T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# BELİRLİ SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ REAKSİYON-DİFÜZYON PROBLEM SINIFININ NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Kerem YAMAÇ
DANIŞMAN: Prof. Dr. FEVZİ ERDOĞAN

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# BELİRLİ SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ REAKSİYON-DİFÜZYON PROBLEM SINIFININ NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA

HAZIRLAYAN: Kerem YAMAÇ

Bu çalışma YYÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Başkanlığı tarafından FDK-2017-5843 No'lu proje olarak desteklenmiştir

VAN-2019

## KABUL VE ONAY SAYFASI

Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN danışmanlığında, Kerem YAMAÇ tarafından sunulan "Belirli Singüler Pertürbe Özellikli Reaksiyon-Difüzyon Problem Sınıfının Nümerik Çözümleri " isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 28/11/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Gabil YAGUB İmza:

Üye: Prof. Dr. Cengiz ÇINAR İmza:

Üye: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN İmza:

Üye: Prof. Dr. Harun AKKUŞ İmza:

Üye: Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27/12/2019 tarih ve 67-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

(İmza)
(Kerem Yamaç

# ÖZET

## BELİRLİ SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ REAKSİYON-DİFÜZYON PROBLEM SINIFININ NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YAMAÇ, Kerem
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN
Aralık 2019, 93 sayfa

Bu tezde, reaksiyon-difüzyon tipli, ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli sınır değer problemleri ele alındı. İlk önce lineer durumdaki problem, daha sonra lineer olmayan (yarı-lineer) problem ve son olarak lineer gecikmeli problem ele alınmıştır.

Ele alınan her üç denklem sınıfında da öncelikle sürekli problemin özellikleri verilmiş, daha sonra pertürbe teorisi ve kuadratür formülleri yardımıyla sonlu fark şemaları oluşturulmuştur. Bu problemlerin her biri için uygun Numerov metoduna dayalı fark şemaları verilmiştir. Fark şemalarının kararlılığı incelenmiş, hata analizleri yapılmıştır. Bütün bu teorik çalışmalar literatür örnekleriyle desteklenmiş, nümerik sonuçlar çözüm eğrileri ile tablolar halinde sunulmuştur.

**Anahtar kelimeler:** Düzgün yakınsaklık, Gecikmeli diferensiyel denklemler, Numerov metodu, Sınır katmanları, Shishkin şebeke, Singüler pertürbe problemleri, Sonlu fark şeması.

## ABSTRACT

### NUMERICAL SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED REACTION-DIFUSSION TYPE PROBLEM

YAMAÇ, Kerem
Ph.D. Thesis, Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN
December 2019, 93 pages

In this thesis, we studied boundary value problems for singularly perturbed second order differential equation of reaction-diffusion type. Firstly, the problem in the linear state, then the non-linear (semi-linear) problem and finally the problem of lineer with delay are discussed.

In all three classes of equations, firstly the properties of the continuous problem were given, then finite difference schemes were constructed with the help of perturbation theory and quadrature formulas. For each of these problems, difference schemes based on the appropriate Numerov method are given. The stability of the difference schemes were examined and error analyzes were performed. All these theoretical studies are supported by literature examples and numerical results are presented in tables with some solution curves.



**Key words:** Uniformly convergence, Delay differential equations, Numerov method, Boundary layers, Shishkin mesh, Singularly perturbed problems, Finite difference scheme.

# ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Fevzi Erdoğan'a ve özellikle program yapımında destek veren Doç. Dr. Mehmet Giyas SAKAR' a teşekkür ederim. Ayrıca emeği geçen herkese ve bu süre zarfında beni sabırla destekleyen eşim ve çocuklarıma teşekkürlerimi sunarım.

2019

Kerem YAMAÇ

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

ÖZET ..... i
ABSTRACT ..... iii
ÖN SÖZ ..... v
İÇİNDEKİLER ..... vii
ÇİZELGELER LİSTESİ ..... ix
ŞEKİLLER LİSTESİ ..... xi
SİMGELER VE KISALTMALAR ..... xiii
1. GİRİŞ ..... 1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ ..... 3
3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER ..... 13
3.1. İkinci Mertebeden Lineer Diferensiyel Denklemler ..... 19
3.2. Gronwall integral eşitsizlikleri ..... 24
3.3. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemler ..... 24
3.4. Kovma Metodu (Thomas Algoritması) ..... 26
4. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ ..... 29
4.1. Sürekli Problemin Bazı Özellikleri ..... 29
4.2. Şebekenin Oluşturulması ..... 33
4.2.1. Üstel katsayılı fark şeması ..... 33
4.2.2. Üstel katsayılı çarpanın bulunması için bir başka yöntem ..... 36
4.2.3. Numerov şeması ..... 37
4.2.4. Üstel katsayılı Numerov şeması ..... 39
4.3. Yakınsaklık Analizi ..... 40
4.4. Örnek Problem (Phaneendra ve ark., 2010) ..... 46
4.5. Shishkin Şebeke (Düzgün Parçalı Şebeke) ..... 52
4.5.1. Shishkin şebekede hata analizi ..... 53
5. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER OLMAYAN REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ ..... 57
5.1. Sürekli Problemin Bazı Özellikleri ..... 58
5.2. Şebekenin Oluşturulması ..... 61
5.2.1. Üstel katsayılı fark şeması ..... 61

**Sayfa**

5.2.2. Numerov şeması ..... 63
5.2.3. Üstel katsayılı Numerov şeması ..... 64
5.3. Numerov Tipi Bir Algoritma ..... 65
5.4. Yakınsaklık Analizi ..... 67
5.5. Örnek Problem ..... 69
6. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ GECİKMELİ LİNEER REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMLERİ ..... 71
6.1. Sürekli Çözümün Bazı Özellikleri ..... 72
6.2. Şebekenin Oluşturulması ..... 72
6.2.1. Üstel katsayılı fark şeması ..... 72
6.2.2. Numerov şeması ..... 75
6.2.3. Üstel katsayılı Numerov şeması ..... 77
6.3. Yakınsaklık Analizi ..... 78
6.4. Örnek Problem ..... 83
7. TARTIŞMA VE SONUÇ ..... 85
KAYNAKLAR ..... 87
ÖZ GEÇMİŞ ..... 93

# ÇİZELGELER LİSTESİ

**Çizelge** **Sayfa**


Çizelge 4.1. Örnek 4.4'te üstel katsayılı klasik şema için mutlak hata değerleri ile yakınsaklık hızları ..... 47

Çizelge 4.2. Örnek 4.4'te Numerov şeması için mutlak hata değerleri ile yakınsaklık hızları ..... 48

Çizelge 4.3. Örnek 4.4'te üstel katsayılı Numerov şeması için mutlak hata değerleri ile yakınsaklık hızları ..... 49

Çizelge 4.4. Örnek 4.4 sonuçlarının bir örnek literatür sonucuyla karşılaştırması ($N$ =100 ve $\varepsilon = 2^{-3}$ için) ..... 50

Çizelge 4.5. Örnek 4.4 sonuçlarının bir örnek literatür sonucuyla karşılaştırması ($N$ =100 ve $\varepsilon = 2^{-4}$ için) ..... 51

Çizelge 4.6. Örnek 4.4 için Shishkin şebekede üstel katsayılı Numerov şemasının mutlak hata değerleri ve yakınsama hızları ..... 56

Çizelge 5.1. Örnek 5.5 için üstek katsayılı Numerov şemasının mutlak hata ve yakınsama hızı değerleri ..... 69

Çizelge 6.1. Örnek 6.4 için üstel katsayılı Numerov şemasının mutlak hata ve yakınsama hızı değerleri ..... 84

# ŞEKİLLER LİSTESİ

**Şekil** **Sayfa**

Şekil 4.1. N =512 ve $\varepsilon = 2^{-6}$ ..... 47

Şekil 4.2. *N* =512 ve $\varepsilon = 2^{-6}$ ..... 48

Şekil 4.3. *N =512* ve $\varepsilon = 2^{-6}$ ..... 49

Şekil 4.4. *N =512* ve $\varepsilon = 2^{-9}$ ..... 56

Şekil 6.1. N =1024 ve $\varepsilon = 2^{-9}$. ..... 84

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\varepsilon$ | Pertürbasyon parametresi |
| $u$ | Diferansiyel denklemin kesin çözümü |
| $y$ | Diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü |
| $N$ | Şebeke elemanlarının sayısı |
| $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N-1}$ | Sonlu baz fonksiyonları |
| $\overline{\omega}_N$ | Düzgün olmayan şebeke |
| $\omega_N$ | Düzgün şebeke |
| $C$ | $\varepsilon$ ve $h$ tan bağımsız sabit |
| $h$ | Şebeke adım uzunluğu |
| $h^{(i)}$ | Düzgün olmayan şebekede adım uzunluğu |
| $\sigma$ | Geçiş noktası |
| $L$ | Diferansiyel operatör |
| $\ell$ | Sonlu fark operatörü |
| $E^N$ | Şebekede maksimum hata |
| $E_\varepsilon^N$ | Şebekede hata |
| $P^N$ | Yakınsaklık oranı |
| $O(h^p)$ | Yakınsaklık hızı |

# 1. GİRİŞ

Adi türevli diferansiyel denklemlerin birçoğunun bilinen analitik yöntemler yardımıyla çözümü yapılamazken, sayısal yöntemler yardımıyla çözümleri mümkündür. Analitik çözümlerde diferansiyel denklemin türüne uygun bir yöntem aranırken, sayısal çözümler genel olarak diferansiyel denklemin biçiminden bağımsızdırlar. Bu yüzden birçok mühendislik biliminin önemli problemlerinde özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine çalışılmıştır. Bilgisayar imkânlarının artmasıyla bazen sayısal yöntemler analitik çözüme rağmen tercih edilebilmektedir.

