T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHAEFER POPÜLASYON MODELİNİN KOŞULLU ULAM KARARLILIĞI

YÜKSEK LİSANS

Mehmet Emin HALİTOĞLU
Danışman: Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN

VAN – 2025

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHAEFER POPÜLASYON MODELİNİN KOŞULLU ULAM KARARLILIĞI

YÜKSEK LİSANS

Mehmet Emin HALİTOĞLU

Tez Savunma Sınavı Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Emel BİÇER (Başkan)

Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN (Danışman)

Doç. Dr. Ramazan YAZGAN (Üye)

VAN – 2025

KABUL VE ONAY

Mehmet Emin HALİTOĞLU tarafından hazırlanan "Schaefer Popülasyon Modelinin Koşullu Ulam Kararlılığı" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan : Doç. Dr. Emel BİÇER Bingöl Üniversitesi, Matematik Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.	
Üye : Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Matematik Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.	
Üye : Doç. Dr. Ramazan YAZGAN Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Matematik Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.	
Tez Savunma Tarihi:	29/12/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini ve imzaların sahiplerine ait olduğunu onaylıyorum.

……

Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza
Mehmet Emin HALİTOĞLU

ÖZET

SCHAEFER POPÜLASYON MODELİNİN KOŞULLU ULAM KARARLILIĞI

HALİTOĞLU, Mehmet Emin
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN
Aralık, 2025, 40 sayfa

Popa ve Ark. (2018), belirli bir eşiğin altındaki bozulmalar için, kesin ve bozulmuş modellerin çözümleri arasındaki farkı bozulmanın büyüklüğüyle doğrusal olarak ölçekleyen bir tahmin elde ederek, lojistik denklem için koşullu Ulam kararlılığı tanımladılar. Klasik Ulam kararlılık tanımında, bozulma parametresi $\varepsilon > 0$ için düşük değerli bir koşul bulunmamaktadır. Aksine, koşullu Ulam kararlılıkta kesin ve bozulmuş modellerin çözümleri arasındaki fark, $[0, \infty)$ aralığında belli bir eşik değerden küçük olacak şekilde tahmin edilebilmekte, yani bu aralığın tamamında $\varepsilon > 0$ için düşük değerli bir koşul bulunabilmektedir.

Bu tez çalışmasında, sürdürülebilir bir balık hasadı yönetimi için oluşturulmuş olan Schaefer modelinin koşullu Ulam kararlılığı analiz edilmiştir. Bu yolla, öngörülemeyen balık kayıplarının modelin dinamikleri üzerinde etkisi balık stoku ve balık kaybı için sınırlar belirlenmek suretiyle gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar, örnek ve simülasyonlarla desteklenmiştir.

Anahtar kelimeler: Koşullu Ulam kararlılık, Schaefer modeli, Ulam sabiti.

ABSTRACT

CONDITIONAL STABILITY OF THE SCHAEFER POPULATION MODEL

HALİTOĞLU, Mehmet Emin
M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN
December 2025, 40 pages

Popa et al. (2018) defined conditional Ulam stability for the logistic equation by obtaining an estimate that scales the difference between the solutions of the exact and perturbed models linearly with the magnitude of the perturbation for perturbations below a certain threshold. In the classical Ulam stability definition, there is no low-value condition for the perturbation parameter $\varepsilon > 0$. In contrast, in conditional Ulam stability, the difference between the solutions of the exact and perturbed models can be estimated to be less than a certain threshold value in the interval $[0, \infty)$, meaning that a low-value condition for $\varepsilon > 0$ can be found throughout this interval.

In this thesis, the conditional Ulam stability of the Schaefer model, developed for sustainable fish harvest management, is analyzed. In this way, the effect of unpredictable fish losses on the dynamics of the model is demonstrated by determining limits for fish stock and fish loss. The results obtained are supported by examples and simulations

Keywords: Conditional Ulam stability, Schaefer model, Ulam constant.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN'e teşekkür ederim. Ayrıca bu süreçte bana destek olan aileme ve eşime teşekkürlerimi sunarım.

2025

Mehmet Emin HALİTOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT iii
TEŞEKKÜR v
İÇİNDEKİLER vii
ŞEKİLLER LİSTESİ ix
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ 7
3. SCHAEFER MODELİNİN KOŞULLU ULAM KARARLILIĞI 13
3.1. Schaefer Modeli 13
3.2. Schaefer Modelinin Koşullu Ulam Kararlılığı 21
3.2.1. Bozulmuş Denklem İçin Çözümlerin Davranış 22
3.2.2. Schaefer Modelinin Koşullu Ulam kararlılığı 28
3.3. Örnek ve Simülasyonlar 32
4. TARTIŞMA VE SONUÇ 39
KAYNAKLAR 41
ÖZ GEÇMİŞ 43

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 $\frac{dy}{dt} = 0.5y(1 - \frac{y}{10}) - 0.2y$ diferansiyel denkleminin eğim alanı ve yörüngeleri 15

Şekil 3.2 $\frac{dy}{dt} = ry(1 - \frac{y}{K}) - Ey$ diferansiyel denklemi için y ye karşı $f(y)$ nin grafiği 15

Şekil 3.3 Düşük ölümlü hasat (Kot, 2001) 18

Şekil 3.4 Yüksek ölüm oranlı hasat (Kot, 2001). 19

Şekil 3.5 Aşırı avlanma (Kot, 2001). 19

Şekil 3.6 Çatallanma parametresi olarak E 'yi kullanan çatallanma diyagramı. 20

Şekil 3.7 Verim-çaba eğrisi 21

Şekil 3.8 $z' = (1 - \frac{z}{10})y - 0.5z - \varepsilon$ bozulmuş denklemi için çatallanma diyagramı ... 34

Şekil 3.9 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 4$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri 34

Şekil 3.10 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 3$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri 35

Şekil 3.11 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 2.5$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri 36

Şekil 3.12 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 2$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri 37

Şekil 3.13 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 1$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri 38

1. GİRİŞ

Matematiksel modellerle uğraşırken her zaman ortaya çıkan önemli bir sorun, matematiksel model ile gerçek olgu arasındaki boşluktur. Gerçek bir olguya çözüm sunan bir matematiksel model yaratmak için ne kadar çok çaba gösterilirse, onun karmaşıklığı o kadar artar. Öte yandan, aşırı basitleştirme, matematiksel modelin çözümünün gerçek olguyla tutarlı olmama olasılığını artırır. Ancak, olgularla uğraşırken, onları analiz etmek için genellikle nispeten basit matematiksel modeller kullanılmaktadır. Gerçek olgu ile ilgili verileri istatistiksel olarak işleyerek, optimum parametreleri belirleyerek ve verilere uyan matematiksel modele bir çözüm üreterek, matematiksel model ile gerçek olgu arasındaki boşluğu azaltmak genellikle mümkündür. Bunu kullanarak, gerçek olguların gelecekteki koşulları hakkında bilgi edinebiliriz, ancak bu istatistiksel işleme yöntemiyle elde edilen çözümler, uzun bir zaman aralığında gerçek olgular ile ilgili verilere mutlaka uymaz. Bu nedenle, çözümün gerçek verilere kısa bir süreye kadar uyduğuna inanmamız gerekir, ardından yeni veriler eklememiz, istatistiksel olarak yeniden işlememiz ve parametreleri değiştirmemiz gerekir. Başka bir deyişle, istatistiksel işlemeyi gerçek zamanlı olarak birçok kez tekrarlamak gerekir.

Popülasyon büyümesi ekolojinin merkezi bir sürecidir. Ancak hiçbir popülasyon sonsuza kadar artmaya devam etmez ve bu bizi popülasyonun düzenlenmesi sorununa götürür. Avlanma, rekabet, otçulluk ve hastalık gibi tür etkileşimleri popülasyon büyümesini etkilediği ve popülasyon büyümesi toplum yapısında değişiklikler ürettiği için popülasyon büyümesinin nasıl meydana geldiğini anlamak önemlidir. Uygun bir ortama bırakılan bir popülasyon sayıca artmaya başlayacaktır. Çakışan nesillere ve uzun veya sürekli bir üreme mevsimine sahip olan popülasyonlarda, diferansiyel denklemler kullanarak popülasyon büyümesini daha kolay tanımlayabiliriz. Şimdi t zamanındaki popülasyon büyümesinin yalnızca o zamanki koşullara bağlı olduğunu ve herhangi bir türdeki geçmiş olaylara bağlı olmadığını varsayalım.

$P = \phi(t)$ verilen türün t anındaki popülasyonu olsun. Popülasyonun değişimini ilgilendiren en basit hipotez, P nin mevcut değeriyle orantılı, yani

$$\frac{dP}{dt} = rP \tag{1.1}$$

olmasıdır. Burada oran sabiti r ye pozitif veya negatif olmasına göre büyüme veya gerileme oranı denir. (1.1) denklemi üstel büyüme modeli olarak adlandırılır. İdeal koşullar altında (1.1) denkleminin sınırlı sürelerde pek çok popülasyon için oldukça kesin sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Ancak, böyle ideal koşulların sonsuza kadar süremeyeceği açıktır. Zamanla yerdeki, yiyecek stokundaki veya başka kaynaklardaki kısıtlar büyüme hızını düşürecektir ve serbest üstel büyümenin sonunu getirecektir.

Büyüme hızının aslında popülasyona bağlı olduğunu hesaba katmak için (1.1) denklemdeki r sabitini bir $h(P)$ fonksiyonuyla değiştirilirse

$$\frac{dP}{dt} = h(P)P \tag{1.2}$$

denklemi elde edilir. Burada P küçük olduğunda $h(P) \cong r > 0$, P büyürken $h(P)$ azalan ve P yeterince büyük olduğunda $h(P) < 0$ olacak şekilde bir $h(P)$ fonksiyonu seçilmesi yerinde olacaktır. a pozitif bir sabit olmak üzere,

$$h(P) = r - aP$$

fonksiyonu, bu özelliklere sahip en basit fonksiyondur. Bu fonksiyon (1.2) denkleminde kullanılırsa,

$$\frac{dP}{dt} = (r - aP)P \tag{1.3}$$

denklemi elde edilir. (1.3) denklemi lojistik büyüme modeli olarak bilinir. Genellikle lojistik denklemi aşağıdaki denk formunda yazmak daha kullanışlıdır:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{1.4}$$

Burada $\tau = rt$ ve $y = P/K$ değişken değişimleri yapılırsa,

$$\frac{dy}{d\tau} = y - y^2$$

elde edilir. Bu denklem lojistik diferansiyel denklemin boyutsuz biçimi olarak bilinir (Boyce ve DiPrima, 2017).

Okyanusun belirli bir bölgesindeki belirli bir balık türünün popülasyonunu y ile gösterilsin ve popülasyon büyümesinin (1.4) deki lojistik denklemle tanımlandığı varsayılsın. Bu balık popülasyonu yapılan hasada bağlı olarak kullanışlı bir seviyenin altına inebilir ve hatta tükenmeye doğru sürüklenebilir.

Ne kadar çok balık varsa, onları yakalamak o kadar kolay olacağından, verilen bir çaba düzeyinde, balık yakalama oranının popülasyon y'ye bağlı olduğunu varsaymak mantıklıdır. E, bir balık türünü avlamak için harcanan toplam çabayı ölçen 1/zaman birimine sahip pozitif bir sabit olmak üzere, balık yakalama oranının Ey ile verildiği varsayımının (1.4) lojistik denklemine dahil edilmesi durumunda

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey \tag{1.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, Schaefer modeli olarak bilinmektedir (Boyce ve DiPrima, 2017).

Popa ve Ark. (2018), Onitsuka (2021, 2022) ve Kondo ve Onitsuka (2024) vd. yapmış oldukları çalışmalarda, bazı popülasyon modelleri için "gerçek olgu ile matematiksel model arasındaki farkın sabit $\varepsilon > 0$'dan küçük olduğu varsayıldığında, matematiksel modelin gerçek olgunun çözümüne yakın bir çözümü her zaman var mıdır?" sorusuna cevap bulmaya çalışmışlardır. Bu soru bir tür pertürbasyon (bozulma) problemine işaret etmektedir, ancak $\varepsilon > 0$ için düşük değerli bir koşula tabi değildir. Bununla ilgili kavram Ulam tarafından ortaya atılmış olup, buna Ulam kararlılığı denmektedir. Bu çalışmalarda, gerçek olgu ile matematiksel model arasındaki farkı ifade eden $\varepsilon > 0$ tahmin edilebilirse, matematiksel modelin çözümünün $[0, \infty)$ aralığında gerçek olguya yakın olacağı vurgulanmaktadır. Başka bir deyişle, yalnızca bir tür istatistiksel işlem yapılarak elde edilen parametrelere sahip ve dolayısıyla tekrarlanan istatistiksel işleme gerek duymayan bir matematiksel modelin, sonsuz bir zaman aralığında gerçek olguya yakın belirli bir çözümünün var olduğunu ispatlamaya çalışmışlardır. Ulam kararlılığının garanti edilmesi, matematiksel modelin gerçek olguya yakın olması ve matematiksel modelin kendisinin kararlılığının garanti edilmesi anlamına gelir. Ulam kararlılığı garanti etmeyen bir matematiksel model istatistiksel olarak işlenirse, gerçek olgu ile matematiksel modelin çözümü arasında kısa sürede

büyük bir boşluk ortaya çıkabilir. Başka bir deyişle, istatistiksel işlemenin standart yöntemi kullanılarak elde edilen analiz sonuçlarının güvenilirliği tehlikeye girebilir. Bu şekilde, Ulam kararlılığını belirleyerek matematiksel modelin güvenilirliği garanti altına alınabilir. Böylece, biyolojik dinamiklerde Ulam kararlılığının önemli bir sorun olduğu sonucuna varabiliriz.

