = v(P \hat{\wedge} Q)$ ile $v(P \gamma Q) = v(P \hat{\vee} Q)$ için aynıdır.

Böylece birleşme (ayrışma) için üç bağıntının ikisi çakışır $\Leftrightarrow P$ nin yada Q nun değeri 0’ yada 1’e denktir. Bu durumda birleşme (ayrışma) için üç bağıntının hepsi çakışır.

Aşağıdaki ifadeleri de yazabiliriz:

$$v(P) + v(Q) = v(P \wedge Q) + v(P \vee Q) = v(P \hat{\wedge} Q) + v(P \hat{\vee} Q) = v(P \& Q) + v(P \gamma Q)$$

yani v , üç mantık için latis anlamında bir değerdir (Birkhoff, 1948).

3.3.3. Diğer Çok Değerli Mantıklar; Diğer Gerektirmeler

Farklı biçimde anlamdaş gerçek fonksiyonları hali hazırda bir araya getirme ile diğer çok değerli mantıklar , mesela Lukasiewicz mantığı tanımlanabilir. Lukasiewicz (1930) mantığında birleşme, ayrışım, nicelikler için anlamlı gerçek fonksiyonlar K-SEQ yani

$$v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q)) , v(P \vee Q) = \max(v(P), v(Q)) ,$$

$$v(\forall x P(x)) = \inf_x v(P(x)) , v(\exists x P(x)) = \sup_x v(P(x)) \text{ li tanımlıdır. Gerektirme ve denklik}$$

$(\tilde{P}(X), \cup, \cap, -)$ ile yani

$$v(P \Rightarrow Q) = \min(1, 1 - v(P) + v(Q)) , v(P \Leftrightarrow Q) = 1 - |v(P) - v(Q)|$$

ile birleştirilen mantığın ifadeleridir. Değili, klasik olarak $v(\neg P) = 1 - v(P)$ dir. Bu mantık L_{N_I} , Lukasiewicz (1930) mantığı olarak gösterilir ve ifade edilir. L_{N_I} , Zadeh'in (1975b) sıradan fuzzy küme teorisinin altında yatan yani birleşim için $\cup$, kesişim için $\cap$ ve kapsama için $\subseteq$ ile çok değerli bir mantıktır. Bu mantık Şekil 3.3'deki anlamda dönüşümlerin Piaget grubu ile açıkça uyumludur. Bununla birlikte ayrışım ve gerektirme arasındaki bağıntı, $v(P \vee Q) = v((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$ olur. Benzer olarak stokastik gerektirme için $v(P \circ \rightarrow Q) = 1 - v(P) + v(P \& Q)$ dan $v(P \Rightarrow Q) = 1 - v(P) + v(P \wedge Q)$ olur. Ayrıca $v(P \rightarrow Q) = 1 - v(P) + v(P \wedge Q)$ yazılır.

Giles (1976), riskine göre L_{N_I} nın bir açıklamasını önermektedir. Mantıksal düşünmenin her bir zinciri tartışmalar arasındaki bir diyalog olarak görülür ki o tartışmaların savları kendi doğruları hakkında bir açıklamayı da beraberinde getirir.

Gerektirme için diğer anlamlı gerçek fonksiyonlar literatürde bulunabilir.

$$v\left(P \stackrel{(3.1)}{\rightarrow} Q\right) = \begin{cases} 1 & , \quad v(P) \leq v(Q) \\ 0 & , \quad \text{aksi} \end{cases} \quad (3.1)$$

Birleştirilmiş denklik,

$$v\left(P \stackrel{(3.1)}{\leftrightarrow} Q\right) = \begin{cases} 1 & , \quad v(P) = v(Q) \\ 0 & , \quad \text{aksi} \end{cases}$$

olur.

Birleşme, ayrışma, değili (olumsuzu) ve nicelikleri için K-SEQ'in anlamlı doğruluk fonksiyonları ile R-SEQ diye adlandırılan bir başka standart dizi mantığı elde edilir (Maydole, 1975).

$$v\left(P \stackrel{(3.2)}{\rightarrow} Q\right) = \begin{cases} 1 & , \quad v(P) \leq v(Q) \\ v(Q) & , \quad \text{aksi} \end{cases} \quad (3.2)$$

Birleştirilmiş denklik,

$$v\left(P \stackrel{(3.2)}{\rightarrow} Q\right) = \begin{cases} 1 & , \quad v(P) = v(Q) \\ \min(v(P), v(Q)) & , \quad \text{aksi} \end{cases}$$

olur.