Reaksiyon-difüzyon denklemleri, fen bilimleri ve mühendisliğin birçok dalında önemli bir yere sahip olduğundan model olarak kullanılabilmektedir. Bu denklemlerin yaygın olması ve uygun analitik çözümlerinin sınırlı olması nümerik çözümlerinin önemini arttırmıştır.

Difüzyon kavramı bir bölgedeki bireyin hareketlerini modellemeyi açıklar. Bu bireyler partikül, bakteri, molekül gibi çok küçük nesneler olabileceğinin yanı sıra, doğadaki diğer canlılar veya olaylar olabilir.

Çevresel problemler (ekolojik) veya kimyasal reaksiyonlarda birden fazla bağımlı değişken söz konusu olduğundan bu tür problemler için model olarak diferensiyel denklem sistemleri kullanılmaktadır.

Singüler pertürbe özellikli diferensiyel denklemler adı genellikle, diferensiyel denklemdeki en büyük mertebeli türevli terimin $\varepsilon$ −katsayısı ile çarpım durumunda bulunmasıyla verilir. Ancak daha küçük mertebeden türevli terimlerde de benzer katsayılar bulunabilir. Bu tip problemler sınır katmanlarına sahiptir. Sınır katmanlarında problemin çözüm fonksiyonu $\varepsilon$ −katsayısına bağlı olarak büyük değişim gösterdiğinden, singüler pertürbeli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümü için kullanılan yöntemlerin $\varepsilon$-düzgünlüğüne sahip olması gerekir.

Gecikmeli diferensiyel denklemler, kontrol teorisi, ekonomi, tıp, biyoloji ve robotik bilimler alanındaki problemlerin matematiksel modelellemesinde önemli bir rol oynar. Eğer gecikme terimini içeren bir diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden terim bir küçük sabit $(\varepsilon)$ parametre ile çarpım durumunda verilirse bu takdirde singüler

pertürbe özellikli gecikmeli diferensiyel denklem adını alır. Genellikle birinci mertebeden düzgün yakınsak olan bu tip problem çalışmalarında başlangıç değer tekniği, shishkin şeması, klasik fark şeması, üstel katsayılı şema, Numerov şemaları vb. kullanılmaktadır

Bu tezin yapısı şu şekildedir:

Birinci bölüm problemin genel tanıtımının ve tezin yapısının anlatıldığı giriş bölümüdür. İkinci bölümde ise problem üzerine literatürde varolan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde gerekli tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde singüler pertürbe özellikli lineer reaksiyon-difüzyon problemi ele alınmış, sürekli problemin bilinen bazı özellikleri verildikten sonra düzgün ve düzgün olmayan (Shishkin) şebeke üzerinde fark şemaları kurulmuş ve yakınsaklık analizleri yapılmıştır.

Beşinci bölümde singüler pertürbe özellikli lineer olmayan (yarı-lineer) reaksiyon-difüzyon problemi ele alınmış, ilkönce sürekli problemin bilinen bazı özellikleri verilmiş, daha sonra düzgün şebeke üzerinde fark şemaları kurulmuş ve yakınsaklık analizi yapılmıştır.

Altıncı bölümde ise singüler pertürbe özellikli gecikmeli lineer reaksiyon-difüzyon problemi ele alınmış, sürekli problemin bilinen bazı özellikleri verildikten sonra düzgün şebeke üzerinde fark şemaları kurulmuş ve yakınsaklık analizi yapılmıştır.

Dört, beş ve altıncı bölümde ele alınan problemlerin herbiri için önerilen Numerov metoduna dayalı fark şemaları nümerik örneklerle desteklenmiş, Maple program kodlarıyla yapılmış algoritmalarla elde edilen sonuçlar tablolar halinde verilmiştir.

Yedinci bölüm sonuç bölümüdür. Tezde yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

## 2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Reaksiyon-difüzyon denklemleriyle ifade edilen problemler fen ve mühendislik alanında sıkça rastlanır. Ancak biz burada daha çok Numerov metoduna dayalı olarak yapılan çalışmaların bir kısmı hakkında kısa bilgi verelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y)$$

diferansiyel denklemi Harier ve ark. (1993) tarafından ele alınarak Numerov metodu uygulanmış ve

$$y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n = \frac{h^2}{12}(f_{n+1}+10f_n + f_{n-1})$$

şeklinde Numerov metodunun en genel formülü bulunmuştur. Bu kapalı formda çok adımlı bir yöntemdir. Burada eğer $f$ fonksiyonu $y$ ye göre lineer olursa bu taktirde denklemin açık form haline geldiği ve hatanın da 4. mertebeden olacağı belirtilmiştir.

Numerov metodunun yoğun bir şekilde kullanıldığı literatür çalışmalarının bir bölümü özel tiplerde Schrödinger dalga denkleminin çözümlerini ya da özdeğerlerini hesaplama üzerinedir (Fack ve Berge, 1987; Quiroz ve ark., 1997; Avdelas ve ark., 2000; Kalogiratou ve ark., 2005;; Tatu ve ark., 2007; Fang ve Wu, 2008; Konguetsof, 2010). Eğer

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) + V(r)\right]R(r) = ER(r)$$

denklemine $u(r) = rR(r)$ dönüşümü yapılırsa;

$$[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r)]u(r) = 0$$

elde edilir.

$$f(x) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\big(E - V(x)\big) - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}$$

alındığında reaksiyon-difüzyon formundaki Schrödinger dalga diferansiyel denklemi elde edilir.

Herceg (1990; 1993), Herceg ve ark. (2001), Vulanoviç (2004) çalışmalarında

$$\varepsilon u''(x) + b(x,u) = 0$$

denklemi farklı şartlar altında başlangıç değer problemi olarak ele alınmış farklı şebekeler üzerinde nümerik çözümleri üzerine çalışılmıştır.

Clavero ve ark. (1995) makalesinde

$$-\varepsilon^2 u''(x) + b(x)^2 u(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = A, u(1) = B$$

singüler pertürbeli lineer self-adjoint sınır değer problemin singüler pertürbe parametresine göre hem düzgün hem de yüksek mertebeli yakınsaklığa sahip fark şeması verimiştir.

O'Riordan ve Stynes (1996) makalesinde

$$Ly \coloneqq \varepsilon^2 (Py')' - ry = f, y(0) = y_0, y(1) = y_1$$

denklemi ele alınmış, problem için üstel elman tabanlı bir FEM (sonlu eleman metodu) geliştirilmiştir. Şemanın ikinci mertebeden bir doğruluğa sahip olduğu gösterilmiştir.

Al-Said ve Noor (2001) daki çalışmalarında

$$u'' = \begin{cases} f(x), & a \le x \le c \\ g(x)u(x) + f(x), & c \le x \le d \\ f(x), & d \le x \le b \end{cases}$$
$$u(0) = \alpha_1, u(1) = \alpha_2$$

problemi için bir algoritma geliştirmiştir. Bu algoritma Numerov metoduna ilişkin noktaları da içerdiğinden düzeltilmiş Numerov metodu adı verilmiştir.

Xenophontos ve Fulton (2003), Xenophontos (2002) makalelerinde

$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = f(x), \qquad u(\pm 1) = 0$$

sınır değer problemini ele alınmış, Xeonophntos ve Fulton (2003) teki çalışmada düzgün Shishkin şeması üzerinde, Xeonophntos (2002) deki çalışmada ise düzgün olmayan bir şema üzerinde nümerik çözüm araştırılmıştır.

Tselyaev (2004) te

$$y'' + g(x)y'(x) + f(x)y(x) = 0,$$

biçiminde birinci türevi bulunduran bir lineer diferansiyel denklem tipi için Numerov metodu genelleştirilmiştir.

Linss ve Madden (2004), Mathews ve ark. (2002), Rao ve ark. (2011) çalışmalarında

$$Lu \coloneqq -Eu'' + Au = f$$

sistemi farklı $\varepsilon$ veya $\varepsilon^2$ değerleri için Linss ve Madden (2004) te başlangıç-değer problemi olarak, Rao ve ark. (2011), Mathews ve ark. (2002) de ise sınır değer problemi olarak incelenmiştir. Yakınsaklıkları araştırılmıştır.

Linss (2005) te tek boyutlu reaksiyon-difüzyon probleminin çözümlerinin düzgün yakınsaklığı üzerine çalışılmıştır.

Patidar (2005) te self adjoint singüler pertürbe problemi için yüksek mertebeden bir üstel katsayılı opreratör metodu sunulmuş, Bawa (2007) deki çalışmasında bir Numerov şeması verilmiştir.

Stynes ve Kopteva (2006) da ise bir sınır değer problemi survey niteliğinde ele alınmıştır.

Herceg (1990), Jayakumar (2003), Kumar (2009), Linss (2009; 2014) çalışmalarında

$$-\varepsilon^2 u''(x) + b(x)u(x) = f(x)$$

denklemi sınır değer problemi olarak ele alınmış, farklı şartlar altında çeşitli nümerik yaklaşımlarla çözülmüştür. Constantinou ve Xenophontos (2015), Gelu ve ark. (2017) de aynı denklemi başlangıç değer problemi olarak incelenmiştir.