Şimdiye kadar, Ulam kararlılığı üzerine yapılan araştırmaların çoğu, matematiksel ilgilere yönelik olarak gerçekleştirilmiştir. Ancak, bu çalışmada, Schaeffer büyüme modelinin Ulam kararlılığını güvenilir bir şekilde belirleyerek ve modelin kendisinin kararlılığını açıklayarak, bu tür matematiksel modellerin güvenle ele alınabilmesini sağlamaya katkıda bulunmayı amaçlıyoruz. Ulam kararlılığını matematiksel modellerin kararlılığı olarak ele alma girişimleri, hem biyolojik hem de matematiksel bakış açılarından bu tür çalışmaların yeniliğidir ve yeni bir zorluğu temsil etmektedir. Dahası, matematiksel modellerin kararlılığı, ne kadar çok deney yapılırsa yapılsın belirlenemez ve yalnızca matematiksel inceleme yoluyla açıklığa kavuşturulabilir.

Bu çalışmada, yukarıda (1.5) ile verilen Schaefer modelinin koşullu Ulam kararlılığı incelenecektir.

Öncelikle bu modelin klasik Hyers-Ulam kararlılık tanımını verelim.

Tanım 2. $z \in C^1[0,\infty)$ fonksiyonu

$$\left|\frac{dz}{dt} - r\left(1-\frac{z}{K}\right)z + Ez\right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir fonksiyon olmak üzere, Schaefer modelinin her $t \geq 0$ için

$$|z(t) - y(t)| \leq C\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in C^1[0,\infty)$ yakın çözümü var olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı varsa, (2.1) denklemi Hyers-Ulam kararlıdır denir.

Burada ε perturbasyon (bozulma) parametresidir. Bununla, modelde öngörülen oranlı hasat dışında kalan, yani modele dahil edilmeyen kaçak av, kirlilik, hastalık vb. olaylar sebebiyle meydana gelen balık kayıpları kastedilmektedir. Burada, ε parametresi ile gösterdiğimiz bu ek kaybın küçük olması durumunda, modelin balık kütlesini yine doğru bir biçimde verip veremeyeceği araştırılacaktır. Başka bir ifade ile, hangi aralıktaki ε değerleri ve başlangıçtaki balık stoğunun hangi değerleri için modelin dinamiklerinde, yani balık popülasyonunun sürdürülebilirliğinde bir sorun

yaşanmayacağı merak konusudur. Bu soruların cevabı modelin koşullu Ulam kararlılığının incelenmesinde aranmaktadır.

D, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi ve $M > 0$ veya $M = \infty$ olsun. C_D sınıfını

$$C_D = \{u \in C^1[0, T_u): u\,(0) \in D \subseteq \mathbb{R}\,\}$$

ile tanımlayalım. Schaefer modelinin koşullu Ulam kararlılığı da aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 3. Her bir $\varepsilon \in (0, M]$ ve

$$\left|\frac{dz}{dt} - r\left(1 - \frac{z}{K}\right)z + Ez\right| \leq \varepsilon, \quad t \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan her $z \in C_D$ yaklaşık çözümü için, Schaefer modelinin

$$|z(t) - y(t)| \leq K\varepsilon, \quad t \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in C_D$ çözümü var olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa, Schaefer modeli koşullu Ulam kararlıdır denir.

Eğer $M = \infty$ ve $D = \mathbb{R}$ ise, standart kararlılık kavramı elde edilir. Dahası, y fonksiyonu Schaefer modelinin çözümüdür ve $y \in C_D$ olması $y(0)$ başlangıç değeri D'de bulunduğu sürece y çözümünün $[0, \infty)$ üzerinde var olduğu anlamına gelir.

Bu yeni kararlılık kavramı, Schaefer modeli için Ulam kararlılığının standart tanımından, yaklaşık çözümlerin doğruluğunu kontrol eden ε parametresinin yalnızca belirli bir eşiğin altında pozitif değerler alabilmesi gerçeğiyle farklılık gösterir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Stanislaw Ulam, Wisconsin Üniversitesi Matematik kulübüne 1940 yılında verdiği meşhur konuşmasında birçok çözülmemiş problem sunmuştur. Bu problemlerden biri aşağıda verilmiştir:

G_1 bir grup ve G_2, $d(\cdot,\cdot)$ metriği ile bir metrik grup olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Eğer bir h: $G_1 \to G_2$ dönüşümü her $x, y \in G_1$ için

$$d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman her $x \in G_1$ için $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ ile bir $H: G_1 \to G_2$ homomofizmi var olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var mıdır?

Bu problem fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıç noktası olmuştur.

Kararlılık kavramı matematiksel problemler için genel anlamda şu sorular etrafında şekillenir: Bir teoremin varsayımlarında yapılan küçük bozunumlara rağmen, elde edilen temel sonucun geçerliliğini tamamen ya da yaklaşık olarak hangi şartlar altında sürdürdüğü söylenebilir? Aynı şekilde, belirli bir özelliği tam olarak değil de yaklaşık biçimde sağlayan bir matematiksel yapının, bu özelliği eksiksiz sağlayan bir yapıya yakın olması ne zaman beklenmelidir? Bu yaklaşım fonksiyonel denklemler bağlamına taşındığında, şu tür sorular öne çıkar: Verilen bir fonksiyonel denkleme çok küçük bir sapma ile farklılık gösteren başka bir denklemin çözümü, hangi durumlarda başlangıçtaki denklemin çözümüne yakın olmak zorundadır? Ya da bir fonksiyonel denklem yerini bir fonksiyonel eşitsizliğe bıraktığında, eşitsizliğin çözümlerinin denklemin çözümlerini yaklaşık olarak temsil ettiği ne zaman ileri sürülebilir? Fonksiyonel denklemlerde kararlılık konusu, esasen bu temel sorgulamalardan doğmuştur (Rassias, 2000).

D.H. Hyers, 1941 de yayınlamış olduğu bir çalışmada Ulam'ın sorusuna ilk cevabı

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

toplamsal Cauchy fonksiyonel denklemi için vermiştir. Daha sonra, Ulam'ın probleminin bir genelleştirmesi olarak fonksiyonel denklemlerin yerine diferansiyel denklemlerin kullanılmasıyla yeni bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. Lineer diferansiyel denklemlerin Ulam kararlılığını inceleyen ilk bilinen kişi Obłoza (1993; 1997) dır. Daha

sonra, Alsina ve Ger (1998), bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını araştıran ilk çalışmalarında, $y'(t) = y(t)$ diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını ele aldılar ve bu denklemin, eğer $y: I \to \mathbb{R}$, her $t \in I$ için

$$|y'(t) - y(t)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir diferansiyellenebilir fonksiyon ise, o zaman her $t \in I$ için

$$|y(t) - g(t)| \leq 3\varepsilon$$

olacak şekilde bir $g: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir çözümünün var olduğunu ispatladılar.

Alsina ve Ger'in (1998) bu sonucu Miura ve Ark. (2001), Miura (2002) ve Takahasi ve Ark. (2002) tarafından genelleştirildi. Daha sonra Miura ve Ark. (2003), Miura ve Ark. (2004) ve Jung (2004; 2005; 2006) değişik türden birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Ulam kararlılığını incelemişlerdir.

Hyers-Ulam kararlılıktan koşullu kararlılığa diferansiyel denklemlerin kararlılık teorisinde merkezi sorulardan biri şu şekilde de ifade edilebilir: Eğer bir fonksiyon bir diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü ise, yakınında kesin bir çözüm var mıdır ve sapma nicel olarak ölçülebilir mi? Lineer olmayan biyolojik büyüme modellerinde, Hyers-Ulam kararlılık gereksinimi iki nedenden dolayı çok güçlüdür. Birincisi, dinamikler hasat edilen büyüme yasalarındaki yok olma eşikleri gibi belirli pertürbasyon eşiklerinin ötesinde niteliksel olarak değişebilir. İkinci olarak, biyolojik olarak anlamlı çözümler genellikle hayatta kalma eşiklerinin üzerindeki pozitif popülasyonlar gibi sınırlı durum bölgelerinde yer alırken, klasik tanım, anlamlı ve anlamsız hasat yöntemlerini ayırt etmeden geniş bir durum uzayındaki yaklaşımı nicelendirir. Bu gözlemler, kararlılığın yalnızca başlangıç koşulları ve/veya perturbasyon (bozulma) parametresi üzerindeki açık kısıtlamalar altında ileri sürülen koşullu Ulam kararlılığı kavramına yönlendirir. Koşullu Ulam kararlılığı durumunda, kabul edilebilir bir D başlangıç değerleri kümesi ve bir $(0, \mathrm{M}]$ bozulma aralığı kullanılır ve başlangıç değeri D 'ye ait olan ve bozulma parametresi $\varepsilon \leq M$ ile sınırlı olan yaklaşık çözümler incelenir. Kararlılık, aynı kabul edilebilir sınıf içinde kesin bir çözümün var olması ve incelenen tüm zamanlar için kesin çözüm ile bozulmuş denklemin çözümünün farkının $C\varepsilon$ içinde kalması anlamına gelir.

Literatürde koşullu kararlılık üzerine yapılmış ilk ve en temel kaynak Popa ve Ark. (2018) tarafından lojistik denklem üzerine yapılan çalışmadır. Bu çalışmada

$$\frac{dP}{d\tau} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$$

lojistik denkleminde $r = t\tau$ ve $y = P/K$ değişken dönüşümlerinin yapılması ile elde edilen

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 \qquad (2.1)$$

boyutsuz lojistik diferansiyel denklemi ele alınmış ve yaklaşık çözümler, bozulmuş bir denklemin kesin çözümleri olarak aşağıdaki gibi yorumlanmıştır:

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{y} - \tilde{y}^2 + f(t), \quad |f(t)| \leq \varepsilon$$

Hasat durumunu içeren

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 - \varepsilon$$

biçimindeki denklemden önemli bir olgu ortaya çıkar: kritik bir eşiği aştığında, niteliksel dinamikler değişebilir ve çözümler yok olmaya veya diğer lojistik olmayan davranışlara doğru yönlendirilebilir. Yazarlar, kritik bir $\varepsilon_c = 1/4$ sınırı belirlemiş ve yalnızca bu seviyenin altındaki bozulmalar ve uygun bir kabul edilebilir kümedeki başlangıç verileri için tekdüze bir yaklaşım tahmini elde edilebileceğini göstermiştir. Daha açık bir ifadeyle, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4}]$ ve $y(0) \geq 1/2$ için, (2.1) denkleminin

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq 2\varepsilon, \quad t \geq 0$$

olacak şekilde kesin bir y çözümünün var olduğunu kanıtlamış, $C = 2$ sabiti ile bir koşullu Ulam kararlılık sonucu elde etmişlerdir.

Onitsuka (2021), koşullu kararlılık çerçevesini

$$\frac{dx}{dt} = x(a + bx), \quad a \neq 0, b \neq 0$$

biçimindeki daha geniş bir tek boyutlu lojistik tip denklemler sınıfına genişletmiş, a ve b cinsinden açık pertürbasyon eşiklerini ve Ulam sabitlerini elde etmiştir. Bu genel sonuç, Popa ve Ark. (2018) çalışmasında elde edilen sonucu özel bir durum olarak yeniden ortaya çıkarmış ve koşullu kararlılık özelliklerinin değişkenlerin ve parametre ölçeklendirmelerinin yeni değişimleri altında nasıl davrandığını açıklığa kavuşturmuştur. Özetle, kabul edilebilir bir D başlangıç değerleri kümesi ve bir $(0, \mathrm{M}]$

bozulma aralığının var olması koşulu altında, koşullu kararlılık lojistik büyüme modelleri için söz konusudur.

Anderson ve Ark. (2025) tümör büyümesi ve diğer popülasyon dinamikleri bağlamlarında yaygın olarak kullanılmakta olan ve

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t)\log\left(\frac{\kappa}{N(t)}\right), \ \ \alpha > 0, \kappa > 0 \qquad (2.2)$$

ile verilen Gompertz modelinin koşullu Ulam kararlılığını incelemişlerdir. Burada $N(t)$ ile t zamanındaki popülasyon büyüklüğü veya tümör hacmi, α ile büyüme katsayısı ve κ ile taşıma kapasitesi kastedilmektedir. (2.2) ile verilen model, değişken dönüşümü kullanılarak

$$G'(\tau) = -G(\tau)\log G(\tau)$$

denklemine indirgenmiş ve bu denklem üzerinden analiz yapılmıştır. Çalışmada,

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\alpha\kappa}{e}, \ \ N(0) \geq \frac{\kappa}{e}$$

koşullarının sağlanması durumunda, (2.2) denkleminin $[0, \infty)$ da $C = e(e-1)/\alpha$ Ulam sabiti ile koşullu Ulam kararlı olduğu gösterilmiştir. Bu sonuç doğrudan karşılaştırma prensibi ve kesin eşitsizlikler kullanılarak elde edilmiştir.