$\stackrel{(3.2)}{\rightarrow}$ gerektirmesi, bazen Brouwerian gerektirmesi diye ifade edilir. Sanchez (1976) tarafından kullanılan ve tanımlanan α operatörü hariç hiçbir şeydir.

Birleşme, ayrışım ve nicelikler ile değili için K-SEQ'in anlamlı gerçek fonksiyonları ile

$$v(\neg P) = \begin{cases} 1 & , \quad v(P) = 0 \\ 0 & , \quad \text{aksi} \end{cases}$$

istenildiği kadar değerli Gödelian mantığı elde edilir (Maydole, 1975).

$$v\left(P \xrightarrow{(3.3)} Q\right) = \max(1 - v(P), \min(v(P), v(Q))). \quad (3.3)$$

Dikkat edileceği üzere

$$v(P \rightarrow Q) = \max(1 - v(P), v(Q)) \neq v(\neg P \vee (P \wedge Q)) = v\left(\left(P \xrightarrow{(3.3)} Q\right)\right)$$

yazılabilir. Bu gerektirme, Zadeh (1973) tarafından düşünülmüştür.

$$v\left(P \xrightarrow{(3.4)} Q\right) = \min(1, v(Q) / v(P)) \quad (3.4)$$

yazılır. Bu gerektirme Goguen (1969) tarafından ifade edilmiştir. Gaines (1976b) ifade edtmıştır ki; bu gerektirme

$$v\left(P \xrightarrow{(3.4)} Q\right) = v(P \wedge Q) / v(P)$$

ifadesinden dolayı koşullu olasılıkla yakından ilişkilidir.

İfade edilen gerektirmelerin tümünü karşılaştırmak için her P ve Q için aşağıdaki ifadeleri göz önüne almak gerekir:

$$v(P \Rightarrow Q) \geq v(P \circ \rightarrow Q) \geq v(P \rightarrow Q) \geq v\left(P \xrightarrow{(3.3)} Q\right) \geq \min(v(P), v(Q)) ,$$

$$v(P \Rightarrow Q) \geq v\left(P \xrightarrow{(3.4)} Q\right) \geq v\left(P \xrightarrow{(3.2)} Q\right) \geq \min(v(P), v(Q)) ,$$

$$v\left(P \xrightarrow{(3.2)} Q\right) \geq v\left(P \xrightarrow{(3.1)} Q\right).$$

Böylece Zadeh (1973) fuzzy küme kapsamına göre gerektirmesi ifade edilen gerektirmelerin en büyük değeridir.

$\xrightarrow{(3.2)}$, $\xrightarrow{(3.3)}$, $\xrightarrow{(3.4)}$ gerektirmeleri, Şekil 3.3'ün anlamında dönüşümlerin Piaget grubu ile uyumlu değildir.

Dahası, Maydole (1975) R-SEQ ve Gödelian mantığı için $(\overset{(3.1)}{\rightarrow}, \overset{(3.2)}{\rightarrow})$ yi kullanan) paradoxları oluşturmuştur.

3.3.5. Ayırma Operatörleri, Modus Ponens (Olana Vargı)

Modus ponens kuralı, önermesel anlamda P ve $P \mapsto Q$ dan çıkarılan Q ya imkan verir. Çok değerli mantıklarda problem, $v(P)$ ile $v(P \mapsto Q)$ ya vererek $(\mapsto, \text{ verilen herhangi çok değerli gerektirme olmak üzere } v(Q))$ yu hesaplamaktır. Bu konuda çalışan kesim, özellikle Goguen (1969) , Kling (1973) ve Le Faivre (1974) mümkün olduğu kadar büyük $v(Q)$ ya sahip olmak için $v(P) * v(P \mapsto Q) \leq v(Q)$ olacak şekilde bir $*$ ayrışım operatörünü aramıştır.

Dikkat edileceği üzere bu durum muhtemel şu sonuca benzemektedir: Bu noktada eğer $P(A) \geq \alpha$ ve $P(B|A) \geq \beta$ ise $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)$ olduğundan $P(B) \geq \alpha\beta$ dır.