Berge ve Daele (2007) çalışmasında

$$-y'' + qy = \lambda y, \;\; y(0) = y(\pi) = 0$$

sınır değer probleminde özdeğerleri bulmak için bir Numerov tipi metod geliştirilmiştir.

Bulatov ve Berge (2009) daki çalışmada ise Numerov tipi algoritmalar yardımıyla

$$y'' = A(t)y(t) + f(t); \;\; y(0) = y_0, y'(0) = y_0', \qquad t\epsilon[0,1]$$

problemi için iki adımlı şema oluşturulmuş P-kararlılığı denilen özel bir kararlılık çeşidi incelenmiştir.

Holevoet ve ark.(2009) çalışmasında

$$y'' = f(t,y), \qquad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

sınır değer problemi çözülürken optimal üstel katsayılı Numerov metodu için bir algoritma sunulmuştur. Yapılan yaklaşımın 6. Mertebeden olduğu belirtilmiştir.

Phaneendra ve ark. (2010) çalışmasında

$$-\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x)$$
$$u(0) = \alpha, u(1) = \beta$$

iki noktalı singüler pertürbeli sınır değer problemi için bir Numerov fark şeması geliştirilmiştir.

Wang (2011) deki çalışmasında $f$ ve $u'$ fonksiyonları $u$ ya göre lineer olmayan birer fonksiyon olmak üzere

$$-\frac{d}{dx}(k(u)\frac{du}{dx} = f(x,u), \qquad 0 \le x \le 1, \qquad u(0) = \alpha, u(1) = \beta$$

iki nokta sınır değer probleminin Numerov Metoduyla çözümü incelenerek bir nümerik çalışma yapılmıştır. Bunun için bir monoton iterative algoritma sunulmuştur.

Wang ve ark. (2012) makalesinde

$$-u''(x) = f\big(x, u(x)\big), \;\; 0 < x < 1$$
$$u(0) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u(\xi_i), u(1) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i(\eta_i)$$

problemine bir nümerik algoritma verilmiştir. Ayrıca çözümün varlığı, tekliği ve yakınsaklığı incelenmiştir. Sonuçlar klasik fark şemalarıyla karşılaştırılmıştır.

Phaneendra ve ark. (2012) deki çalışmada

$$\begin{cases} \varepsilon^2 y''' = f(y)y' + g(x,y), \quad a < x < b \\ y(a,\varepsilon) = A, \;\; y'(a,\varepsilon) = C, \;\; y(b,\varepsilon) = B \end{cases}$$

formunda üçüncü mertebeden sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu çalışmada çözümlerin asimptotik davranışları incelenmiş, [0,1] aralığı ikiye bölünerek her bir aralık için $\sigma$ üstel katsayı çarpanı araştırılmıştır. Buna bağlı çözümler elde edilmiştir.

Gao ve ark. (2013) çalışmasında

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \pi$$
$$y(0) - hy'(0) = 0, \qquad y(\pi) + Hy'(\pi) = 0$$

problemi için iyileştirilmiş bir Numerov metodu önerilmiştir. Metodun doğruluğu, kararlılığı incelenmiş, yakınsaklığın sağlandığı gösterilmiştir.

You ve ark. (2013) makalesinde

$$y'' + \omega^2 y = f(x,y), \qquad x\epsilon[x_0, X]$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0{}'$$

problemi için uyarlanmış bir Numerov şeması geliştirilmiştir.

Sınır değer problemleri için singüler pertürbe özellikli problemlerin analizi ve uygulamaları için ayrıntılı çalışmalar (Lange ve Miura; 1982,1985), Roos ve ark.(2000), Farrel ve ark. (2000) de mevcuttur.

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin en önemli uygulama alanlarından birisi kontrol teorisidir. Burada teknik bir cihazın devresinin kontrolünden tutun da biyolojik, ekolojik, tıbbi alanlar ile gemi ve uçakların seyir kontrolüne kadar geniş yer tutmaktadır.

Şimdi de singüler pertürbe özellikli gecikmeli diferensiyel denklemler için bazı literatür çalışmalarını aktaralım:

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğine ilişkin bilgiler El'sgol'ts ve Norkin (1973) kaynağında mevcuttur. Gecikmeli diferensiyel denklemlerin nümerik çözüm metodları hakkında detaylı bilgilere Bellen ve Zennaro (2003) kaynağında ulaşılabilir.

Kadalbajoo ve Sharma (2004) çalışmasında

$$\varepsilon^2 y''(x) + a(x)y(x-\delta) + b(x)y(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1$$
$$y(x) = \phi(x), -\delta \le x \le 0; \;\; y(1) = \gamma$$

ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli gecikmeli diferensiyel denklem için sınır değer problemi ele alınmış, gecikme teriminin sınır katmanlarına etkisi nümerik olarak çalışılmıştır. Burada gecikme teriminin küçük olduğu var sayılarak taylor açılımından faydalanılmıştır.

Kadalbajoo ve Sharma (2008) makalesinde

$$\varepsilon^2 y''(x) + a(x)y(x-\delta) + b(x)y(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1$$
$$y(x) = \phi(x), -\delta \le x \le 0; \;\; y(1) = \gamma$$

ise gecikme teriminin büyük ya da küçük olmasına bakılmaksızın verilen nümerik şema için yakınsaklık ve kararlılık analizi yapılmıştır. Ayrcıa Kadalbajoo ve Sharma (2005a,2005b,2006) çalışmalarında sırasıyla lineer ve lineer olmayan ikinci mertebeden gecikmeli singüler pertürbe problemleri için birçok nümerik şema sunmuşlardır. Kadalbajoo ve Ramesh (2007) hibrid bir metod çalışması yapmıştır.

Kadalbajoo ve Kumar (2010) makalesinde

$$\varepsilon^2 y''(x) = F\big(x, y(x), y'(x-\delta)\big) + b(x)y(x) = f(x), \qquad x\epsilon\Omega = [0,1]$$
$$y(x) = \phi(x), -\delta \le x \le 0; \;\; y(1) = \gamma$$

lineer olmayan problemi ele alınmış ve linerizasyon tekniği ile lineer hale getirilen problemler dizisi için parçalı düzgün şebeke üzerinde parametreye bağlı düzgün yakınsaklık incelenmiştir. Çalışma nümerik örneklerle desteklenmiştir.

Amiraliyeva ve ark. (2010) makalesinde

$$Lu \equiv \varepsilon u''(t) + a(t)u'(t) + f\big(t, u(t), u(t-r)\big) = 0, \qquad 0 < t \le T$$
$$u(t) = \varphi(t), t \in [-r, 0], \;\; u'(0) = A/\varepsilon$$

başlangıç değer problemi için üstel katsayılı fark şeması verilmiştir. Şemanın düzgün yakınsaklığı gösterilmiş, nümerik örnekle desteklenmiştir. Ayrıca yakınsaklık analizinde kullanılan sürekli çözümün bazı özellikleri de verilmiştir.

Amiraliyev ve Çimen (2010) çalışmasında

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x-r) = f(x), \qquad 0 < x < l$$
$$u(x) = \varphi(x), x \in [-r, 0], \qquad u(l) = B$$

problemine bir üstel katsayılı şema verilmiştir. Burada gecikme, reaksiyon teriminde alınmıştır.

Erdogan ve Amiraliyev (2012) makalesinde

$$Lu \equiv \varepsilon u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) + c(t)u(t-r) = f(t), \qquad 0 < t \le T$$
$$u(t) = \psi(t), t \in [-r, 0], \;\; u'(0) = A/\varepsilon$$

başlangıç-değer problemi için üstel katsayılı bir şema verilmiş, şemanın pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsak olduğu gösterilmiş, nümerik örneklerle teori desteklenmiştir.

Swomy ve ark. (2015) çalışmasında

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y(x-\delta) + b(x)y(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1$$
$$y(x) = \phi(x), -\delta \le x \le 0; \;\; y(1) = \beta$$

problemi önce asimptotik olarak denk olan birinci mertebeden nötral tipte gecikmeli bir diferensiyel denkleme dönüştürülmüş, sonra da nümerik integrasyon ve lineer interpolasyon teknikleri yardımıyla üçlü band denklem sistemi haline getirilerek invaryant imbedding algoritması(Thomas Algoritması) ile çözülmüştür. Ayrıca metodun yakınsaklığı tartışılmıştır.

Salama ve Al-Amery (2016) makalesinde yüksek mertebeden düzgün yakınsak olan bir nümerik metod önerilmiş ve analiz edilmiştir. Global hata için bir sınır bulunmuştur. Küçük değişikliklerin çözümlerin üzerine etkisi nümerik örneklerle incelenmiştir.

Gecikme terimi büyük olan singüler pertürbe özellikli gecikmeli diferensiyel denklem için bir sınır değer probleminde Chakravarthy ve ark. (2017) ,

$$-\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x-1) = f(x), \qquad x\epsilon[0,2]$$
$$y(x) = \phi(x), x\epsilon[-1,0], \qquad y(2) = \beta$$

problemi için bir üstel katsayılı operatör fark şeması verilmiş, şemanın kararlılığı ve yakınsaklığı incelenerek örneklerle desteklenmiştir. Chakravarthy ve Rao (2012) çalışmasında singüler pertürbe problemi için iyileştirilmiş bir Numerov metodu sunulmuştur.