Anderson ve Onitsuka (2026)

$$N'(\tau) = \alpha N^{\beta}(\tau)\left(1 - \left(\frac{N(\tau)}{\kappa}\right)^{\gamma}\right), \ \ \alpha, \gamma, \kappa > 0, \beta \in (0,1]$$

ile verilen bir genelleştirilmiş Richards (veya Savageau tipi) büyüme modelinin Hyers-Ulam kararlılığı, pertürbasyonun maksimum boyutunun çok büyük olmaması ve başlangıç koşulunun taşıma kapasitesinin kuvvetleri açısından çok küçük olmaması şartına bağlı olarak koşullu olarak belirlenmiştir. Hyers-Ulam kararlılık sabitleri açıkça belirlenmiş ve modeldeki güç parametrelerinin göreceli boyutlarına bağlı olduğu gösterilmiştir. Elde edilen sonuçların keskinliğini göstermek için hem kararlılık hem de kararsızlık örnekleri verilmiştir. Ana sonuç daha sonra bir doku büyüme modeline uygulanmıştır. Bu sonuçlar, lojistik denklemin bilinen kararlılık özelliklerini genelleştirmekte ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerde fonksiyonel kararlılık teorisine katkıda bulunmaktadır, ki bu da popülasyon ve biyolojik modeller ve ilgili uygulamalar için çıkarımlar içerir.

Onitsuka (2022) Popa ve Ark. (2018) tarafından geliştirilen koşullu Ulam kararlılığını, w'nin kütleyi, $a > 0$ ve $b > 0$ parametrelerinin ise sırasıyla anabolizma ve katabolizma katsayılarını ifade ettiği

$$\frac{dw}{dt} = aw^{\frac{2}{3}} - bw \tag{2.3}$$

ile verilen von Bertalanffy büyüme modeline uygulamışlardır. Uygun bir değişken değişimi ile (2.3) denklemi

$$\frac{dz}{dt} = z^{\frac{2}{3}} - z \tag{2.4}$$

formuna indirgenmiş, (2.4) denkleminin koşullu Ulam kararlılığı için elde edilen sonuçlar kullanılarak (2.3) denkleminin koşullu Ulam kararlılığı ispatlanmıştır. Sonuç olarak, gözlemlenen büyüme ile model dinamikleri arasındaki tutarsızlık düzgün bir şekilde sınırlıysa ve başlangıç kütlesi bir hayatta kalma eşiğinin üzerindeyse, o zaman tüm zaman boyunca gözlemlenen çözüme düzgün bir şekilde yakın kalan kesin bir von Bertalanffy çözümünün var olduğu gösterilmiştir.

Düşük popülasyonda işbirlikçi veya yoğunluğa bağlı etkileri dahil etmek için, Allee etkisine maruz kalmış bir von Bertalanffy modeli, bir eşiğin altında yok oluşu zorunlu kılabilen ek bir faktör sunar. Bu durumda ortaya çıkan Allle etkili von Bertalanffy modeli aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$x' = \left(ax^{\frac{2}{3}} - bx \right)\left(c - dx^{\frac{1}{3}} \right), \;\; a, b, c, d > 0 \tag{2.5}$$

Kondo ve Onitsuka (2024) (2.5) modelinin koşullu Ulam kararlılığını analiz etmiştir. Allee etkisinin çok küçük veya çok büyük olduğu koşullara karşılık gelen sonuçlar elde edilmiş, özellikle, Allee etkisi sıfıra yaklaştıkça, standart von Bertalanffy büyüme modeli için mevcut sonuçtan daha tercih edilebilir bir Ulam sabiti elde edilmiştir. Çalışmada, Allee etkisiyle von Bertalanffy büyüme modelinin Ulam kararlılığını garanti edilerek, modelin kendisinin kararlılığı garanti altına alınmış ve

küçük bir pertürbasyon eklense bile, küçük bir pertürbasyonun bile çözümler üzerinde büyük bir etkisi olmadığı açıkça ortaya konmuştur

3. SCHAEFER MODELİNİN KOŞULLU ULAM KARARLILIĞI

Bu bölümde Schaefer modelinin tanıtılması, niteliksel özelliklerinin incelenmesi ve elde edilen sonuçların biyolojik olarak yorumlanmasının ardından, modelin koşullu Ulam kararlılığı ile ilgili sonuçlar verilecektir.

3.1. Schaefer Modeli

Okyanusun belirli bir bölgesindeki belirli bir balık türünün (örneğin ton balığı veya pisi balığı) popülasyonu y'nin aşağıdaki lojistik denklemle tanımlandığı varsayılsın:

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{3.1}$$

Her ne kadar bu yiyecek kaynağından istifade etmek çekici olsa da eğer çok fazla balık avlanırsa balık popülasyonu kullanışlı bir seviyenin altına inebilir ve hatta tükenmeye sürüklenebilir.

Verilen bir çaba düzeyinde, balık yakalama oranının popülasyon y'ye bağlı olduğunu varsaymak mantıklıdır: ne kadar çok balık varsa, onları yakalamak o kadar kolay olur. Bu nedenle balık yakalama oranının Ey ile verildiği varsayılmaktadır, burada E, belirli balık türlerini avlamak için harcanan toplam çabayı ölçen, 1/zaman birimine sahip pozitif bir sabittir. Bu etkiyi dahil etmek için (3.1) lojistik denklemi

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey \tag{1.5}$$

ile değiştirilir. Bu denklem, biyolog M. B. Schaefer'in bunu balık popülasyonlarına uygulaması nedeniyle Schaefer modeli olarak bilinmektedir (Boyce ve DiPrima, 2012).

(1.5) denkleminin sağ tarafındaki $f(y)$ fonksiyonunu sıfır yapan y değerlerine, bu denklemin denge çözümleri adı verilir. t artarken y nin değerinde bir değişiklik olmadığı için, denge çözümlerinin (1.5) in birer sabit çözümü olduğuna dikkat edilir.

$E < r$ ise, (1.5) denkleminin denge noktaları $y_1 = 0$ ve $y_2 = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$ dir. Birinci denge balık stoğunun yok olmasına karşılık gelir. $E < r$ ise, y_2 denge noktası pozitiftir ve olası bir denge popülasyonudur.

Şimdi bu denge noktalarının kararlılık durumlarını belirleyelim.

Teorem 3.1. y^* nin

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

ile verilen otonom adi diferansiyel denklem için bir denge noktası olduğunu varsayalım. Eğer $f'(y^*) < 0$ ise, y^* asimptotik olarak kararlıdır. Eğer $f'(y^*) > 0$ ise, y^* kararsızdır.

(1.5) denkleminin sağ tarafındaki

$$f(y) = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey$$

fonksiyonunun türevi alınırsa

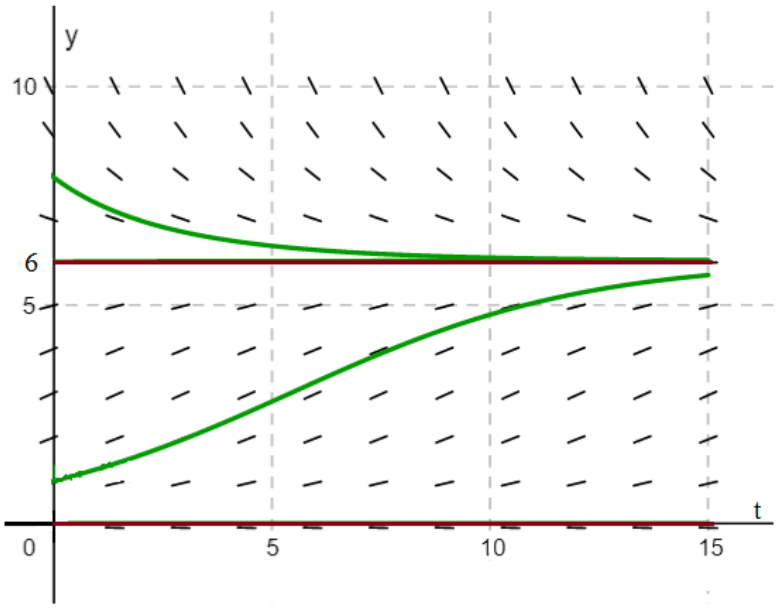
$$f'(y) = r - 2\frac{r}{K}y - E \qquad (3.3)$$

bulunur. y_2 denge noktasını (3.3) de yerine yazdığımızda $f'(y_2) \leq 0$ elde edilir. Teorem 3.1 den dolayı y_2 denge noktası asimptotik kararlıdır. $f'(y_1) \geq 0$ olduğu için y_1 denge noktası kararsızdır.

Aşağıda, (1.5) denklemindeki parametrelere $r = 0.5 \quad K = 10$ ve $E = 0.2$ değerleri verilerek elde edilen

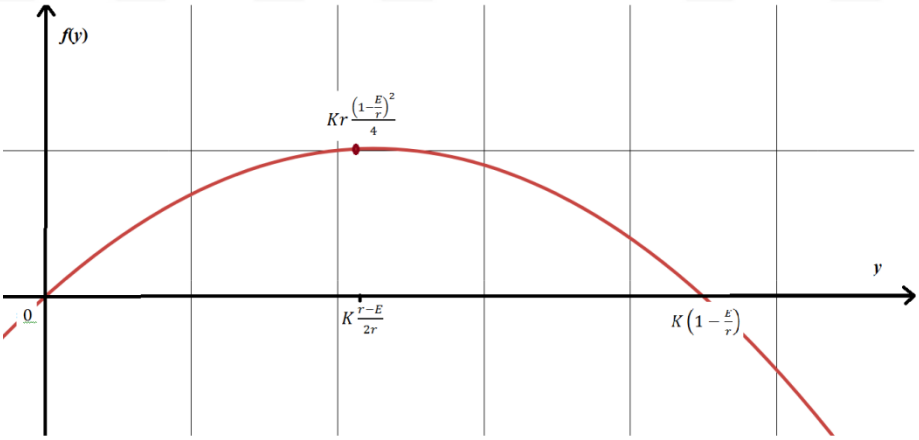
$$\frac{dy}{dt} = 0.5y\left(1 - \frac{y}{10}\right) - 0.2y$$

diferansiyel denkleminin eğim alanı ve yörüngeleri çizdirilmiştir. Şekil 1.1 den görülebileceği gibi, y_2 denge noktasına karşılık gelen $y = 6$ asimptotik kararlıdır.



Şekil 3.1 $\frac{dy}{dt} = 0.5y\left(1-\frac{y}{10}\right) - 0.2y$ diferansiyel denkleminin eğim alanı ve yörüngeleri

Şimdi $f(y)$ nin grafiğini çizelim



Şekil 3.2 $\frac{dy}{dt} = ry\left(1-\frac{y}{K}\right) - Ey$ diferansiyel denklemi için y ye karşı $f(y)$ nin grafiği

Grafikdeki parabolün yatay ekseni kestiği noktalar, (1.5) modelinin denge noktalarıdır. Parabolün tepe noktası $\left(\frac{K(r-E)}{2r}, Kr\left(\frac{r-E}{2}\right)^2\right)$ noktasıdır. $0 < y < Kr\left(\frac{r-E}{2}\right)^2$ için $dy/dt > 0$ olduğundan, y bu aralıkta iken t'nin artan bir fonksiyonudur; bu Şekil

1.2. deki y ekseninin yakınındaki sağa doğru bakan oklarla belirtilmektedir. Benzer şekilde, eğer $y > K\left(1-\frac{E}{r}\right)$ ise, $dy/dt < 0$'dır; dolayısıyla Şekil 1.2'deki sol yönü gösteren okla belirtildiği gibi y azalır.

Bu bağlamada y-eksenine genelde faz doğrusu denir ve Şekil 1.3 daha alışılmış düşey yöneliminde yeniden oluşturulur. $y = 0$ ve $y = K\left(1-\frac{E}{r}\right)$'daki noktalar denge çözümleridir. Yani $0 < y < K\left(1-\frac{E}{r}\right)$ olduğunda y'nin artığını ve $y > K\left(1-\frac{E}{r}\right)$ olduğunda azalan ve y fonksiyonu 0 ve $K\left(1-\frac{E}{r}\right)$ değerlerinden birisine yaklaşırken düzleşen eğriler çizeriz. Böylece denklem (1)'nin çözümlerinin grafikleri r, K ve E'nin değerlerinden bağımsız olarak Şekil 1.3 gösterilen genel şekle sahip olmak zorundadır.