$v(P \mapsto Q) = v(P \rightarrow Q) = \max(1 - v(P), v(Q))$ için $*$, min operatörü olabilir, eğer $\min(v(P), v(P \rightarrow Q)) > 0.5$ ise $\min(v(P), v(P \rightarrow Q)) \leq v(P) \leq \max(v(P), v(P \rightarrow Q))$ olur.

Daha özeli, eğer $v(P) \geq \alpha$ ve $v(P \rightarrow Q) \geq \beta$ ($\alpha + \beta > 1$) ise $v(Q) \geq \beta$ dır. Bilhassa eğer $v(P) > \frac{1}{2}$ ve $v(P \rightarrow Q) \geq \frac{1}{2}$ ise $v(Q) \geq \frac{1}{2}$ ise $v(Q)$, belirsizdir.

$*$ = min olduğunda $\rightarrow$ gerektirmelerinin bir zincirinin geçerliliği, zincirdeki en az geçerli elemanların geçerliliğinden daha az değildir. $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, K-SEQ'in oluşum kümesi diye ifade edilir.

Dahası, standart önermesel hesapta her aksiyom veya teorem, K-SEQ'in anlamlı gerçek fonksiyonlarını kullandığımız zaman $\frac{1}{2}$ 'ye denk yada daha büyük gerçek bir değere sahiptir. Karşılık olarak eğer bir wff, K-SEQ'de $\frac{1}{2}$ 'ye denk yada daha büyük değer her zaman sahip ise standart önermesel hesapta bir teorem olur.

İspat: Φ bir teorem olsun. $P, Q, R; \Phi$ ye ait elementer önermeler ise her $v(P), v(Q), v(R), \dots \in \{0,1\}$ için $v(\Phi)=1$ dir. $v(\Phi)=f(p^*, q^*, r^*, \dots) < \frac{1}{2}$ olacak şekilde, $\exists p^* q^* r^*, \dots$ olduğunu varsayalım. f ayrışımının (yani cümleciklerin) bir birleşimi olarak ifade edilebilir. Varsayımdan dolayı, parçalardan biri kesin olarak $\frac{1}{2}$ 'den daha küçüktür. Böylece eğer p bu cümleciye ait ise $1-p$ ait olmaz ve tersi olur. Kümemiz, cümledeki her elementer doğruluk değeri 0 a – ki boş olmakta- ve diğer elementer önermelere 0 veya 1 keyfi doğruluk değerleri vermiş oluruz. Böylece, $v(\Phi)=0$ elde ederiz ki bu da varsayımla çelişir. Tersisi aşıkardır.

K-SEQ kullanarak Lee (1972) ispatlamıştır ki, eğer cümleciklerin verilen bir kümesinin en güvenilir cümlesi gerçek a doğruluk değerine sahip ise ve en güvenilmez cümlecik b doğruluk değerine sahip ise, çözüm prensibi Robinson (1965) tekrarlı uygulaması ile elde edilebilen tüm mantıksal sonuçlar, a ve b arasında bir doğruluk değere sahip olacaktır.

Eğer $\xrightarrow{(3.4)}$ Goguen gerektirmesini kullanırsak bir ayrışım operatörü, çarpma olabilir zira

$$v\left(\overset{(3.4)}{P \rightarrow Q}\right).v(P) = \min(1, v(Q)/v(P)).v(P) \leq v(Q)$$

olur.

$*$, çarpma olduğunda $\mapsto$ gerektirmelerinin bir zincirinin geçerliliği zincirin uzunluğu ile azalabilir.

Son olarak,

$$v(P \Rightarrow Q) = \min(1, 1 - v(P) + v(Q))$$

ile gözlemleyebilir ki,

$$v(P) = \alpha, v(P \Rightarrow Q) = 1 \text{ ise } v(Q) \geq \alpha$$

$$v(P) = \alpha, v(P \Rightarrow Q) = 1 - \varepsilon < 1 \text{ ise } v(Q) = \alpha - \varepsilon$$

olur.

Doğruluk değerleri α öncül gerçel değerine göre $1 - \varepsilon$ 'a denk olan neticenin bitiminde sonuç $\alpha - n\varepsilon$ 'a denk bir gerçel değere sahip olur. $\Rightarrow$ için ayrışım operatörü

$\wedge$ dir. Gaines (1976) , kel adamın paradoksunu açıklamak için $\rightarrow$ yada $\Rightarrow$ kullanmıştır (eğer n tüye sahip bir adam kelse $n + 1$ tüye sahip bir adam da keldir).