Chakravarthy ve Kumar (2017) makalesinde

$$-\varepsilon y''(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x-1) = f(x), \qquad 0 < x < 2$$
$$y(x) = \phi(x), x\epsilon[-1,0], \qquad y(2) = \beta$$

Numerov metoduna dayalı yeni bir üstel katsayılı operatör sonlu fark şeması sunmuşlardır.

Erdogan ve Cen (2018) makalesinde parçalı düzgün şebekede (Shishkin tipi) hemen hemen yakınsak olan sonlu fark şeması verilmiştir. Çalışma nümerik örnekle desteklenmiştir.

Kanth ve Muralli (2018), singüler pertürbe özellikli lineer olmayan gecikmeli differensiyel denklem için bir problem sınıfı ele alınmış, öncelikle linerizasyon tekniği

ile lineer denklem dizisine dönüştürülmüş ve daha sonra buna üstel katsayılı spline biçiminde nümerik bir çözüm tekniği sunulmuştur.

Kalaiselvan ve ark. (2019) ele aldıkları makalede

$$\varepsilon u''(x) + \mu a(x)u'(x) - b(x)u(x) + c(x)u(x-1) = f(x), \qquad 0 < x < 2$$
$$u(x) = \phi(x), x\epsilon[-1,0], \qquad u(2) = l$$

iki parametreli gecikmeli diferensiyel denklemi için nümerik bir şema önerilerek, şemanın birinci mertebeden yakınsaklığa sahip olduğu teorik ve örneklerle gösterilmiştir.

Sekar ve Tamilselvan (2019) ise çalışmalarında bir gecikmeli sistem için parçalı düzgün (Shishkin) şebeke üzerinde sonlu fark şeması önerilmiştir. Şemanın hemen hemen birinci dereceden yakınsak olduğu gösterilmiştir.

## 3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 3.1 Pertürbasyon Teorisi

Herhangi bir denklemde bulunan $\varepsilon$ parametresinin denklemde oluşturduğu etki pertürbasyon teorisi ile açıklanmaktadır. Böyle bir sistemin temsil ettiği problemler regüler problemler ve singüler problemler olmak üzere iki türlüdür. Bunları şu şekilde açıklayabiliriz:

$P_\varepsilon$ , yeterince küçük $\varepsilon$ parametresine bağlı herhangi bir problem olmak üzere denklemdeki $\varepsilon$ parametresi yerine sıfır $(\varepsilon = 0)$ alındığında bulunacak olan $P_0$ problemine, *uygun indirgenmiş problem* denilmektedir. $P_0$ indirgenmiş problemi ile $P_\varepsilon$ problemi aynı mertebeden ve her ikisi de bir tek çözüme sahip olduğu zaman $P_\varepsilon$ problemine *regüler pertürbe problem* aksi halde *singüler pertürbe problem* denilmektedir (Barbu ve Moroşanu, 2007; Miller ve ark., 2012). Bunlara sırasıyla aşağıdaki örnekler verilebilir:

$$P_\varepsilon: \quad u'(x) + \varepsilon u(x) = 0, 0 < x < 1, u(0) = 1$$

ve

$$P_\varepsilon: \quad \varepsilon u'(x) + u(x) = 0, 0 < x \leq 1, u(0) = 1.$$

Tanım 3.2 Sonlu Fark Yöntemi

Sonlu fark yönteminde, verilen diferansiyel denklemdeki türevler yerine fark türevleri konularak fark denklemi elde edilir. Elde edilen bu fark denklemi bir lineer cebirsel denklem sistemidir. Bu sistemin çözümünden, çözüm fonksiyonunun ayrık noktalardaki değerlerine ulaşılarak nümerik bir çözüm elde edilir. Yani, belli bir şebekede tanımlanmış fonksiyonun değerleri bulunmaktadır (Samarskii, 2001). Sonlu fark yöntemlerinde fark formülleri bulunurken, çoğu zaman taylor serisinin açılımından faydalanılmaktadır.

Tanım 3.3 Başlangıç-Sınır Katmanı

Singüler pertürbe problemin çözümünün ani hızlı değişebildiği herhangi bir sınır veya başlangıç noktasının bir komşuluğuna, o noktanın sınır veya başlangıç katmanı denir. Sınır katmanı dışındaki üstel biçimli küçük değerlere sahip fonksiyona ise sınır veya başlangıç katmanı fonksiyonu denir (Amirali ve Amirali, 2018; Linss, 2010; Miller ve ark., 2012).

Reaksiyon-difüzyon tipi problemler tanımlı oldukları aralığın uç noktalarında olmak üzere iki katmana sahiptirler.

Tanım 3.4 Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

Bir $\overline{\Omega} = [a, b]$ aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına bir *şebeke* denir. Söz konusu şebekede tanımlanmış fonksiyona ise *şebeke fonksiyonu* denir. $[a, b]$ aralığında tanımlanan

$$\overline{\omega} = \{x_i | a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b\}$$

ayrık noktalar kümesine $[a, b]\ de$ tanımlanan *düzgün olmayan şebeke* denir. $x_i$ noktalarına ise *düğüm noktaları* veya *şebeke düğümleri* denir. Burada $h_i = x_i - x_{i-1}$ farkına *şebeke adımı* denir. Eğer düğümler eşit ise buna *düzgün şebeke* denir ve bir düzgün şebeke

$$\omega_h = \left\{ x_i | x_i = ih, \qquad i = 0,1, \dots, N;\ h = \frac{b-a}{N} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $h$ şebeke adımıdır.
$x_i$ düğüm noktalarında tanımlanmış şebeke fonksiyonu ise $g_i \equiv g(x_i)$ şeklinde tanımlanır (Samarskii,2001).

Tanım 3.5 $\|g\|_{\infty,\overline{\Omega}} = \max_{a \le x \le b} |g(x)|$ şeklinde tanımlanan ifadeye $g(x)$ fonksiyonunun $\overline{\Omega}$ aralığındaki *maksimum normu* denir (Isaacson ve Keller, 1994).

Tanım 3.6 Şebeke Normları

$$\|g\|_{\infty,\bar{\omega}_h} = \max_{0\le i\le N}|g_i|$$

şeklinde tanımlanan ifadeye düzgün şebekede maksimum normun fark benzeri denir (Isaacson ve Keller, 1994).

Tanım 3.7 Maksimum Prensibi

Herhangi bir $v(x) \in C^2[0,l]$ fonksiyonu için $v(0) \geq 0$ ve $v(l) \geq 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $0 < x < l$ için $Lv(x) \geq 0$ sağlanırsa o zaman tüm $0 < x < l$ için $v(x) \geq 0$ dır (Doolan ve ark.,1980).

Tanım 3.8 Fark Maksimum Prensibi

$$l[y_i] \equiv A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1,2,\dots,N-1$$
$$y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2$$

biçiminde bir sonlu fark problemi için

$$A_i > 0, B_i > 0, D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0,$$

verilsin. Bu durumda, her $i = 1,2,\dots,N-1$ ve $y_i \neq sabit$ için

$$l[y_i] \geq 0 \ (l[y_i] \leq 0)$$

şartları sağlanıyorsa $y_i$ şebeke fonksiyonu pozitif maksimum değerini (veya negatif minimum değerini) şebekenin iç noktalarında alamaz, yani $i = 1,2,\dots,N-1$ için alamaz. Bu duruma maksimum prensibi denir (Amirali ve Amirali, 2018; Roos ve ark., 2008 ).

Tanım 3.9 $[0,l]$ aralığındaki $g(x)$ fonksiyonunun düzgün şebekedeki fark türevleri

$g_{x,i} = \frac{g_{i+1}-g_i}{h}$ *birinci mertebeden ileri fark türevi*,

$g_{\bar{x},i} = \frac{g_i-g_{i-1}}{h}$ *birinci mertebeden geri fark türevi*,

$g_{x^\circ,i} = \frac{g_{i+1}-g_{i-1}}{2h}$ *birinci mertebeden merkezi fark türevi*,

$g_{\bar{x}x,i} = \frac{g_{i+1}-2g_i+g_{i-1}}{h^2}$ *ikinci mertebeden fark türevi*

olarak tanımlanmaktadır (Samarskii, 2001 ).

Tanım 3.10

$[0, l]$ aralığındaki $g(x)$ fonksiyonunun düzgün olmayan şebekedeki fark türevleri ise

$g_{x,i} = \frac{g_{i+1}-g_i}{h_{i+1}}$ *birinci mertebeden ileri fark türevi*,

$g_{\bar{x},i} = \frac{g_i-g_{i-1}}{h_i}$ *birinci mertebeden geri fark türevi*,

$g_{x^\circ,i} = \frac{g_{i+1}-g_{i-1}}{\hbar_i}$ *birinci mertebeden merkezi fark türevi*,

$g_{\bar{x}x,i} = \frac{g_{x,i}-g_{\bar{x},i}}{\hbar_i}$ *ikinci mertebeden fark türevi* şeklinde tanımlanmıştır.

Burada $h_i = x_i - x_{i-1}$ ve $\hbar_i = (h_i + h_{i+1})/2$ dır (Samarskii, 2001).