Şekil 3.1, diğer çözümlerin $y = K\left(1-\frac{E}{r}\right)$ denge çözümünü kesebileceğini gösteriyor, fakat bu gerçekten mümkün müdür? Hayır değildir, temel varlık teklik teoremi ty- düzleminde verilen bir noktadan sadece bir çözümün geçebileceğini ifade eder. Böylece her ne kadar diğer çözümler $t \to \infty$ iken denge çözümüne asimptotik olsalar da herhangi bir sonlu zamanda onu kesemezler. Sonuç olarak $0 < y < K\left(1-\frac{E}{r}\right)$ aralığında başlayan bir çözüm her zaman bu aralıkta kalır ve benzer şekile $K\left(1-\frac{E}{r}\right) < y < \infty$ aralığında başlayan bir çözüm bu aralıkta kalır.

Şimdi (1.5) denklemin çözüm eğrilerinin içbükeyliğini ve dönüm noktalarını belirleyelim. (1.5) denklemi için; $0 < y < \frac{K(r-E)}{2r}$ için f pozitif ve artan böylece hem f hem de f' pozitif (bkz. Şekil 3.2) olduğunda çözümler yukarı doğru içbükey, $y > \frac{K(r-E)}{2r}$ için f negatif ve azalan hem f hem de f' negatif olduğundan çözümler yukarı içbükey ve $\frac{K(r-E)}{2r} < y < K\left(1-\frac{E}{r}\right)$ için burada f pozitif ve azalan bir değerdir, dolayısıyla f pozitif ancak f' negatiftir olduğu için çözümler aşağı doğru içbükeydir. y nin t ye göre grafiği $y = \frac{K(r-E)}{2r}$ doğrusunu kestiğinde bir dönüm noktası oluşur. Son olarak, $K\left(1-\frac{E}{r}\right)$'nin bu değerin altından başlayarak büyüyen popülasyonlar tarafından yaklaşılan ancak aşılmayan üst sınır olduğunu unutmayın. Dolayısıyla, $K\left(1-\frac{E}{r}\right)$ 'yi belirli bir tür için doygunluk seviyesi veya çevresel taşıma kapasitesi olarak adlandırmak doğaldır.

Birçok durumda, (1.5) denkleminin çözümü hakkında nitel bilgiye sahip olmak yeterlidir. Bu bilgi (1.5) diferansiyel denklem çözmeden tamamen $f(y)$ nin y ye göre grafiğinden elde edilmektedir. Ancak, Schaefer modelinde popülasyonun belli bir zamandaki değerini bilmek istersek, (1.5) denklemi $y(0) = y_0$ başlangıç koşulu ile çözülür. (1.5) denkleminin çözümünü bulmak için denklem, $y \neq 0$ ve $y \neq K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$ olmak üzere, aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\frac{1}{y\left(1 - \frac{E}{r} - \frac{y}{K}\right)} dy = rdt.$$

Buradan devam edilirse

$$\frac{y}{1 - \frac{E}{r} - \frac{y}{K}} = ce^{\frac{r-E}{r}t} \tag{3.4}$$

elde edilir. Başlangıç koşulu $y(0) = y_0$ denklemde yazıldığında $c = 1/y_0 - 1/K$ bulunur. (3.4) denkleminde c için bu değer kullanılarak ve y için çözülerek

$$y(t) = \frac{\left(1 - \frac{E}{r}\right) y_0}{\left(\left(1 - \frac{E}{r}\right) - \frac{1}{K} y_0\right) e^{-\frac{r-E}{r}t} + \frac{1}{K} y_0} \tag{3.5}$$

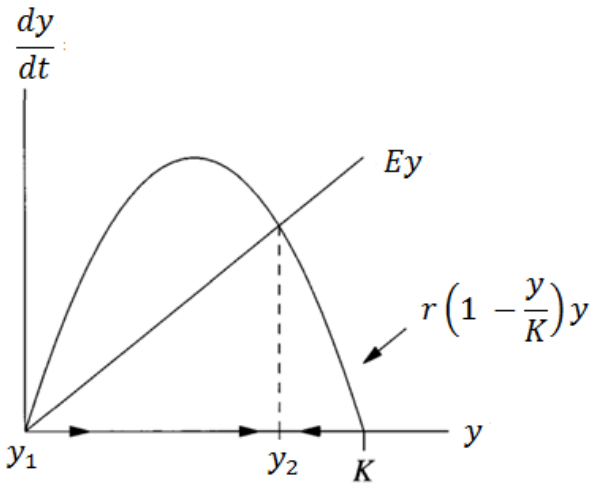
elde edilir. Daha önce elde edilen ulaşılan niteliksel sonuçların tümü (3.5) çözümünün incelenmesiyle doğrulanabilir. Özel olarak, eğer (3.5) denkleminde $y_0 = 0$ bırakılması her t için $y(t) = 0$ olmasını gerektirir. Eğer $y_0 > 0$ ise ve (3.5) denkleminde de $t \to \infty$ alınırsa

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$$

elde edilir. Böylece $y_0 > 0$ için $t \to \infty$ iken çözüm, $y_2(t) = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$ denge çözümüne asimptotik olarak yaklaşır. Dolayısıyla (1.5) denkleminin $y_2(t) = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$ sabit çözümü asimtotik kararlıdır. Öte yandan denge çözümü $y_1(t) = 0$ için durum

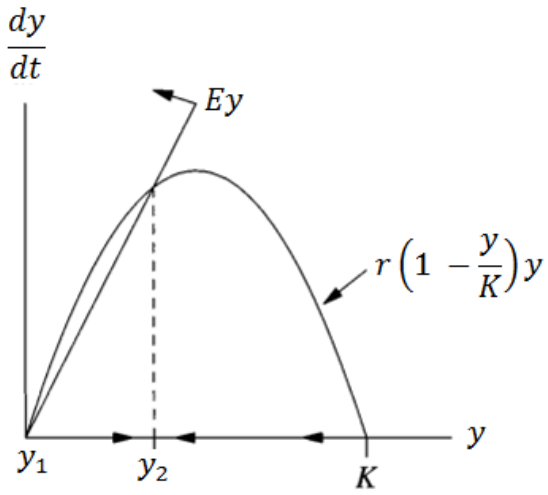
oldukça farklıdır. Çözümler sıfıra çok yakın başlasalar bile t artarken büyürler ve $t \to \infty$ iken $K\left(1-\frac{E}{r}\right)$ 'ya yaklaşırlar. $\phi_1(t) = 0$ bir kararsız denge çözümüdür.

Balık yakalama oranının küçük değerleri için, y_2 denge noktası asimptotik kararlıdır. Bu, Şekil 3.3'den açıkça anlaşılmaktadır. Bu dengenin sağındaki bozulmalar için, hasat oranı büyüme oranından daha büyüktür ve balık stoğunun seviyesi azalır. Bu dengenin solundaki küçük bozulmalar için, büyüme oranı hasat oranını aşar ve stok artar. Her iki durumda da, bozulmalar azalır ve stok seviyesi, apsis boyunca okların gösterdiği gibi y_2 denge noktasına döner. y_1 denge noktası ise kararsızdır.



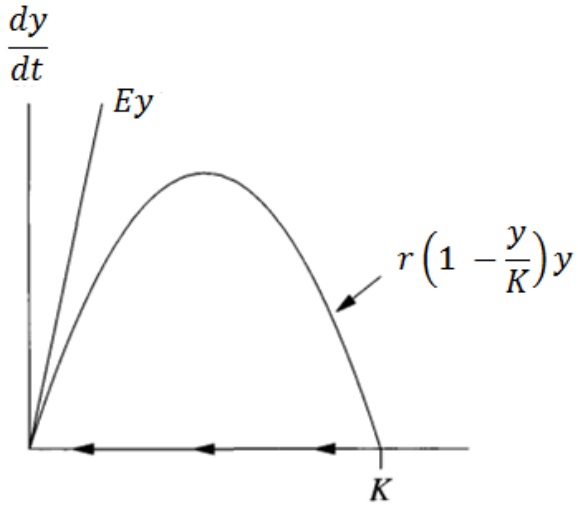
Şekil 3.3 Düşük ölümlü hasat (Kot, 2001)

Balık yakalama oranı artmaya başladığında (Şekil 3.4), y_2 denge noktası sola kayar ancak kararlılığını korur.



Şekil 3.4 Yüksek ölüm oranlı hasat (Kot, 2001).

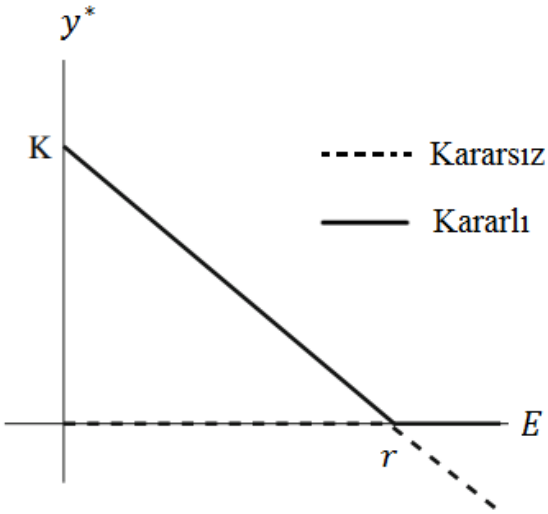
Balık yakalama oranı artmaya devam ettikçe, sonunda hasadın tüm pozitif stok seviyeleri için büyüme oranını aştığı bir noktaya ulaşılır (Şekil 3.5). Aniden, yok oluşa karşılık gelen başlangıç noktasındaki denge kararlı hale gelir (Kot, 2001).



Şekil 3.5 Aşırı avlanma (Kot, 2001).

Her iki denge noktası da y^* ile gösterilirsin. Denge noktalarının konumu E nin bir fonksiyonu olarak koordinat sisteminin pozitif dörtte birlik kısmında çizilir ve denge noktalarının kararlı dalları ince bir çizgiyle, kararsız dalları ise kalın bir çizgiyle gösterilirse, Şekil 3.6 daki grafik elde edilir. Çözümlerin konumunun ve kararlılığının bir parametreye nasıl bağlı olduğunu gösteren grafiklere çatallanma diyagramı adı

verilir. Şekil 3.6 'da $E = r$ 'de transkritik bir çatallanma vardır: iki dal 'çarpışır' ve kararlılık alışverişinde bulunur. Bu çatallanmada sistemin davranışında nitel bir değişiklik olur. Ekolojik açıdan bakıldığında, grafik balık popülasyonunun denge seviyesinin balıkçılık ölüm oranına bağımlılığını göstermektedir (Kot, 2001; Miller ve Kuttler, 2015).

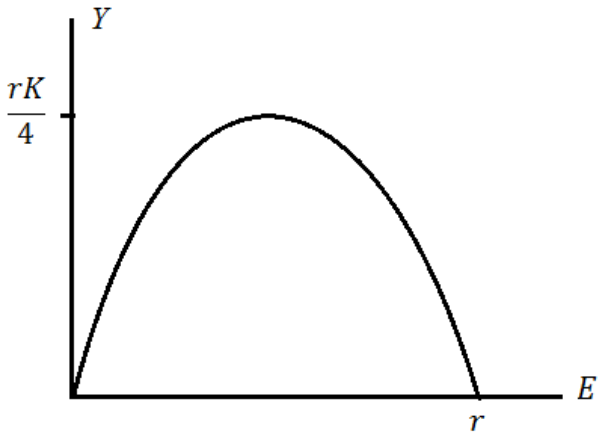


Şekil 3.6 Çatallanma parametresi olarak E 'yi kullanan çatallanma diyagramı (Kot, 2001).

Balıkçılığın sürdürülebilir verimi Y, balıkların sonsuza kadar yakalanabileceği orandır. E çabası ile asimptotik olarak kararlı y_2 popülasyonunun çarpımıdır:

$$Y = Ey_2 = EK\left(1 - \frac{E}{r}\right).$$

Bu fonksiyonun grafiği verim-çaba eğrisi olarak bilinir ve grafiği bir paraboldür (Şekil 3.7). Buradan şunu görebiliriz: Balıkçılık çabası artırılırsa, sürdürülebilir verim de artar, ancak yalnızca belirli bir noktaya kadar. Daha fazla artış, sürdürülebilir verimi tekrar azaltır; hasat edilen popülasyon için bu, aşırı sömürüldüğü ve tükendiği anlamına gelir.



Şekil 3.7 Verim-çaba eğrisi (Kot, 2001)

Sürdürülebilir verimi en üst düzeye çıkarmak ve böylece sürdürülebilir maksimum verimi bulmak için gerekli E değerini belirleyelim. Sürdürülebilir verim, çabanın asimptotik olarak kararlı popülasyonla çarpımıdır:

$$Y(E) = EK\left(1 - \frac{E}{r}\right)$$

Sürdürülebilir maksimum verim

$$\frac{dY}{dE} = K\left(1 - \frac{E}{r}\right) + EK\left(-\frac{1}{r}\right) = 0$$

olduğunda meydana gelir. Buna karşılık gelen maksimum çaba $E = r/2$ olur. Sürdürülebilir maksimum verim Y_m ile gösterilsin. Bu durumda,

$$Y_m = Y\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{rK}{4}$$

elde edilir (Kot, 2001; Miller ve Kuttler, 2015).