Aksine, verilen bir $*$ operatörü, $\rightarrow$ 'nin şekilsel tanımına uygun olarak

$$v(P \mapsto Q) = \sup_x \{x, v(P) * x \leq v(Q)\}$$

yazılabilir. Dikkat edileceği üzere $*$ = min olduğunda $\mapsto$, $\rightarrow$ Bouwerian gerektirmesidir; $*$ = çarpma olduğunda $\mapsto$ = $\rightarrow$ dür. ^(3.4)

3.3.5. Çok Değerli Mantık Değerlendirmesi

Çok değerli mantık ve bağıntıların çoğu ile mukayese için bazı bakış açılarına ihtiyaç duyarız. Belki de en ilginç olanları, Piaget grubu ile uyumlu, paradoksların varlığı, önemli yapısal özelliklerin eksikliği veya mevcudiyeti ile neticenin bir zincirinin geçerliliği ve birleşik küme teorileridir.

Pek çok araştırmacı, Zadeh (1973) fuzzy küme teorisinin altında yatan özellikle L_{N_I} gibi bazı çok değerli mantığı adlandırmak için “fuzzy mantık” ifadesini kullanmıştır. Zadeh (1973), muhakeme yaklaşımının bir teorisini temel alan mantığı tasarlamak için “fuzzy mantık” demiştir. Bununla birlikte yalnızca 0 yada 1'e benzer doğruluk değerleri değil aynı zamanda ortada olanları da artık yeni olmadığı alanda “fuzzy mantık” olarak çok değerli mantıkla görmek mümkündür. $\alpha + \beta + \gamma = 1$ olacak şekilde ve sırasıyla doğru, yanlış, anlamsız değerleri olarak α , β , γ yorumlandığında (α, β, γ) üçlüsünün her önermesini ifade etmeyi önerdiğinde bu açıdan Lakoff (1973) genelleştirme yapmıştır. Ona göre eğer $v(\neg P) = (\alpha, \beta, \gamma)$ ise $v(P) = (\beta, \alpha, \gamma)$ olur.

KAYNAKLAR

- Birkhoff, G., 1948. *Lattice Theory*” Colloq. Publ., Vol. 25. Am. Math. Soc., New York.
- Black, M., 1937. Vagueness, an exercise in logical analysis. *Philos. Science*, 4: 427-455.
- Boole, G., 1854. *The Laws of Thought: Republished by Dover, New York in 1958*, MacMillan, London.
- Brower, L. E. J., 1923. *On the Significance of the Principle of Excluded Middle in Mathematics (1923)*. In J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Godel*, Cambridge, Massachusetts:Harvard University Press, 1967: 334-345.
- Brown, J. G., 1971. A note on fuzzy sets. *Inf. Control*, 18: 32–39.
- Chapin, E. W., 1974. Set-valued set-theory. Part I. *Notre Dame J. Formal Logic*, 4: 619–634.
- Chen, G., Pham, T. T., 2001. *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Systems*, CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Curry, H. B., Feys, R., 1958. *Combinatory Logic*, (www.felsefeekibi.com/forum/forum_posts.asp?TID=35024&PN=1-265k-) North-Holland Pub. Co., Amsterdam.
- Dienes, Z. P., 1969. *Logique Elementaire*. O.C.D.L., Paris.
- Dubois, D., Prade, H., 1980. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York., 393.
- Frege, G., 1893. Basic Laws of Arithmetic, Berkeley: Translation by M. Furth, 1964, University of California Press, USA.
- Gentilhomme, Y., 1968. Les ensembles flous en linguistique. *Cahiers Linguistique Theoretique Appliquee*, 5: 47-63.
- Giles, R., 1976. Lukasiewicz logic and fuzzy theory. *Int. J. Man-Mach. Stud.*, 8: 313–327.
- Gaines, B. R., 1976a. *Fuzzy Reasoning and The Logics of Uncertainty*. Proc. Int. Symp. Multiple-Valued Logic, 6th, IEEE 76CH. 1111-4C, Utah, 179–188.