Tanım3.11 Shishkin Şebeke (Düzgün Parçalı Şebeke)

Herhangi bir sınır değer probleminde $[0, l]$ aralığının üç parçaya bölünmesine dayanır. Bunun için $\sigma$ ya bağlı iki geçiş noktası kullanılır. $\sigma$ ve $(1-\sigma)$. Bu noktalar $x = 0$ ve $x = l$ sınır katmanlarında olur. Burada $\sigma$ , N bir çift tamsayı olmak üzere

$$\sigma = min\{1/4, \alpha^{-1}\varepsilon lnN\}$$

şeklinde tanımlanır. Amaç fark şemasının $\varepsilon$-düzgün yakınsak olmasını sağlamaktır. Böylece oluşan alt aralıklarımız $[0, \sigma]$, $[\sigma, l-\sigma]$, $[l-\sigma, l]$ biçiminde olur. Bunlardan $[0, \sigma]$ ve $[l-\sigma, l]$ deki aralıklar N/4 eşit uzaklıklı, $[\sigma, l-\sigma]$ deki aralıklar ise N/2 eşit

uzaklığına sahiptir. $[0,\sigma]$, $[\sigma, l-\sigma]$, $[l-\sigma, l]$ alt aralıklarının adım uzunlukları sırasıyla $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, $h^{(3)}$ olup

$$h^{(1)} = \frac{4\sigma}{N},\ h^{(2)} = \frac{2(1-2\sigma)}{N}, \qquad h^{(3)} = \frac{4\sigma}{N},$$

$$\frac{h^{(1)} + h^{(3)}}{2} = \frac{2}{N};\ h^{(1)} = h^{(3)} \le N^{-1};\ N^{-1} \le h^{(2)} \le 2N^{-1}$$

şeklinde tanımlanır.

$[0, l]$ aralığında $x_i$ düğüm noktaları ise

$$\overline{\omega}_N = \begin{Bmatrix} x_i = ih^{(1)}, i = 0,..,\frac{N}{4};\ x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{4}\right)h^{(2)}, i = \frac{N}{4}+1,\dots,\frac{3N}{4}; \\ x_i = 1 - \sigma + \left(i - \frac{3N}{4}\right)h^{(3)}, i = \frac{3N}{4}+1,\dots,N \end{Bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Miller ve ark. 2000).

Tanım 3.12 Kuadratür Formülleri

Aşağıda yazılan kuadratür formülleri (Amirali ve Amirali, 2018) fark şemalarının kurulmasında ve incelenmesinde kullanılan önemli formüllerdir.

1.

$$\int_a^b f(x)p(x)dx =$$

$$= \left(\int_a^b p(x)dx\right)\left(\sigma f(b) + (1-\sigma)f(a)\right) + f(a:b)\int_a^b p(x)\left(x - x^{(\sigma)}\right)dx + R(f)$$

Burada $\sigma$ bir reel parametre, $p(x) \in [a,b]$ bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$f(a:b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad x^{(\sigma)} = \sigma^b + (1-\sigma)a,$$

$$T_s(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^s}{s!}, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases},$$

$$K_s(x,\xi) = T_s(x-\xi) - \frac{x-a}{b-a}(b-\xi)^s, \qquad s = 0,1$$

$$R(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)\, K_{n-1}(x,\xi) d\xi, \qquad n = 1,2$$

dır.

2.

$$\int_a^b f'(x)p(x)dx = f(a:b)\int_a^b p(x)dx + \bar{R}(f)$$

Burada $K_{n-1}$, $F_1$- formülündeki ile aynı terim ve

$$\bar{R}(f) = -\int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)\, K_{n-1}(x,\xi) d\xi, \qquad n = 1,2$$

dır.

3.

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(\frac{a+b}{2})\int_a^b p(x)dx + R^*(f)$$

Burada

$$R^*(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)\, K_{n-1}^*(x,\xi) d\xi +$$

$$+(n-1)f(a:b)\int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) p(x)dx\,, \qquad n = 1,2$$

ve

$$K_s^*(x,\xi) = T_s(x-\xi) - T_s\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right) + \frac{1}{b-a}(b-\xi)^s \left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad s = 0,1$$

dır.

### 3.1. İkinci Mertebeden Lineer Diferensiyel Denklemler

$I = [0,1]$ olmak üzere ikinci mertebeden iki noktalı

$$\begin{cases} Lu(x) \equiv -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x),\ x \in I \\ u(0) = g_0,\ \ u(1) = g_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

sınır-değer problemini ele alalım. $p$, $q$ ve $f$ fonksiyonlarının $I$ aralığı üzerinde yeterince düzgün olduğunu, $q$ nun pozitif, $p^*$ ve $q^*$ sabitlerinin de pozitif olduğunu kabul edelim öyle ki

$$|p(x)| \le p*,\ \ 0 < q* \le q(x),\ \ x \in I$$

sağlansın. $\pi = \{x_j\}_{j=0}^{N+1}$, $I$ aralığının $x_j = jh,\ j = 0,1,2,\dots,N+1$, ve $(N+1)h = 1$ olacak şekilde bir düzgün parçalanması olsun. Bu parçalanmaya bağlı (3.1) probleminin yaklaşık çözümlerini veren şebeke fonksiyonlarını $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ ile gösterirsek, probleme karşılık gelen sonlu fark problemi

$$\begin{cases} L_h u_j \equiv -\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2} + p_j \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h} + q_j u_j = f_j,\ \ j = 1,2,\dots,N \\ u_0 = g_0,\ \ u_{N+1} = g_1, \end{cases} \tag{3.2}$$

şeklinde olur. Burada $p_j = p(x_j),\ q_j = q(x_j),\ f_j = f(x_j)$ dir (Amirali ve Amirali, 2018; Keller, 1968).

Şimdi de diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini hesaplanması ve bu hesaplamanın kesinlik mertebesi (doğruluğu) çalışılırken, sonlu fark metodunun bazı kavramlarını açıklayalım. Bunlar, sırasıyla Tutarlılık (Consistency), Kararlılık (Stability) ve Yakınsaklıktır (Convergence) (Keller, 1968;Isaacson ve Keller, 1994).

Tanım 3.1.1 Tutarlılık (Consistency)

$w$, $I$ aralığı üzerinde tanımlı yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$\tau_{j,\pi}[w] \equiv L_h w(x_j) - Lw(x_j),\ \ j = 1,2,\dots,N$$

olsun. Eğer $h \to 0$ iken $\left|\tau_{j,\pi}[w]\right| \to 0$ oluyorsa bu taktirde (3.2) fark problemi ile (3.1) problemi tutarlıdır denir. Buradaki $\tau_{j,\pi}[w],\ j = 1,2,\dots,N$ değerlerine de yerel kesme hatası denir (Isaacson ve Keller, 1994).

Lemma 3.1.2

Eğer $w \in C^4(I)$ ise o zaman

$$\tau_{j,\pi}[w] = -\frac{h^2}{12}[w^4(v_j) - 2p(x_j)w^3(\theta_j)]$$

dir. Burada $v_j$ ve $\theta_j \in (x_{j-1}, x_{j+1})$ dir.

İspat:

Taylor teoreminden

$$\frac{w(x_{j+1}) - w(x_{j-1})}{2h} - w'(x_j) = \frac{h^2}{6}w^3(\theta_j), \qquad \theta_j \in (x_{j-1}, x_{j+1}),$$

ve

$$\frac{w(x_{j+1}) - 2w(x_j) + w(x_{j-1})}{h^2} - w''(x_j) = \frac{h^2}{12}w^4(v_j), \qquad v_j \in (x_{j-1}, x_{j+1}),$$

yazılabildiğinden $\tau_{j,\pi}[w]$ tanımında yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilmiş olur (Isaacson ve Keller, 1994).

Tanım 3.1.3 Kararlılık

Herhangi bir şebeke fonksiyonu $\{v_j\}_{j=0}^{N+1}$ ve yeterince küçük $h$ değerleri için,

$$\left|v_j\right| \le K\left\{\max(|v_0|, |v_{n+1}|) + \max_{0\le i\le n}|L_h v_i|\right\} \qquad j = 0,1,2,\dots,N+1, \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $h$ den bağımsız bir $K$ sabiti varsa bu taktirde $L_h$ fark operatörü kararlıdır denir (Kadalbajoo ve Kumar, 2008).

Teorem 3.1.4 Eğer $p$ ve $q$ fonksiyonları

$$|p(x)| \le p*, \quad 0 < q* \le q(x), \quad x \in I$$

şartını sağlayan fonksiyonlar ise o zaman $K = \max(1, \frac{1}{q^*})$ olmak üzere (3.1) diferansiyel denkleminin (3.2) $L_h$ fark operatörü $h < \frac{2}{p^*}$ için kararlıdır (Roos ve ark, 2008).

İspat:

$|v_{j*}| = \max_{0 \le j \le N+1} |v_j|$, $1 \le j* \le n$, olsun. O zaman (3.2) sisteminden

$$d_{j*} v_{j*} = -e_{j*} v_{j*+1} - c_{j*} v_{j*-1} + h^2 L_h v_{j*}$$

elde edilir. Buradan

$$d_{j*} |v_{j*}| \le (|e_{j*}| + |c_{j*}|) |v_{j*}| + h^2 \max_{1 \le j \le N} |L_h v_j|$$

olur. Eğer $h < \frac{2}{p^*}$ ise

o zaman $d_{j*} = |e_{j*}| + |c_{j*}| + h^2 q_{j*}$ olacağından

$$h^2 q_{j*} |v_{j*}| \le h^2 \max_{1 \le j \le N} |L_h v_j|$$

veya $|v_{j*}| \le \frac{1}{q*} \max_{1 \le j \le N} |L_h v_j|$ bulunur. $j = 1,2,\dots,N$ için $|v_{j*}| = \max_{0 \le j \le N+1} |v_j|$ almıştık. Öyleyse

$$\max_{0 \le j \le N+1} |v_j| \le \frac{1}{q*} \max_{1 \le j \le N} |L_h v_j|$$

ve buradan da

$$\max_{0 \le j \le N+1} |v_j| = max\{|v_0|, |v_{N+1}|\} \text{ ise } K = max\left\{1, \frac{1}{q*}\right\}$$

ile birlikte ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.5 Yakınsaklık

(3.1) sınır değer probleminin çözümü $u$ ve buna karşılık gelen (3.2) fark probleminin yaklaşık çözümü de $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ olsun. Eğer $h \to 0$ iken

$$\max_{1\le j\le N} |u_j - u(x_j)| \to 0$$

oluyorsa bu taktirde yaklaşık çözüm $u$ ya yakınsaktır denir. Ayrıca $u_j - u(x_j)$ farkına da $x_j$ $(j = 1,2,\dots,N)$ noktasındaki global kesme hatası denir (Keller, 1968;Isaacson ve Keller, 1994).