3.2. Schaefer modelinin koşullu Ulam kararlılığı

Bu kısımda, giriş kısmında (1.5) ile tanıtılan Schaefer denkleminin koşullu Ulam kararlılığı, bu denklemin çözümü ile

$$\frac{dz}{dt} = r\left(1 - \frac{z}{K}\right)z - Ez - \varepsilon, \quad t \geq 0$$

ile verilen bozulmuş Schaefer denkleminin çözümünün birbirine yakınlığı üzerine elde edilen sonuçlar üzerinden analiz edilecektir.

3.2.1. Bozulmuş denklem için çözümlerin davranış

$\tau := rt$ ve $x := \frac{y}{K}$ değişken değişimi yapılırsa, $\tau \geq 0$ için (1.5) denklemi

$$\frac{dx}{d\tau} = x(\tau)\big(1 - x(\tau)\big) - \frac{E}{r}x(\tau) \tag{3.6}$$

diferansiyel denklemine dönüşür. Burada $L = E/r$ alınır ve (3.6) denkleminin sağ tarafı yeniden düzenlenirse

$$\frac{dx}{d\tau} = x(\tau)\big(1 - L - x(\tau)\big) \tag{3.7}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $\tau \geq 0$ için

$$p'(\tau) = p(\tau)\big(1 - L - p(\tau)\big) + f(\tau), \qquad |f(\tau)| \leq \varepsilon \tag{3.8}$$

$$q'(\tau) = q(\tau)\big(1 - L - q(\tau)\big) - \varepsilon \tag{3.9}$$

ve

$$\xi'(\tau) = \xi(\tau)\big(1 - L - \xi(\tau)\big) + \varepsilon \tag{3.10}$$

bozulmuş denklemleri ele alınsın. $t \geq 0$ için $f(t)$ sürekli bir fonksiyondur. (3.10) denkleminin başlangıç koşulu

$$x(0) = p(0) = q(0) = \xi(0) = x_0 \tag{3.11}$$

olarak verilsin. Yukarıdaki denklemlerin sağ tarafı sürekli türevlenebilir olduğundan, çözümlerin yerel varlığı ve tekliği garanti edilir. Dahası, (3.11) başlangıç koşullarına sahip olan (3.8), (3.9) ve (3.10) denklemlerinin çözümleri için global varlık aşağıdaki gibi belirli koşullar altında garanti edilir.

Lemma 3.1. $q \geq 0$ için $F(q) = q(1 - L - q) - \varepsilon$ fonksiyonu tanımlanmış olsun. Eğer $q \in (-\infty, q_1) \cup (q_2, \infty)$ ise $F(q) < 0$ ve $q \in (q_1, q_2)$ ise $F(q) > 0$ olur.

İspat. $F(q) = 0$ denklemin köklerinin

$$q_1 = \frac{1-L}{2} - \sqrt{\left(\frac{L-1}{2}\right)^2 - \varepsilon}$$

ve

$$q_2 = \frac{1-L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L-1}{2}\right)^2 - \varepsilon}$$

şeklindedir. Bunlar (3.9) denkleminin denge noktalarıdır, yani q_1 ve q_2, (6) denkleminin sabit çözümleridir. $a := \frac{1-L}{2}$ denirse

$$q_1 < a < q_2$$

Ve

$$\frac{dF}{dq}(a) = 0$$

olur. Dahası, $q \in (-\infty, a)$ ise $\frac{dF}{dq}(q) > 0$; $q \in (a, \infty)$ ise $\frac{dF}{d}(q) < 0$ olur. $F(q)$ bu nedenle $q = a$ da yerel minimum değerini alır; $q \in (-\infty, q_1) \cup (q_2, \infty)$ için $F(q) < 0$ ve $q \in (q_1, q_2)$ için $F(q) > 0$ olur.

Teorem 3.2. $p \in C^1[0, T_p)$, $q \in C^1[0, T_q)$ ve $\xi \in C^1[0, T_\xi)$ sırasıyla (3.11) başlangıç koşullarına sahip olan (3.8), (3.9) ve (3.10) denklemlerinin çözümleri olsun. O halde $0 \leq \tau < \min\{T_p, T_q, T_\xi\}$ için

$$q(\tau) \leq p(\tau) \leq \xi(\tau) \qquad (3.12)$$

olur. Ayrıca, eğer $0 < \varepsilon \leq \frac{(1-L)^2}{4}$ ve $\frac{1-L}{2} \leq x_0$ ise, o zaman $T_p = T_q = T_\xi = \infty$ ve $\xi \in [0, \infty)$ için

$$\frac{1-L}{2} \leq q(\tau) \leq p(\tau) \leq \xi(\tau) \tag{3.13}$$

olur.

İspat. Öncelikle, $\tau \geq 0$ için $q(\tau) \leq p(\tau)$ olduğunu kanıtlıyoruz. $\tau \geq 0$ için $\omega(\tau) := p(\tau) - q(\tau)$ olarak tanımlayalım. Denklem (3.11) ile $\omega(0) = 0$ elde ederiz. Bunu kullanarak

$$\begin{aligned}\omega'(\tau) = p'(\tau) - q'(\tau) &= p(\tau)\big(1 - L - p(\tau)\big) - q(\tau)\big(1 - L - q(\tau)\big) + f(t) + \varepsilon \\ &= (1-L)p(\tau) - p^2(\tau) - (1-L)q(\tau) + q^2(\tau) + f(t) + \varepsilon \\ &= \big(q^2(\tau) - p^2(\tau)\big) + \big(p(\tau) - q(\tau)\big)(1-L) + f(t) + \varepsilon \\ &\geq \big(-p(\tau) - q(\tau) + (1-L)\big)\omega(\tau)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\psi(\tau) =: -p(\tau) - q(\tau) + (1-L)$$

denirse

$$\omega'(\tau) \geq \psi(\tau)\omega(\tau)$$

elde edilir. Son eşitsizliğin 0 dan τ ya integrali alınırsa,

$$\omega(\tau) \geq \omega(0)\exp\left(\int_0^\tau \psi(s)ds\right) = 0$$

elde edilir. Bu nedenle, $\tau \geq 0$ için

$$q(\tau) \leq p(\tau) \tag{3.14}$$

sonucuna varılabilir. Aynı yöntem kullanılarak, $t \geq 0$ için $p(\tau) \leq \xi(\tau)$ eşitsizliğinin geçerli olduğu ispatlanabilir. $\tau \geq 0$ için $h(\tau) := \xi(\tau) - p(\tau)$ olarak tanımlansın. (3.11) başlangıç koşulundan $\phi(0) = 0$ elde edilir. Bu kullanılarak

$$h'(\tau) \coloneqq \xi'(\tau) - p'(\tau) = \xi(\tau)\big(1 - L - \xi(\tau)\big) - p(\tau)\big(1 - L - p(\tau)\big) - f(t) + \varepsilon$$
$$= (1 - L)\xi(\tau) - \xi^2(\tau) - (1 - L)p(\tau) + p^2(\tau) - f(t) + \varepsilon$$
$$= \big(p^2(\tau) - \xi^2(\tau)\big) + \big(\xi(\tau) - p(\tau)\big)(1 - L) - f(t) + \varepsilon$$
$$\geq \big(-\xi(\tau) - p(\tau) + (1 - L)\big)h(\tau)$$

elde edilir. Burada

$$\phi(\tau) =: -\xi(\tau) - p(\tau) + (1 - L)$$

Denirse

$$h'(\tau) \geq \phi h(\tau)$$

olur. Son eşitsizliğin 0 dan τ ye integrali alınırsa,

$$h(\tau) \geq h(0)\exp\left(\int_0^{\tau} \phi(s)ds\right) = 0$$

bulunur. Buradan $\tau \geq 0$ için

$$p(\tau) \leq \xi(\tau) \tag{3.15}$$

sonucuna ulaşılır. (3.14) ve (3.15) den, $\tau \geq 0$ için $q(\tau) \leq p(\tau) \leq \xi(\tau)$ elde edilir.

İkinci eşitsizliği ispatlamak için, $0 < \varepsilon \leq \frac{(1-L)^2}{4}$ ve $\frac{1-L}{2} \leq x_0$ olduğu varsayılacak ve ilk olarak, $\tau \geq 0$ için $\frac{1-L}{2} \leq q(\tau)$ olduğu ispatlanacaktır.

$$q(\tau)\big(1 - L - q(\tau)\big) - \varepsilon = 0$$

denkleminin çözümü

$$q(\tau) = \frac{1 - L}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{L - 1}{2}\right)^2 - \varepsilon}$$

şeklindedir.

$$q_1 = \frac{1 - L}{2} - \sqrt{\left(\frac{L - 1}{2}\right)^2 - \varepsilon}$$

ve

$$q_2 = \frac{1 - L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L - 1}{2}\right)^2 - \varepsilon}$$

(3.10) denkleminin denge noktaları, yani sabit çözümleridir.

İlk olarak $\varepsilon = \frac{(1-L)^2}{4}$ durumunu göz önüne alınsın. Bu durumda $q(\tau) \equiv \frac{1-L}{2}$, (3.9) denkleminin sadece bir sabit çözümüdür. Eğer $x_0 = \frac{1-L}{2}$ ise $q(\tau) \equiv \frac{1-L}{2}$ olur. Eğer $\frac{1-L}{2} < x_0$ ise, (3.9) denkleminin çözümlerinin tekliği nedeniyle tüm $\tau \geq 0$ için $q(\tau) < \frac{1-L}{2}$ olur, böylece $\tau \geq 0$ için $\frac{1-L}{2} \leq q(\tau)$ elde edilir.

İkinci olarak, $0 < \varepsilon < \frac{(1-L)^2}{4}$ durumunu göz önüne alınsın. Bu durumda q_1 ve q_2, (3.9) denkleminin iki sabit çözümüdür. $q_1 < \frac{1-L}{2} < q_2$ olduğu açıkça görülebilir.

$$S_1 := \{q(\tau) \in \mathbb{R}: q_2 < q(\tau)\}$$

ve

$$S_2 := \left\{r \in \mathbb{R}: \frac{1-L}{2} \leq q(\tau) < q_2\right\}$$

kümeleri ve $\xi \in \mathbb{R}$ için

$$F_1\big(q(\tau)\big) := q(\tau)\big(1 - L - q(\tau)\big) - \varepsilon$$

fonksiyonu tanımlansın. Daha sonra (3.9) denklemi

$$\frac{dq}{d\tau}(\tau) = F_1(q(\tau))$$

olarak yeniden yazılabilir. Lemma 1 den, $q(\tau) \in S_1$ ise

$$\frac{dq}{d\tau}(\tau) = F_1(q(\tau)) < 0$$

olduğu ve $r \in S_2$ ise

$$\frac{dq}{d\tau} = F_1(q(\tau)) > 0$$

olduğu görülür.

Öncelikle $q_0 \in S_1$ durumu ele alınacaktır:

$$\frac{dq}{d\tau} = F_1(q(\tau)) < 0$$

eşitsizliğinin integrali alınırsa, tüm $0 \leq \tau < \tau_1$ için $q(\tau) \leq q(0) = x_0$ olacak şekilde bir $\tau_1 > 0$ vardır. Yani $q(\tau)$, $[0, \tau_1) \times S_1$ üzerinde azalmaktadır, ancak çözümün tekliği nedeniyle, aşikar bir çözüm olan $q(\tau) = q_2$ doğru çizgisine çarpmaz. Dolayısıyla tüm $\tau \geq 0$ için $\tau_1 = \infty$ ve

$$\frac{1-L}{2} < q_2 < q(\tau) \leq q(0) = x_0$$

sonucuna varılabilir. $x_0 \in S_2$ durumunda ise,

$$\frac{dq}{d\tau} = F_1(q) > 0$$

eşitsizliğinin integrali alınırsa,

$$\frac{1-L}{2} \leq x_0 = q(0) \leq q(\tau)$$

olacak şekilde tüm $0 \leq \tau < \tau_2$ için bir $\tau_2 > 0$ vardır. Yani, $q(\tau)$, $[0, \tau_2) \times S_2$ üzerinde artar, ancak çözümün tekliği nedeniyle denge çözümü $y = q_2$ ye ulaşmaz ve böylece tüm $\tau \geq 0$ için $\tau_2 = \infty$ ve

$$\frac{1-L}{2} \leq x_0 = q(0) \leq q(\tau) < q_2$$

geçerli olur. Dolayısıyla $T_q = \infty$ olur ve ve $\tau \geq 0$ için $\frac{1-L}{2} \leq q(\tau)$ sağlanır. Bu, önermedeki ilk eşitsizlikle birlikte $p(\tau)$, $q(\tau)$ ve $\xi(\tau)$'nin $\tau \geq 0$ için altan sınırlı olduğunu söyler.

Daha sonra, önermedeki ilk eşitsizlik ve çözümlerin tekliği nedeniyle $\xi(\tau)$'nin $\tau \geq 0$ için üsten sınırlı olduğunun kanıtlanması gerekir.