- Gaines, B. R., 1976b. Foundations of fuzzy reasoning. *Int. J. Man-Mach. Stud.*, **8**: 623–668.
- Goguen, J. A., 1967. L-fuzzy sets. *J. Math. Anal. Appl.*, **18**: 145–174.
- Goguen, J. A., 1969. Categories of V-sets. *Bull Am. Math. Soc.*, **75**: 622–624.
- Goguen, J. A., 1974. Concept representation in natural and artificial languages: Axioms, extension, and applications for fuzzy sets. *Int. J. Man-Mach. Stud.*, **6**: 513–561.
- Günel, Ü., 1997. Bulanık Mantık, *Otomasyon dergisi*, **55-56**: 50-55.
- Heisenberg, W., 1927. Über den anschulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Z. Phys.*, **43**: 172-198.
- Heyting, A., 1956. *Intuitionism: an Introduction*. Amsterdam, North-Holland.
- Hilbert, D., 1918. Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen*, **78**: 405-420.
- Kaufmann, A., Zadeh, L. A., 1975. *Theory of Fuzzy Sets*, Academic Press, New York, 415.
- Kling, R., 1973. Fuzzy-Planner: Reasoning with inexact concepts in a procedural problem-solving language. (1st version.), *J. Cybern.*, **3**(4): 1–16.
- Klir, G., J., Yuan, B., 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall Pub., 592.
- Lakoff, G., 1973. Hedges: A study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts. *J. Philos. Logic*, **2**: 458–508.
- Lee, R. C. T., 1972. Fuzzy logic and the resolution principle. *J. Assoc. Comput. Mach.*, **19**: 109–119.
- LeFaivre, R. A., 1974. *Fuzzy Problem-Solving*, Ph.D. Thesis, Univ. of Wisconsin, Madison. Also Tech. Rep. No. 37. Madison Acad. Comput. Cent., Madison, Wisconsin.
- Leibniz, G. W., 1972. *Philosophy of Logic and Language: H. Ishiguro (ed.)*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lucas, C., 2002. Fuzzy multidimensional logic. <http://www.calresco.org/lucas/fuzzy.htm>.
- Lukasiewicz, J., 1930. *Philosophical Remarks on Many-valued Systems of Propositional Logic. Reprinted (1967) in Sorrs McCall (Ed.), Polish Logic 1920 - 1930*. Oxford: Oxford University Press.

- Maydole, R. E., 1975. Many-valued logic as a basis for set theory. *J. Philos. Logic*, **4**: 269–291.
- Netto, A. B., 1968. *Fuzzy Classes*. Not. Am. Math. Soc. 945.
- Pinkava, V., 1976. “Fuzzification” of binary and finite multivalued logical calculi. *Int. J. Man-Mach. Stud.*, **8**: 717–730.
- Rescher, N., 1969. *Many-Valued Logic*. McGraw-Hill, New York.
- Russell, B., 1903. *The Principles of Mathematics: by ed. George Allen 1948*. Unwin Lid., London.
- Sanchez, E., 1976. Resolution of composite fuzzy relation equations. *Inf. Control*, **30**: 38–48.
- Sinclair, H., 1972. *Piaget's Theory of Development: The Main Stages. In Critical Features of Piaget's Theory of The Development of Thought*, ed. F. Murray, New York: MSS Information Corp., 68-78.
- Whitehead, A. N., Russell, B., 1910. *Principia Mathematica, 1 vol*, Cambridge University Press.
- Willaeys, D., Malvache, N., 1976. Utilisation d'un referential de sous-ensembles flous, application a un algorithme flou, *Int. Conf. System Science*, Wroclaw, Poland.
- Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets. Infor. and Control, 8:338-353.**
- Zadeh, L. A., 1968. Probability measures of fuzzy events, *J. Math. Anal. Appl.*, **23**: 412-427.
- Zadeh, L. A., 1973. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, **3**: 28–44.
- Zadeh L. A., 1975a. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part 1,2,3. *Inform Sci*, **7**:199-249; **8**: 301-357; **9**:43-80.
- Zadeh, L. A., 1975b. *Calculus of Fuzzy Restrictions. In “Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes”*. L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka, and M. Shimura, eds., Academic Press, New York, 1–39.

ÖZ GEÇMİŞ

1981 yılında Van ili Özalp İlçesi Kapıköy’de doğdu. İlk öğrenimini Van ili Özalp İlçesi Kapıköy İlköğretim Okulu’nda, orta ve lise öğrenimini Van Kazım Karabekir Lisesi’nde tamamladı. 1998 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2002 yılında da mezun oldu. 2006 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Yüksek Lisans eğitime başladı. Evli olup halen Milli Eğitim Bakanlığı’nda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.