Tanım 3.1.6 Yeterince küçük $h$ değerleri için $h$ den bağımsız bir $C$ sabiti,

$$\max_{0\le j\le N+1} |u_j - u(x_j)| \le Ch^p$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde varsa bu taktirde $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ yaklaşık çözümü (3.1) sınır değer probleminin $u$ çözümüne p. dereceden bir yaklaşıma sahiptir denir(Keller, 1968;Isaacson ve Keller, 1994).

Tanım 3.1.7 Bir sınır değer probleminin tam çözümünün i. noktasındaki değeri $u_i$ ve yaklaşık çözümünün i noktasındaki değeri de $y_i$ olmak üzere maksimum mutlak hata

$$E_\varepsilon^N = |y_i - u_i| \text{ , } E^N = \max_\varepsilon E_\varepsilon.$$

formülleri ile ve yakınsaklık ile düzgün yakınsaklık hızı da sırasıyla

$$P_\varepsilon^N = \frac{\log\left|\left(E_\varepsilon^N / E_\varepsilon^{2N}\right)\right|}{log2},\ P^N = \frac{\log\left|\left(E^N / E^{2N}\right)\right|}{log2}$$

ile hesaplanır. Eğer tam çözüm bilinmiyorsa genellikle çift şebeke sistemi yardımıyla bulunur. Tezde çözümü olmayan problemler için bu formüller kullanıldı. Yani

$$E_\varepsilon^N = \max_{0\le i\le N}\left|u_i^N - u_{2i}^{2N}\right|,\ E^N = \max_\varepsilon E_\varepsilon.$$

olmak üzere yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık hızı sırasıyla

$$P_\varepsilon^N = \frac{\log\left|\left(E_\varepsilon^N / E_\varepsilon^{2N}\right)\right|}{log2},\ P^N = \frac{\log\left|\left(E^N / E^{2N}\right)\right|}{log2}$$

hesaplandı (Linss,2010).

Şimdi de Tutarlılık, Kararlılık ve Yakınsaklık arasındaki bağıntıyı veren teoremi verelim:

Teorem 3.1.7 Farz edelim ki $u \in C^4(I)$ ve $h < \frac{2}{p^*}$ dir. O zaman (3.2) fark denkleminin $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ çözümü (3.1) probleminin *u* çözümüne yakınsaktır ve üstelik aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Roos ve ark, 2008):

$$\max_{0\le j\le N+1}\left|u_j - u(x_j)\right| \le Ch^2$$

İspat:

Verilen şartlar altında (3.1) ile (3.2) sisteminin tutarlı olduğu açıktır. Ayrıca $L_h$ fark operatörü kararlıdır.

$$L_h[u_j - u(x_j)] = f(x_j) - L_h u(x_j) = Lu(x_j) - L_h u(x_j) = -\tau_{j,\pi}[u],$$
$$u_0 - u(x_0) = u_{N+1} - u(x_{N+1}) = 0,$$

olduğundan $L_h\ in$ kararlı olmasından dolayı

$$\left|u_j - u(x_j)\right| \le \frac{1}{q} * \max_{0\le j\le N+1}\left|\tau_{j,\pi}[u]\right|$$

bulunur. Böylece istenen sonuçta yukarıdaki Lemma 3.1.2 den görülür. Teorem bize yaklaşımın 2. mertebeden olduğunu göstermektedir. Bu teoremin sonucunu şu şekilde ifade edebiliriz. Tutarlı ve kararlı bir sistem yakınsaktır ve yakınsama derecesi tutarlılığın yaklaşım mertebesi ile aynıdır.

### 3.2. Gronwall integral eşitsizlikleri

Ele alınan foksiyonlar sürekli olmak üzere

$$v(t) \le u_0 + \int_0^t [p(s)v(s) + q(s)]\, ds, \;\; p(t) \ge 0$$

ise

$$v(t) \le u_0 \exp\left(\int_0^t p(\xi)\, d\xi\right) + \int_0^t q(s)\exp\left(\int_s^t p(\xi)\, d\xi\right) ds$$

olur. Eğer

$v(t) \le g(t) + \int_0^t p(s)v(s)\, ds, \quad p(t) \ge 0$ ise

$$v(t) \le g(t) + \int_0^t g(s)p(s)\exp\left(\int_s^t p(\xi)\, d\xi\right) ds$$

olur (Amirali ve Amirali, 2018).

### 3.3. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemler

Bu kısımda lineer olmayan ikinci mertebeden iki noktalı sınır değer probleminin çözümü için sonlu fark denklemi hakkında temel bilgiler verelim.

$$\begin{cases} Lu(x) \equiv -u'' + f(x,u) = 0, & x \in I, \\ u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1. \end{cases} \tag{3.4}$$

ele alalım. Problemin ikinci mertebeden yaklaşımın sonlu fark şeması

$$\mathcal{L}_h u_j \equiv -u_{\bar{x}x,j} + f\left(x_j, u_j\right) = 0, \;\; j = 1,2,\dots,N; \quad u_0 = g_0, \; u_{N+1} = g_1 \tag{3.5}$$

formunda olur. Eğer

$$\tau_{j,\pi} \equiv \mathcal{L}_h u\left(x_j\right) - Lu\left(x_j\right)$$

alırsak o zaman $u \in C^4(I)$ için

$$\tau_{j,\pi}[u] = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_j), \qquad \xi_j \in (x_{j-1}, x_{j+1})$$

olacağı açıktır. Burada

$$u_{\bar{x}x,j} \equiv \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2}$$

dir.

Lineer olmayan fark probleminin kararlılığı da aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.3.1

$\mathcal{L}_h$, lineer olmayan bir fark probleminin operatörü olsun. Eğer yeterince küçük $h$ değerleri ve

$\{v_j\}_{j=0}^{N+1}$ , $\{w_j\}_{j=0}^{N+1}$ şebeke fonksiyonları için,

$$|v_j - w_j| \leq K\left\{\max(|v_0 - w_0|, |v_{N+1} - w_{N+1}|) + \max_{1\leq i\leq N}|\mathcal{L}_h v_j - \mathcal{L}_h w_j|\right\}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $h$ den bağımsız pozitif bir $K$ sabiti varsa bu taktirde $\mathcal{L}_h$ operatörü kararlıdır denir (Roos ve ark, 2008).

Teorem 3.3.1

Eğer $f_u \equiv \frac{\partial f}{\partial u}$ , $Ix(-\infty, \infty)$ üzerinde sürekli ve $0 < q * \leq f_u$ şartını sağlıyorsa bu taktirde $K = \max(1, \frac{1}{q*})$ olmak üzere (3.5) fark problemi kararlıdır (Roos ve ark, 2008).

İspat: Şebeke fonksiyonları $\{v_j\}$ ve $\{w_j\}$ için

$$\mathcal{L}_h v_j - \mathcal{L}_h w_j = -(v_{\bar{x}x,j} - w_{\bar{x}x,j}) + f(x_j, v_j) - f(x_j, w_j)$$

ortalama değer teoreminden $\vartheta_j$, $v_j$ ile $w_j$ arasında bir değer olmak üzere

$$\mathcal{L}_h v_j - \mathcal{L}_h w_j = -(v_{\bar{x}x,j} - w_{\bar{x}x,j}) + f_u(x_j, \vartheta_j)(v_j - w_j)$$

bulunur.

$$v_{\bar{x}x,j} \equiv \frac{v(x_{j+1}) - 2v(x_j) + v(x_{j-1})}{h^2} = \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2}$$

$$w_{\bar{x}x,j} \equiv \frac{w(x_{j+1}) - 2w(x_j) + w(x_{j-1})}{h^2} = \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2}$$

ifadeleri denklemde yerine yazılır ve $c_j = e_j = -1 \; ve \; d_j = 2 + h^2 f_u(x_j, \vartheta_j)$ notasyonları kullanılırsa o zaman

$$h^2[\mathcal{L}_h v_j - \mathcal{L}_h w_j] = c_j[v_{j-1} - w_{j-1}] + d_j[v_j - w_j] + e_j[v_{j+1} - w_{j+1}]$$

elde edilir. Buradan

$$|c_j| + |e_j| = 2 < |d_j|$$

olduğu görülür. İspatın devamı kararlılık teoreminin ispatındakine benzer yapılır. $\mathcal{L}_h$ın kararlığından aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

i) (3.5) ile tanımlı fark probleminin $\{u_j\}$ yaklaşık çözümü varsa tektir.

ii) (3.4) nin çözümü $u$ ve (3.5) in çözümü $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ arasında, üstteki teoremin kabülleri altında $u \in C^4(I)$ şartıyla

iii)

$$|u_j - u(x_j)| \leq \frac{h^2}{12} K \max_{x \in I} |u^{(4)}(x)|, \quad j = 1,2, \dots, N+1,$$

bağıntısı vardır (Isaacson ve Keller, 1994).