$\xi(1-L-\xi) + \varepsilon = 0$ denkleminin çözümü

$$\xi = \frac{1-L}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-L}{2}\right)^2 + \varepsilon}$$

şeklindedir.

$$\xi_1 := \frac{1-L}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-L}{2}\right)^2 + \varepsilon}$$

ve

$$\xi_2 := \frac{1-L}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-L}{2}\right)^2 + \varepsilon}$$

diyelim. Bu durumda $\frac{1-L}{2} < \xi_2$ olur. $\xi \in \mathbb{R}$ için

$$S_3 := \{q \in \mathbb{R} : \xi < \xi_2\}$$

ve

$$F_2(\xi) := \xi(1-L-\xi) + \varepsilon$$

olarak tanımlansın. O zaman, (3.10) denklemi $\frac{d\xi}{d\tau} = F_2(\xi)$ olarak yeniden yazılabilir. Lemma 3.1 den $\xi \in S_3$ ise

$$\frac{d\xi}{d\tau} = F_2(\xi) > 0$$

olduğu görülür. Çözümün tekliği dikkate alınır ve son eşitsizliğin her $\tau \geq 0$ için integrali alınırsa,

$$x_0 = \xi(0) \leq \xi(\tau) < \xi_2$$

elde edilir. Bu nedenle $T_\xi = \infty$ olur ve $\tau \geq 0$ için $\xi(\tau)$ üsten sınırlıdır. Çözümlerin tekliği ve (3.12) eşitsizliğinden $T_q = T_p = T_\xi = \infty$ olduğu görülür. Bu da $\tau \in [0, \infty)$ için (3.13) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

3.2.2. Schaefer Modelinin Koşullu Ulam kararlılığı

Bu bölümde, öncelikle (1.5) ile verilen Schaefer modelinin koşullu Ulam kararlılığı ile ilgili ana sonucu elde etmede kullanılacak olan (3.7) denkleminin koşullu Ulam kararlılığı ile ilgili aşağıdaki teorem ve ispatı verilecektir.

Teorem 3.3. (3.7) denklemi, $\varepsilon \in M = (0, \frac{(1-L)^2}{4}]$ ile $C = \{x \in C^1[0,\infty) : \frac{1-L}{2} \leq x(0)\}$ sınıfında koşullu Ulam kararlıdır ve Ulam sabiti $C_U = \frac{2}{1-L}$'dir.

İspat. $0 < \varepsilon \leq \frac{(1-L)^2}{4}$ ve $\frac{1-L}{2} \leq x_0$ olduğunu varsayalım. Teorem 1'e göre, (3.7)–(3.10) denklemlerinin (3.11) başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerinin global varlığı garanti altına alınmıştır. $x, p \in C^1[0,\infty)$ fonksiyonları sırasıyla (3.7) ve (3.8) denklemlerinin (3.11) başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Her $\tau \geq 0$ için (3.7) ve (3.8) arasındaki fark göz önünde bulundurularak,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\big(p(\tau) - x(\tau)\big) &= p(\tau)\big(1 - L - p(\tau)\big) - x(\tau)\big(1 - L - x(\tau)\big) + f(\tau) \\ &= x(\tau)^2 - p(\tau)^2 + (1-L)p(\tau) - (1-L)x(\tau) + f(\tau) \\ &= [-p(\tau) - x(\tau) + (1-L)](p(\tau) - x(\tau)) + f(\tau)\end{aligned}$$

yazılabilir. $|f(t)| \leq \varepsilon$ olduğundan

$$\frac{d}{d\tau}(p(\tau) - x(\tau)) \leq [(-p(\tau) - x(\tau)) + (1-L)](p(\tau) - x(\tau)) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}(p(\tau) - x(\tau)) + [(p(\tau)x(\tau)) - (1-L)](p(\tau) - x(\tau)) \leq +\varepsilon$$

elde edilir. Son eşitsizliğin $e^{\int_0^t (p(r)+x(r)-(1-L))dr}$ integral çarpanı ile çarpılıp 0 dan t ye integrali alınırsa,

$$\int_0^t ((p(s)-x(s))e^{\int_0^s (p(r)+x(r)-(1-L))dr})'ds \le \varepsilon \int_0^t e^{\int_0^s (p(r)+x(r)-(1-L))dr}ds$$

$$\Longrightarrow (p(t)-x(t))e^{\int_0^t (p(r)+x(r)-(1-L))dr} - (p(0)-x(0)) \le \varepsilon \int_0^t e^{\int_0^s (p(r)+x(r)-(1-L))dr}ds$$

$$\Longrightarrow \big(p(t)-x(t)\big)e^{\int_0^t (p(r)+x(r)-(1-L))dr} \le (p(0)-x(0)) + \varepsilon \int_0^t e^{\int_0^s (p(r)+x(r)-(1-L))dr}ds$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her tarafı $e^{-\int_0^t (p(r)+x(r)-(1-L))dr}$ ile çarpılır ve mutlak değeri alınırsa

$$|p(t)-x(t)| \le |p(0)-x(0)|e^{-\int_0^t (p(r)+x(r)-(1-L))dr} + \varepsilon \int_0^t e^{-\int_0^t (p(r)+x(r)-(1-L))dr+\int_0^s (p(r)+x(r)-(1-L))dr}ds$$

olur. $0 < s < t$ için

$$|p(t)-x(t)| \le |p_0 - x_0|\, \mathrm{e}^{-\int_0^t (p(r)+x(r)-(1-L))dr} + \varepsilon \int_0^t e^{-\int_s^t (p(r)+x(r)-(1-L))dr}\ ds$$

elde edilir. Burada (3.11) koşulu dikkate alınırsa

$$|p(t)-x(t)| \le \varepsilon \int_0^t e^{\int_s^t (-p(r)-x(r)+(1-L))dr}\ ds \qquad (3.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Bundan sonra yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı hesaplanacaktır.

$$\frac{dx}{dt} = x(1-L-x)$$

denklemini çözelim. Denklem aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\frac{1}{x(1-L-x)}dx = dt$$

Sol taraftaki $\frac{1}{x(1-L-x)}$ ifadesi

$$\frac{1}{x(1-L-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-L-x}$$

biçiminde kısmi kesirlere ayırılır ve sağ tarafın paydaları eşitlenip sol tarafa eşitlenirse $A = \frac{1}{1-L}$ ve $B = \frac{1}{L-1}$ elde edilir. Bunlar denklemde yazılırsa

$$\frac{1}{L-1}\left(\frac{1}{x+L-1} - \frac{1}{x}\right)dx = dt$$

olur. Sonra her iki tarafın integrali alınırsa

$$ln|x+L-1| - ln|x| = (L-1)t + c \tag{3.17}$$

elde edilir. Burada c, $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu tarafından belirlenecek olan rasgele bir integrasyon sabitidir. Eğer $\frac{1-L}{2} < x_0$ ise x'nin her zaman bu aralıkta kaldığı zaten belirtilmişti. Bu durumda (3.17) denklemindeki mutlak değer işareti kaldırılabilir ve her iki tarafın kuvveti alınarak

$$\frac{x+L-1}{x} = ce^{(L-1)t} \tag{3.18}$$

elde edilir. $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu denklemde yazıldığında $c = 1 + (L-1){x_0}^{-1}$ bulunur. (3.18) denkleminde c için bu değeri kullanılarak ve x için çözülerek

$$x(t) = \frac{L-1}{\left((L-1){x_0}^{-1} + 1\right)e^{(L-1)t} - 1} \tag{3.19}$$

elde ederiz. $\frac{1-L}{2} \leq x(0) = x_0$ olduğu dikkate alınırsa, $\tau \geq 0$ için

$${x_0}^{-1} \leq \frac{2}{1-L}$$

yazılır ve bu eşitsizlik $L-1$ ile çarpılıp, her iki tarafına 1 eklendikten sonra $e^{(L-1)t}$ çarpılır ve ardından -1 eklenir ise,

$$\left((L-1){x_0}^{-1} + 1\right)e^{(L-1)t} - 1 \geq -e^{(L-1)t} - 1$$

elde edilir. Şimdi de son eşitsizlik ters çevrilip $L-1$ ile çarpılırsa

$$x(t) = \frac{L-1}{\left((L-1){x_0}^{-1} + 1\right)e^{(L-1)t} - 1} \geq \frac{1-L}{1 + e^{(L-1)t}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (3.16) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral altındaki ifadede (3.13) ile birlikte dikkate alınırsa,

$$e^{\int_s^t(-x(r)-p(r)+(1-L))dr} \le e^{\int_s^t(-\frac{1-L}{2}+\frac{L-1}{1+e^{(L-1)r}}+(1-L))dr} = e^{\frac{1-L}{2}\int_s^t \frac{te^{(L-1)r}-1}{e^{(L-1)r}+1}dr}$$

$$= e^{\frac{1-L}{2}\left[\int_s^t(\frac{e^{(L-1)r}}{e^{(L-1)r}+1}dr-\int_s^t\frac{1}{e^{(L-1)r}+1}dr\right]} = e^{\frac{1-L}{2}\left[\int_s^t(\frac{e^{(L-1)r}}{e^{(L-1)r}+1}dr-\int_s^t\frac{e^{(1-L)r}}{e^{(1-L)r}+1}dr\right]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left[\int_s^t(\frac{(L-1)e^{(L-1)r}}{e^{(L-1)r}+1}dr+\int_s^t\frac{t(1-L)e^{(1-L)r}}{e^{(1-L)r}+1}dr\right]} = e^{-\frac{1}{2}ln(\frac{\left(e^{(1-L)t}+1\right)\left(e^{-(1-L)t}+1\right)}{\left(e^{(1-L)s}+1\right)\left(e^{-(1-L)s}+1\right)})}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+e^{(L-1)s})(1+e^{-(L-1)s})}{(1+e^{(L-1)t})(1+e^{-(L-1)t})}}$$

elde edilir. Bu da (3.16) ün sağ tarafında dikkate alınırsa

$$\int_0^t \sqrt{\frac{(1+e^{(1-L)s})(1+e^{-(1-L)s})}{(1+e^{(1-L)t})(1+e^{-(1-L)t})}} = \int_0^t \frac{\frac{1+e^{(1-L)s}}{\sqrt{e^{(1-L)s}}}}{\frac{1+e^{(1-L)t}}{\sqrt{e^{(1-L)t}}}}ds = \int_0^t \frac{e^{\frac{1-L}{2}s}+e^{-\frac{1-L}{2}s}}{e^{\frac{1-L}{2}t}+e^{-\frac{1-L}{2}t}}ds$$

$$= \frac{\frac{2}{1-L}}{e^{\frac{1-L}{2}t}+e^{-\frac{1-L}{2}t}}\left(e^{\frac{(1-L)t}{2}}-e^{-\frac{(1-L)t}{2}}-1+1\right)$$

$$= \frac{2}{1-L}\frac{e^{\frac{(1-L)t}{2}}-e^{-\frac{(1-L)t}{2}}}{e^{\frac{(1-L)t}{2}}+e^{-\frac{(1-L)t}{2}}}$$

$$= \frac{2}{1-L}\tanh\frac{(1-L)t}{2}$$

olur. Burada her t için $\frac{2}{1-L}\tanh\frac{2}{1-L}t \le \frac{2}{1-L}$ alınırsa

$$|p(t) - x(t)| \le \varepsilon\frac{2}{1-L}$$

elde edilir. $C_U := \frac{2}{1-L}$ denirse,

$$|p(t) - x(t)| \le C_U\varepsilon$$

yazılabilir. Buradaki C_U , koşullu Ulam kararlılık sabiti olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teorem, (1.5) modelinin koşullu Ulam kararlılığı ile ilgili ana sonucu vermektedir.

Teorem 3.4. $0 < \delta \le Kr\left(\frac{r-E}{2}\right)^2$ ve $\frac{K(r-E)}{2r} \le y(0)$ olduğunu varsayalım. $y \in C^1[0,T_y)$ ve $z \in C^1[0,T_z)$ fonksiyonları sırasıyla (1.5) denkleminin ve

$$\left|\frac{dz}{dt}(t) - rz(t)\left(1-\frac{z(t)}{K}\right)+Ez(t)\right| \le \delta$$

eşitsizliğinin $y(0) = z(0) = y_0$ başlangıç koşulu ile verilen çözümleri olsun. O zaman $T_y = T_z = \infty$ ve $t \in [0, \infty)$ için

$$|z(t) - y(t)| < \frac{2}{r-E}\,\delta$$

olur. Bu durumda (1.5) denklemi koşullu Ulam kararlıdır ve Ulam sabiti $\tilde{C}_U = \frac{2}{r-E}$'dir.