### 3.4. Kovma Metodu (Thomas Algoritması)

Metod genel olarak üçlü köşegene sahip

$$Dx = f$$

biçimindeki lineer denklem sistemlerinin çözümünü bulmada kullanılır. Katsayı matrisi olan $D$ matrisinin esas köşegeni ve ona komşu olan iki köşegeni dışındaki diğer tüm elemanları sıfırdan oluşur. Böyle sistemler

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = 1,2,\dots,N-1 \tag{3.6}$$

$$y_0 = A, \qquad y_N = B, \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilirler. Sisteme uyan kare matris $N-1$ boyutlu olacaktır. Metodun işlem formüllerini bulmak için sistemin çözümünü

$$y_i = W_i y_{i+1} + T_i \ , \ \ i = 0,1,2,\dots,N-1 \tag{3.8}$$

formunda arayalım. Burada $W_i = W(x_i)$ ve $T_i = T(x_i)$ bulunması gereken değerlerdir. (3.8) denkleminden

$$y_{i-1} = W_{i-1} y_i + T_{i-1} \tag{3.9}$$

bulunur. (3.9) denklemi (3.6 denkleminde kullanılır ve gerekli düzeltmeler yapılırsa

$$y_i = \left[\frac{B_i}{C_i - A_i W_{i-1}}\right] y_{i+1} + \frac{A_i T_{i-1} + F_i}{C_i - A_i W_{i-1}} \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.6) ve (3.10) karşılaştırılırsa

$$W_i = \frac{B_i}{C_i - A_i W_{i-1}}, \ T_i = \frac{A_i T_{i-1} + F_i}{C_i - A_i W_{i-1}} \tag{3.11}$$

rekürans bağıntıları bulunur. Bu rekürans bağıntılarını çözmek için $W_0$ ve $T_0$ başlangıç değerlerine ihtiyaç vardır. Verilen sınır şartlarından $W_0 = 0$ seçilirse $T_0 = y_0$ bulunur. Bu başlangıç şartları kullanılarak $i = 1,2,\dots,N-1$ değerleri için $W_i$ ve $T_i$ değerleri hesaplanabilir. $W_i$ ve $T_i$ nin bu değerleri (3.8) denkleminde kullanılarak da $i = 1,2,\dots,N-1$ için $y_i$ değerleri elde edilir. Bu algoritmanın uygulanabilmesi için (3.11) denklemlerindeki $C_i - A_i W_{i-1}$ ifadesinin sıfırdan farklı olması gerektiği açıktır. Bu ise

$$A_i \neq 0,\ B_i \neq 0,\ |C_i| \geq\ |A_i| + |B_i|, \quad i = 1,2, \dots, N-1,$$

olmasını gerektirir. Maksimum prensibi tanımı gereği

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ \text{ve}\ \ C_i - A_i - B_i \geq 0$$

koşullarının sağlanması halinde kovma süreci kararlı olmaktadır Kovma metodu literatürde fark invaryant imbedding algoritması ve Thomas algoritması olarak da adlandırılmaktadır (Amirali ve Amirali, 2018).

# 4. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ

Bu bölümde singüler pertürbe özellikli lineer reaksiyon-difüzyon sınır değer problemi ele alınmıştır. İlkönce problemin çözümünün bazı özellikleri verilmiş, daha sonra pertürbe teorisinden faydalanarak hesaplanmış üstel katsayılı fark problemi elde edilmiştir. Bu problemin çözümü için Numerov metoduna dayalı klasik fark şeması ve üstel katsayılı fark şeması elde edilmiştir. Daha sonra şemanın çözümünün, kararlılığı ve yakınsaklığı incelenmiştir. Teorik çalışma literatür örneği ile desteklenmiştir.

Şimdi, mühendisliğin birçok dalında model olarak kullanılan singüler pertürbe özellikli lineer reaksiyon-difüzyon

$$Lu := -\varepsilon u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{4.1}$$

$$u(0) = A, \qquad u(l) = B, \tag{4.2}$$

problemini ele alalım. Burada $\epsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$ olacak şekilde bir pertürbasyon parametresi, $a \ ve \ f$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığında yeterince düzgün fonksiyonlar öyle ki $a(x) \geq \alpha > 0$ dır. Ayrıca $(4.1) - (4.2)$ problemi $x = 0, \ x = l$ noktalarında sınır katmanına sahiptir (Phaneendra ve ark., 2010; Miller ve ark., 2012).

Problemin nümerik çözümüne geçmeden önce analitik çözümünün bazı özelliklerini tanıtalım. Bunun için aşağıda verilen Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.2 lemmaları ispatlarıyla birlikte Amirali ve Amirali (2018) kaynağında yer almaktadır.

## 4.1. Sürekli Problemin Bazı Özellikleri

Lemma 4.1.1 Herhangi bir $v(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$ fonksiyonu için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir.

$$|v(x)| \leq |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq x \leq l} |Lv(x)|, \qquad 0 \leq x \leq l. \tag{4.3}$$

İspat:

$$\Psi(\mathrm{x}) = \pm v(\mathrm{x}) + |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1}\,{}_{0\le x\le l}^{max}|Lv(x)|, \qquad 0 \le x \le l. \tag{4.4}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda

$$\Psi(0) \ge 0,\ \Psi(\mathrm{l}) \ge 0 \tag{4.5}$$

ve

$$\mathrm{L}\Psi(\mathrm{x}) \ge 0 \tag{4.6}$$

sağlanır. Maksimum prensibinden $\Psi(\mathrm{x}) \ge 0$ olacağından (4.3) ün ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 4.1.2 $a(x), f(x)$ verilen yeterince düzgün fonksiyonlar ve $u(x)$ de $(4.1)-(4.2)$ probleminin tam çözümü olsun. O zaman aşağıdaki değerlendirmeler geçerlidir.

$$\|u(x)\|_\infty \le C, \quad 0 \le x \le l \tag{4.7}$$

$$|u'(x)| \le \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)\right\}, \qquad 0 \le x \le l; \tag{4.8}$$

İspat: Lemma 4.1.1, $(4.1)-(4.2)$ problemine uygulanırsa

$$|u(x)| \le |A| + |B| + \alpha^{-1}\max_{0\le x\le l}|f(x)|$$

bulunur. Bu ise bize (4.7) eşitsizliğini verir. (4.8) eşitsizliğini ispat etmek için (4.1) denkleminin türevini alalım. Buradan

$$Lv(x) = \varphi(x) \tag{4.9}$$

$$v(0) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \qquad v(l) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{4.10}$$

bulunur. Burada

$$v(x) = u'(x), \qquad \varphi(x) = f'(x) - a'(x)u(x) \tag{4.11}$$

dır.

$(4.9)-(4.10)$ probleminin çözümü

$$v(x)=v_0(x)+v_1(x) \tag{4.12}$$

biçiminde düşünülecek olunursa bu takdirde $v_0(x)$ ve $v_1(x)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümü olurlar.

$$\begin{cases} Lv_0=\varphi(x), \ \ 0<x<l \\ v_0(0)=v_0(l)=0, \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} Lv_1=0, \ \ 0<x<l \\ v_1(0)=O\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right), \qquad v_1(l)=O\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right). \end{cases} \tag{4.14}$$

(4.13) probleminin çözümü için Lemma 4.1.1 den

$$|v_0(x)|\le \alpha^{-1}\max_{0\le s\le l}|\varphi(s)|$$

ve dolayısıyla

$$|v_0(x)|\le C, \qquad 0\le x\le l \tag{4.15}$$

bulunur. Maksimum prensibini (4.14) problemine uygularsak,

$$|v_1(x)|\le w(x) \tag{4.16}$$

bulunur. $w(x)$ ise

$$\begin{cases} -\varepsilon w''+\alpha w'=0, \ \ 0<x<l \\ \ \ w(0)=|v_1(0)|, \qquad w(l)=|v_1(l)| \end{cases} \tag{4.17}$$

probleminin çözümüdür. Problemin çözümü

$$w(x)=\frac{1}{\sinh\left(\sqrt{\alpha}l/\sqrt{\varepsilon}\right)}\left\{|v_1(0)|\sinh\left(\sqrt{\alpha}(l-x)/\sqrt{\varepsilon}\right)+|v_1(l)|\sinh\left(\sqrt{\alpha}x/\sqrt{\varepsilon}\right)\right\} \tag{4.18}$$

formundadır. Burada

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse

$$\frac{\sinh\left(\sqrt{\alpha}(l-x)/\sqrt{\varepsilon}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\alpha}l/\sqrt{\varepsilon}\right)} = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l-x)} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l-x)}}{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)}} = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)}\left(\frac{1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(2l-x)}}{1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(2l)}}\right) \le e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)}$$

ve

$$\frac{\sinh\left(\sqrt{\alpha}(x)/\sqrt{\varepsilon}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\alpha}(l)/\sqrt{\varepsilon}\right)} = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(x)} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(x)}}{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)}} = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l-x)}\left(\frac{1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(2x)}}{1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(2l)}}\right) \le e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l-x)}$$

eşitsizlikleri sağlanır ve

(4.14) ten

$$|v_1(0)| \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad |v_1(l)| \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$$

olduğu göz önüne alınırsa kolaylıkla

$$w(x) \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}}\right) \tag{4.19}$$

bulunur. O zaman $(4.15) - (4.16)$ ve $(4.19)$ eşitsizlikleri

$$|u'(x)| \le |v_0(x)| + |v_1(x)|$$

eşitsizliğinde birleştirilirse bu eşitsizlikten istenen $(4.8)$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