İspat. $0 < \delta \leq Kr\left(\frac{r-E}{2}\right)^2$ *ve* $y(0) \geq \frac{K(r-E)}{2r}$ olduğu varsayılsın. $z \in C^1[0, T_z)$ fonksiyonu $z(0) = y_0$ koşulunu ve $0 \leq t \leq T_z$ için

$$\left|\frac{dz}{dt}(t) - rz(t)\left(1 - \frac{z(t)}{K}\right) + Ez(t)\right| \leq \delta$$

eşitsizliğini sağlasın. Şimdi, $\tau := rt$ ve $p := \frac{z}{K}$ dönüşümleri kullanılarak ve $0 \leq \tau \leq T_P$ için

$$\delta \geq \left|\frac{dz}{dt}(t) - rz(t)\left(1 - \frac{z(t)}{K}\right) + Ez(t)\right| = Kr\left|\frac{dp}{d\tau}(\tau) - p(\tau)(1 - \frac{E}{r} - p(\tau))\right|$$

eşitsizliği elde edilir. $\varepsilon := \frac{\delta}{Kr}$ olsun. O zaman,

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\left(1 - \frac{E}{r}\right)^2}{4}$$

ve

$$\frac{1 - \frac{E}{r}}{2} \leq \frac{z(0)}{K} = p(0)$$

olur. Sonra, $Kx(0) = KP(0) = z(0) = y_0$ başlangıç koşulu ile $z \in C^1[0, T_z)$ çözümü ele alınsın. Teorem 1'e göre, $T_z = T_p = T_x = \infty$ ve her $\tau \geq 0$ için

$$|p(\tau) - x(\tau)| < \frac{2r}{r-E}\,\varepsilon$$

olur. $t \geq 0$ için $y(t) := Kx(t)$ ve $z := Kp(t)$ dönüşümü yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa

$$|z(t) - y(t)| = K|p(t) - x(t)| < \frac{2Kr}{r-E}\,\varepsilon = \frac{2}{r-E}\,\delta$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2) denkleminin $[0, \infty)$ üzerinde $\tilde{C}_U = \frac{2}{r-E}$ Ulam sabiti ile koşullu Ulam kararlı olduğu söylenir.

3.3. Örnek ve simülasyonlar

Bu kısımda (1.5) Schaefer modelinde yer alan bazı parametre değerleri ve farklı başlangıç koşulları için bozulmuş denklemin niteliksel özellikleri simulasyonlar yardımıyla incelenerek yukarıda elde ettiğimiz sonuçlar doğrulanmış ve yorumlanmıştır.

$\varepsilon \in M = (0, \frac{K}{r}\left(\frac{r-E}{2}\right)^2]$ olsun ve $C = \{y \in C^1[0,\infty) : \frac{K(r-E)}{2r} \leq y(0)\}$ kümesi verilsin. Parametre değerleri olarak $r = 1,\ K = 10$ ve $E = 0.5$ alınsın. Bu durumda (1.5) modeli

$$\frac{dy}{dt} = \left(1 - \frac{y}{10}\right)y - 0.5y \tag{3.20}$$

biçimini alır. Ayrıca $\varepsilon \in M = (0, 0.625]$ için

$$\frac{dz}{dt} = \left(1 - \frac{z}{10}\right)z - 0.5z - \varepsilon \tag{3.21}$$

ile verilen bozulmuş denklemi göz önüne alınsın. (3.21) bozulmuş denkleminin denge çözümleri ve kararlılık durumları için aşağıdaki üç durum gözlemlenir:

(i) $\varepsilon < 0.625$ ise iki denge çözümü vardır:

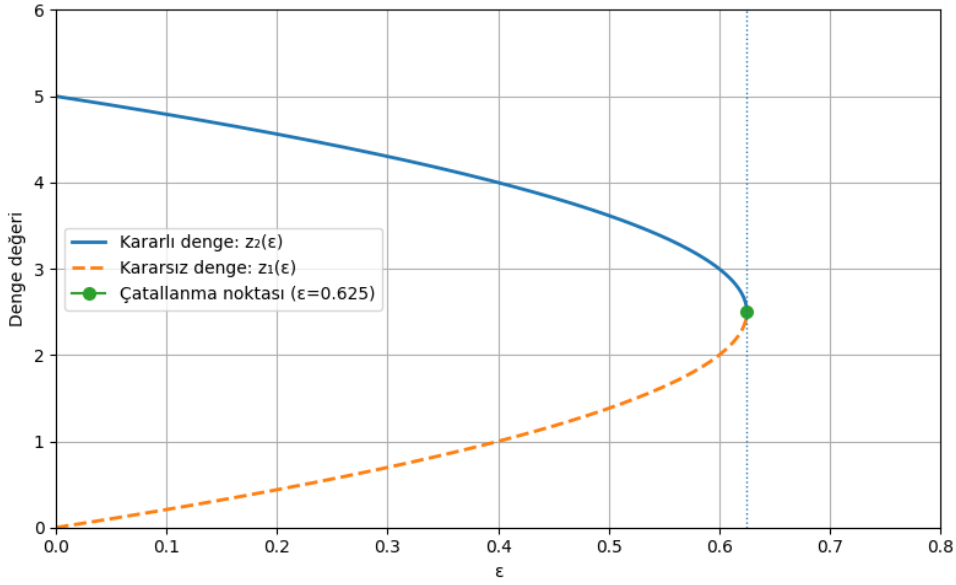
$$z_1 = \frac{5 - \sqrt{25 - 40\varepsilon}}{2}, \qquad z_2 = \frac{5 + \sqrt{25 - 40\varepsilon}}{2}$$

Bu denge çözümlerinden z_1 kararsız ve z_2 asimtotik kararlıdır

(ii) $\varepsilon = 0.625$ ise tek bir $z = 2.5$ denge çözümü vardır ve bu çözüm yarı kararlıdır.

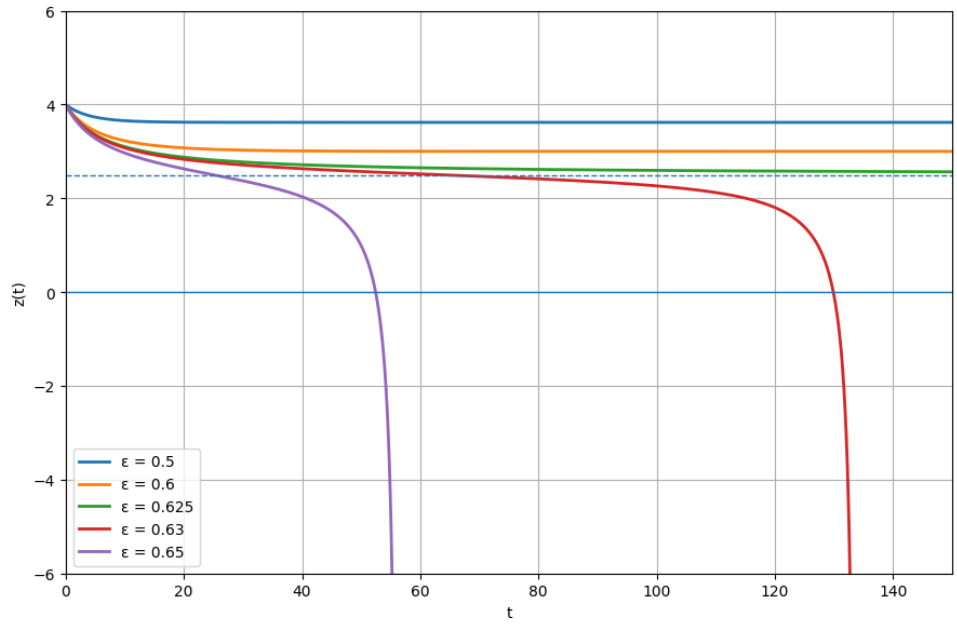
(iii) $\varepsilon > 0.625$ ise herhangi bir denge noktası yoktur.

Bozulma parametresinin $\varepsilon = 0.625$ değerinin (3.21) denkleminin denge çözümlerinin sayısı için bir eşik olduğu açıkça görülmektedir. Bu eşik değerinden küçük ε değerleri için iki denge çözümü var iken, bu değerde bir tek denge çözümü ve bu ε dan daha büyük değerleri için denge çözümü yoktur. Bu $\varepsilon = 0.625$ eşik değerinde kararlı ve kararsız denge bir araya gelerek yok olmaktadır. Burada bir çatallanma ortaya çıkar. Bu tür çatallanmalar, eyer-düğüm çatallanması olarak adlandırılır. ε bozulma parametresine göre denge noktalarının grafiği çizilirse, aşağıdaki çatallanma diyagramı elde edilir.

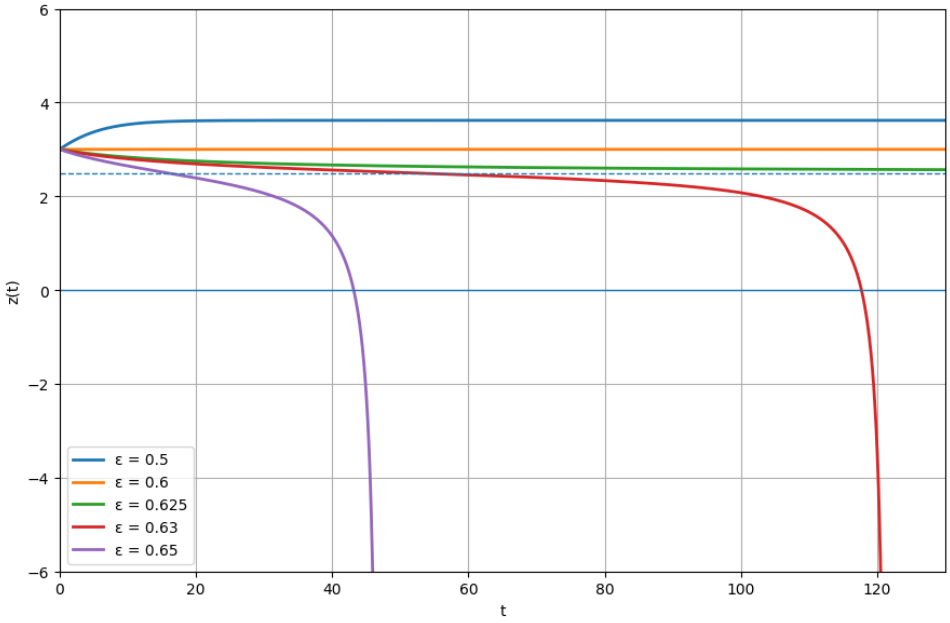


Şekil 3.8 $z' = \left(1 - \frac{z}{10}\right) y - 0.5z - \varepsilon$ bozulmuş denklemi için çatallanma diyagramı

Şimdi $z(0) = 4,\ 3,\ 2.5,\ 2,\ 1$ başlangıç koşulları ve ε bozulma parametresinin 0.5, 0.6, 0.625, 0.63, 0.65 değerleri için çözümlerin yörüngelerini aynı düzlemde ele alan simulasyonlar değerlendirilecektir.

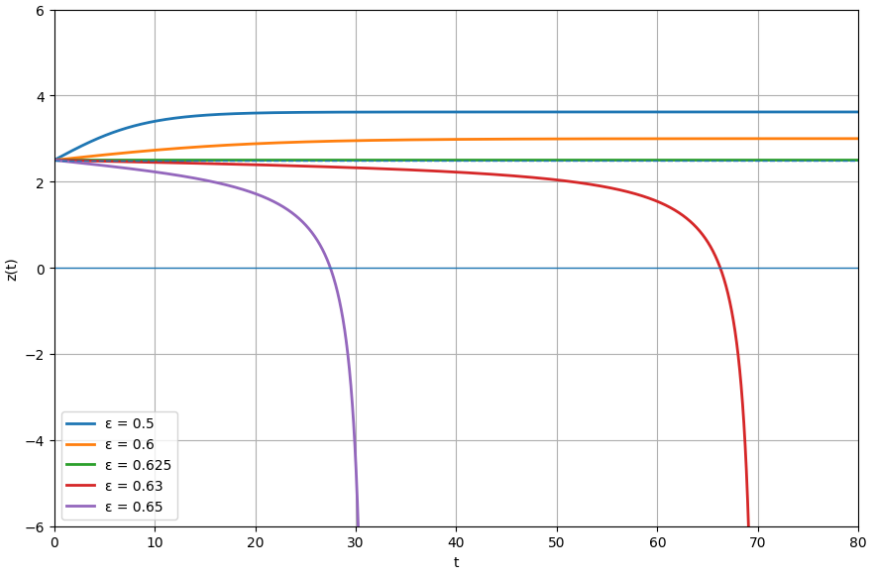


Şekil 3.9 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 4$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri



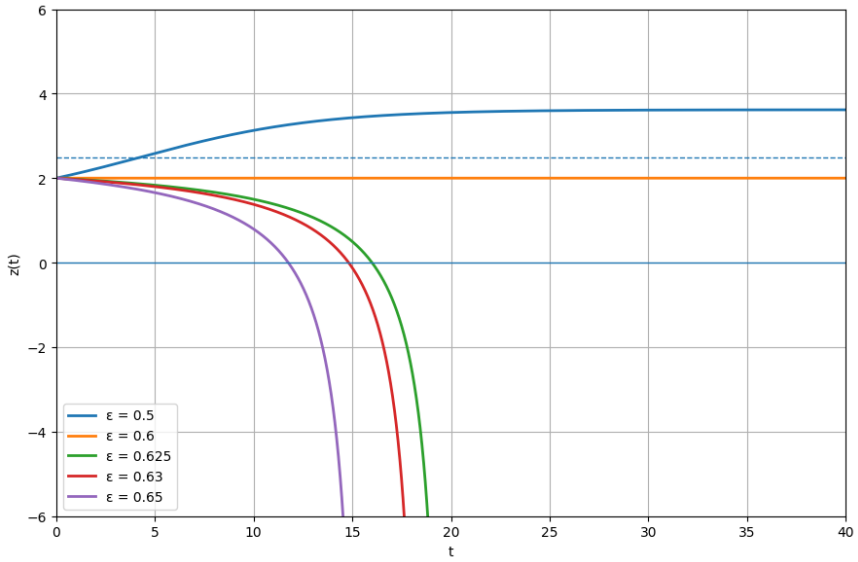
Şekil 3.10 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 3$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri

Şekil 3.9 ve Şekil 3.10 da başlangıç koşulu için eşik değer olan 2.5 değerinin üzerinde yer alan $z(0) = 4$ ve $z(0) = 3$ başlangıç koşulları için çözüm yörüngeleri verilmiştir. ε için eşik değer olan 0.625 in altındaki $\varepsilon = 0.5$ ve $\varepsilon = 0.6$ değerlerinde çözüm eğrileri kendi kararlı dengelerine yaklaşmaktadır. $\varepsilon = 0.625$ için çözüm eğrisi kendi dengesi olan $z = 2.5$ doğrusuna yaklaşır. Eşik değerinden büyük olan $\varepsilon = 0.63$ ve $\varepsilon = 0.65$ değerlerinde çözüm önce yavaş bir biçimde azalır ve ardından hızlı bir düşüş yaşar. Yani, başlangıç değerleri kritik 2.5 seviyesinin üzerinde bulunduğunda, kritik $\varepsilon = 0.625$ değerinden küçük ε değerleri için kararlıdır, diğer ε değerlerinde patlama (çöküş) yaşanır.



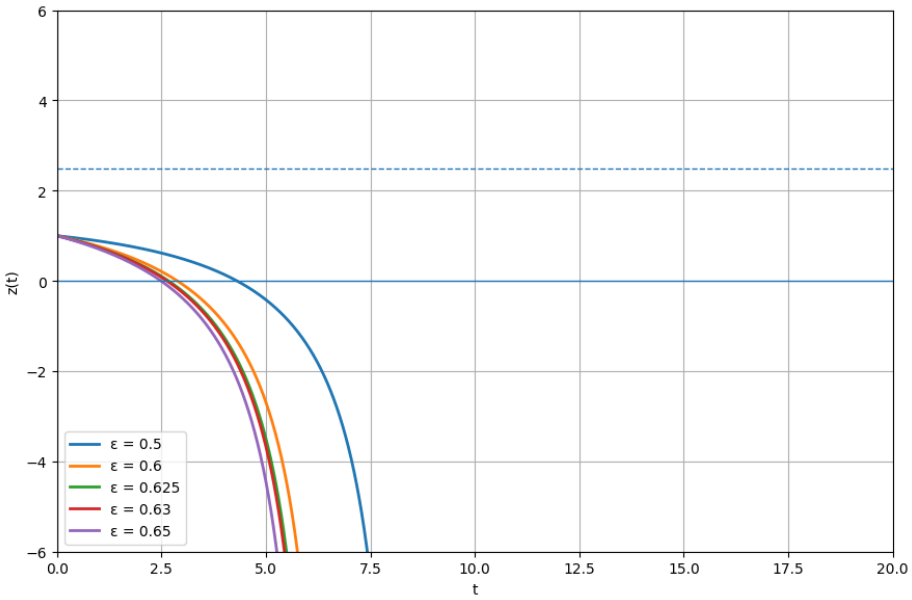
Şekil 3.11 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 2.5$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri

Şekil 3.11 de başlangıç koşulu kritik değer olan $z(0) = 2.5$ dir. $\varepsilon = 0.625$ için çözüm denge çözümünde sabit kalır. 0.625 in altındaki $\varepsilon = 0.5$ ve $\varepsilon = 0.6$ değerlerinde çözüm eğrileri kendi kararlı dengelerine yaklaşmaktadır. Eşik değerinden büyük olan $\varepsilon = 0.63$ ve $\varepsilon = 0.65$ değerlerinde çözüm önce yavaş bir biçimde azalır ve ardından hızlı bir düşüş yaşar. Bu düşüş özellikle $\varepsilon = 0.65$ için daha hızlı olur.



Şekil 3.12 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 2$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri

Şekil 3.12 de başlangıç koşulu için 2.5 değerinin altında yer alan $z(0) = 2$ başlangıç koşulu için çözüm yörüngeleri verilmiştir. $\varepsilon = 0.5$ değeri için çözüm eğrisi kendi kararlı dengesine yaklaşmaktadır. $\varepsilon = 0.6$ değeri için çözüm eğrisi sabittir (yani $z_1 = 2$ kararsız dengesidir). $\varepsilon = 0.625$ değerinde başlangıç koşulu 2.5 dan küçük olduğu için çözüm aşağı doğru kaçar ve hızla azalır. $\varepsilon = 0.63$ ve $\varepsilon = 0.65$ değerleri eşik değerden büyük olduğundan açık ve hızlı bir aşağı doğru çöküş yaşanır. ε nun değeri eşik değerinden uzaklaştıkça çözüm önce yavaş bir biçimde azalır ve ardından hızlı bir düşüş yaşar.



Şekil 3.13 $\varepsilon = 0.5,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.63,\ 0.65$ için (3.21) denkleminin $z(0) = 1$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümlerin yörüngeleri

Şekil 3.13 de başlangıç koşulu için 2.5 değerinin altında yer alan $z(0) = 1$ başlangıç koşulu için çözüm yörüngeleri verilmiştir. Başlangıç koşulu $\varepsilon = 0.5$ ve $\varepsilon = 0.6$ değerleri için kararsız dengenin bile altında kaldığından, çözüm eğrileri aşağı doğru hızlıca azalmaktadır. Yine $\varepsilon = 0.625$, $\varepsilon = 0.63$ ve $\varepsilon = 0.65$ değerleri için açık ve hızlı bir aşağı doğru çöküş yaşanır. ε büyüdükçe düşüş daha hızlı olmaktadır. ε nun eşik değerinden uzaklaştıkça çözüm önce yavaş bir biçimde azalır ve ardından hızlı bir düşüş yaşar. Bozulmanın daha küçük olduğu $\varepsilon = 0.5$ değeri için bu düşüş daha yavaş olmaktadır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey \tag{1.5}$$

ile verilen Schaefer modelinin koşullu Ulam kararlılığı incelenmiştir. Burada, bozulmamış bir denklemin çözümünün, sınırlı bir bozulmaya sahip bir denklemin çözümüne yakın olduğunu garanti eden bir kavram olan koşullu Ulam kararlık ele alındı. Dahası, kavramı garanti edecek uygun başlangıç koşulları ve ε bozulma değerlerinin belirlenmesi amaçlandı. İlk olarak, orijinal denklem aşağıdaki daha basit denkleme dönüştürüldü:

$$\frac{dx}{d\tau} = x(\tau)\big(1 - L - x(\tau)\big)$$

Daha sonra, bozulmuş denklemlerin çözümlerinin davranışı incelendi. Bu, koşullu Ulam kararlılığı için önemli olan bozulma parametresi ε ve başlangıç koşulları ile ilgili eşik değerleri verir. Bazı eşitsizlikler sunulduktan sonra, bu denklem için ana sonuç (Teorem 3.3) ispatlandı. Daha sonra, orijinal (1.5) denklemi için ana teorem (Teorem 3.4) kanıtlandı. Son olarak, elde edilen sonuçları doğrulamak amacıyla, bazı parametre değerleri için oluşturulan bir test denklemi için perturbasyon parametresinin bazı değerleri ve bazı başlangıç koşulları kullanılarak oluşturulan simülasyonlar yapılmış ve yorumlanmıştır.

Yukarıdaki sonuçlar, uygun bir başlangıç ve ε bozulma değeri seçilerek Schaefer büyüme modelinin Ulam kararlılığının garanti edilebileceğini göstermektedir. Eğer ε bozulma parametresi $Kr\left(\frac{r-E}{2}\right)^2$ ifadesinden daha küçük ise, bozulmuş

$$\frac{dz}{dt} = r\left(1 - \frac{z}{K}\right)z - Ez - \varepsilon$$

modeli bir pozitif dengeye sahip olur. ε bozulma parametresinin $Kr\left(\frac{r-E}{2}\right)^2$ eşik değerinden daha büyük olan denge yok olur ve balık popülasyonu yok olmaya doğru gider. Başlangıç koşulunun $\frac{K(r-E)}{2r}$ değerinden büyük olması şartı, başlangıçta balık popülasyonunun en az bu değer kadar olması gerektiğini ima eder. Eğer başlangıçtaki

balık popülasyonu bu değerin altında kalırsa, balık popülasyonu hızlı bir şekilde yok olur.

Sonuç olarak, $\varepsilon \leq Kr\left(\frac{r-E}{2}\right)^2$ ve $z(0) \geq \frac{K(r-E)}{2r}$ koşullarının sağlanması durumunda koşullu Ulam kararlılık söz konusudur. Başka bir deyişle, bozulmuş denklemin ve bozulmamış denklemin çözümleri $[0, \infty)$ sonsuz aralığında birbirine yakın kalır; böylece denklemin kendisinin kararlılığı garanti altına alınır. Bu çalışma, uygun aralıktaki başlangıç değerlerine sahip çözümler üzerinde küçük değişikliklerin hiçbir etkisinin olmadığını göstermiştir. Balıkçılık açısından değerlendirildiğinde, balıkçılık yönetimi dışında olan ve öngörülmeyen balık kayıplarının balık popülasyonunun yok olmasına sebep olmaması için, öngörülmeyen balık kayıplarının ve mevcut balık stoğunun yukarıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir.

KAYNAKLAR

Alsina, C., ve Ger, R. (1998). On some inequalities and stability results related to the exponential function. *Journal of Inequalities and Applications*, 1998(4), 246904.

Anderson, D., Kondo, M., ve Onitsuka, M. (2025). A Gompertz Model With Conditional Hyers-Ulam Stability. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.

Anderson, D. R., ve Onitsuka, M. (2026). A generalized Richards growth model with conditional Hyers-Ulam stability. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, *89*, 104530.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C., Meade, D. B. (2017). ***Elementary differential equations***. John Wiley ve Sons.

Hyers, D. H. (1941). On the stability of the linear functional equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *27*(4), 222-224.

Jung, S. M. (2004). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. *Applied Mathematics Letters*, *17*(10), 1135-1140.

Jung, S. M. (2005). Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, III. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *311*(1), 139-146.

Jung, S. M. (2006). Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, II. *Applied Mathematics Letters*, *19*(9), 854-858.

Kondo, M., Onitsuka, M. (2024). Ulam type stability for von Bertalanffy growth model with Allee effect. *Math. Biosci. Eng*, *21*, 4698-4723.

Kot, M. (2001). ***Elements of mathematical ecology***. Cambridge University Press.

Miura, T. (2002). On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, *55*(1), 17-24.

Miura, T., Jung, S.-M., Takahasi, S.-E. (2004). Hyers–Ulam–Rassias stability of the Banach space valued linear differential equations $y' = \lambda y$. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 41, 995–1005.

Miura, T., Miyajima, S., Takahasi, S.-E. (2003). A characterization of Hyers–Ulam stability of first order linear differential operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 286, 136–146.

Miura, T., Takahasi, S.-E., Choda, H. (2001). On the Hyers–Ulam stability of real continuous function valued differentiable map. *Tokyo Journal of Mathematics*, 24, 467–476.

Müller, J., Kuttler, C. (2015). Methods and models in mathematical biology. *Lecture Notes on Mathematical Modelling in Life Sciences, Springer, Berlin*.

Obłoza, M. (1993). Hyers stability of the linear differential equation. Rocznik Naukowo-Dydaktyczny. *Prace Matematyczne*, 13, 259–270.

Obłoza, M. (1997). Connections between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equations. Rocznik Naukowo-Dydaktyczny. *Prace Matematyczne*, 14, 141–146.

Onitsuka, M. (2021). Conditional Ulam stability and its application to the logistic model. *Applied Mathematics Letters*, 122, 107565.

Onitsuka, M. (2022). Conditional Ulam stability and its application to von Bertalanffy growth model. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19, 2819–2834.

Popa, D., Rasa, I., Viorel, A. (2018). Approximate solutions of the logistic equation and Ulam stability. *Applied Mathematics Letters*, 85, 64–69.

Rassias, Th. M. (2000). On the stability of functional equations in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251(1), 264–284.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Mehmet Emin HALİTOĞLU

Eğitim Bilgileri

Lisans

Üniversite : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Fakülte : Fen Fakültesi

Bölüm : Matematik Bölümü

Mezuniyet Yılı : 2015

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSİTÜSÜ

Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu

Tez Başlığı : Schaefer Popülasyon Modelinin Koşullu Ulam Kararlılığı

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam 40 (kırk) sayfalık kısmına ilişkin, 07/01/2026 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı %5 (yüzde beş) dır.

Orijinallik raporu, aşağıdaki filtreler kullanılarak oluşturulmuştur:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

07 / 01 / 2026.

İmza

Mehmet Emin Halitoğlu

Öğrenci No	18910001362
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	✓ Yüksek Lisans ☐ Doktora

UYGUNDUR
imza

Danışman
Prof. Dr. Sebaheddin Şevgin

UYGUNDUR
imza

Enstitü Onayı
(Enstitü Müdür/Müdür Yrd)