## 4.2. Şebekenin Oluşturulması

### 4.2.1. Üstel katsayılı fark şeması

Bu kesimde $(4.1)-(4.2)$ probleminin çözümü için düzgün bir şebeke üzerinde kurulu üstel katsayı çarpanına sahip bir nümerik şema oluşturacağız. $w_h$, $[0,l]$ aralığı üzerindeki düzgün şebekeyi göstersin.

$$w_h=\{x_i=ih,\ \ i=1,2,\dots,N-1,\qquad h=l/N\},\qquad \overline{w}_h=w_h\cup\{x=0,l\}.$$

Notasyonu kolaylaştırmak için herhangi bir $w(x)$ fonksiyonu için $w_i=w(x_i)$ alalım. Üstelik $w_i$ de $u(x)$ in $x_i$ noktasındaki bir yaklaşımını göstersin. $\overline{w}_N$ üzerinde tanımlı herhangi bir şebeke fonksiyonu $w_i$ için

$$w_{\bar{x},i}=\frac{w_i-w_{i-1}}{h},\qquad w_{x,i}=\frac{w_{i+1}-w_i}{h},\quad w_{\bar{x}x,i}=\frac{w_{x,i}-w_{\bar{x},i}}{h},$$

fark türevlerini kullanacağız ve norm ise

$$\|w\|_{C(\overline{w}_h)}=\max_{1\le i\le N}|w_i|$$

şeklinde tanımlıdır. (4.1) in üstel katsayılı fark yaklaşımını bulmak için Amirali ve Amirali (2018) de verilen aşağıdaki bağıntı ve baz fonksiyonları ile tanımlamaları kullanacağız.

$$\chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}Lu(x)\varphi_i(x)dx=\chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}f(x)\varphi_i(x)dx,\ \ i=1,2,\dots,N-1,\quad (4.20)$$

Burada üstel taban fonksiyonları

$$\chi_i=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)dx=\frac{2\tanh(\gamma_i h/2)}{\gamma_i h},\ \ \gamma_i=\sqrt{\frac{a(x_i)}{\varepsilon}}$$

olmak üzere

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)} \equiv \dfrac{sinh_{\gamma_i}(x - x_{i-1})}{sinh_{\gamma_i} h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i^{(2)} \equiv \dfrac{sinh_{\gamma_i}(x_{i+1} - x)}{sinh_{\gamma_i} h}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 \quad , \qquad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

şeklindedir. Hemen belirtelim ki $\varphi_i^{(1)}$ ve $\varphi_i^{(2)}$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir.

$$\begin{cases} -\varepsilon\varphi''(x) + a_i\varphi(x) = 0, \;\; x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi(x_{i-1}) = 0, \;\; \varphi(x_i) = 1 \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon\varphi''(x) + a_i\varphi(x) = 0, \;\; x_i < x < x_{i+1} \\ \varphi(x_i) = 1, \quad \varphi(x_{i+1}) = 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

(4.20) bağıntısı, Amirali ve Amirali (2018) deki yaklaşımlar yardımıyla

$$\chi_i^{-1}\varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)u_i'(x)dx + \\ +\chi_i^{-1}a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x)\varphi_i(x)dx \; = f_i - \; R_i, i = 1, \dots, N-1, \tag{4.23}$$

formunda yazılabilir öyle ki

$$R_i = \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)]u(x)\varphi_i(x)dx + \\ +\chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)]\varphi_i(x)dx \tag{4.24}$$

şeklindedir. $(x_{i-1}, x_i)$ ve $(x_i, x_{i+1})$ aralığının her biri üzerinde quadratür formülleri Amirali ve Amirali (2018) kullanılırsa (4.23) ün sol tarafı için

$$\chi_i^{-1}\varepsilon h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i'(x)u_i'(x)dx+\chi_i^{-1}a_ih^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}u(x)\varphi_i(x)dx$$

$$=-\varepsilon\chi_i^{-1}\left\{1+a_i\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)}(x)(x-x_i)dx\right\}u_{\bar{x}x,i}$$

$$+a_i\chi_i^{-1}\left\{h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)}(x)dx+\int_{x_i}^{x_{i+i}}\varphi_i^{(2)}(x)dx\right\}u_i$$

$$=-\varepsilon\theta_iu_{\bar{x}x,i}+a_iu_i \tag{4.25}$$

bulunur. Burada

$$\theta_i=\chi_i^{-1}\left\{1+a_i\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)}(x)(x-x_i)dx\right\}\equiv\chi_i^{-1}\left\{1-a_i\varepsilon^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)}(x)(x-x_i)dx\right\}$$

dır. Basit hesaplamalardan sonra üstel katsayılı çarpan için

$$\theta_i=\frac{a_i\rho^2}{4sinh^2(\sqrt{a_i}.\frac{\rho}{2})},\ \ \rho=\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}$$

bulunur. Buradan hareketle (4.1) denklemi için

$$ly_i\equiv-\varepsilon\theta_iy_{\bar{x}x,i}+a_iy_i=f_i-R_i,\qquad i=1,2,\dots,N-1 \tag{4.26}$$

bağıntısı elde edilir. Eğer denklemdeki $R_i$ ihmal edilirse $(4.1)-(4.2)$ problemine karşılık kullanacağımız üstel katsayılı fark şeması

$$\begin{cases} ly_i\equiv-\varepsilon\theta_iy_{\bar{x}x,i}+a_iy_i=f_i, & i=1,2,\dots,N-1\\ y_0=A, \qquad y_N=B \end{cases} \tag{4.27}$$

elde edilir.

### 4.2.2. Üstel katsayılı çarpanın bulunması için bir başka yöntem

Singüler pertürbe özellikli lineer reaksiyon-difüzyon denklemi olan (4.1) denkleminin $-\varepsilon u''(x)+a(x)u(x)=0$ şeklindeki homojen kısmını göz önüne alalım. Bunun için

$$L_\varepsilon^N = -\varepsilon\theta\delta^2 + I$$

operatörünü tanımlayalım. Homojen denklemin çözümü

$$ae^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + be^{\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

formundadır. Dolayısıyla

$$L_\varepsilon^N\left(e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}\right) = 0$$

sağlanır. $x$ in bir $(x_{i-1}, x_{i+1})$ aralığında $L_\varepsilon^N$ operatörü uygulanırsa

$$-\varepsilon\theta\left(\frac{e^{\frac{-x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} - 2e^{\frac{-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{-x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}}}{h^2} + \frac{e^{\frac{x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} - 2e^{\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}}}{h^2}\right) = -(e^{\frac{-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}})$$

olur. $\rho = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}$ alınırsa denklem

$$\frac{\theta}{\rho^2} = \frac{e^{\frac{-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}}}{(e^{\frac{-x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} - 2e^{\frac{-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{-x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}}) + (e^{\frac{x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} - 2e^{\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}})}$$

Paydadaki birinci toplam $e^{\frac{-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}}$, ikinci toplam da $e^{\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}}$ parantezine alınır;

$$h = (x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i) \qquad \text{ve} \qquad (x_{i-1} - x_i) = (x_i - x_{i+1}) = -h$$

değerleri yerine yazılırsa

$$\theta = \frac{\rho^2(e^{\frac{-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}})}{(e^{\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}} - 2 + e^{\frac{-h}{\sqrt{\varepsilon}}})\ e^{\frac{-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + (e^{\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}} - 2 + e^{\frac{-h}{\sqrt{\varepsilon}}})\ e^{\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}}}$$

olur. Payda ortak paranteze alınırsa

$$\theta = \frac{\rho^2}{e^{\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{-h}{\sqrt{\varepsilon}}} - 2}$$

elde edilir. Bu ise

$$\theta = \frac{\rho^2}{2\frac{e^{\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{-h}{\sqrt{\varepsilon}}}}{2} - 2} = \frac{\rho^2}{2cosh\rho - 2} = \frac{\rho^2}{2(cosh\rho - 1)}$$

$$cosh\rho = 2sinh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) + 1$$

olduğundan, sonuçta üstel katsayılı çarpan için bir formül

$$\theta = \left(\frac{\rho/2}{\sinh(\rho/2)}\right)^2$$

olarak bulunur.

### 4.2.3. Numerov Şeması

Numerov metodu ilk defa B.V. Noumerov tarafından (Noumerov, 1924) çalışmasında, gezegenlerin pertürbe hareketinin etkisini iyileştirmek amacıyla kullanılmıştır. Bu kesimde $(4.1) - (4.2)$ problemi için Numerov metoduna dayalı fark şemasını elde edeceğiz. İlk önce Taylor serisinden Numerov metodunda kullanacağımız bağıntıyı yazalım.

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{1}{2!}h^2y_i'' + \frac{1}{3!}h^3y_i''' + \frac{1}{4!}h^4y_i^{(4)} + \frac{1}{5!}h^5y_i^{(5)} + O(h^6)$$

$$y_{i-1} = y_i - hy_i' + \frac{1}{2!}h^2y_i'' - \frac{1}{3!}h^3y_i''' + \frac{1}{4!}h^4y_i^{(4)} - \frac{1}{5!}h^5y_i^{(5)} + O(h^6)$$

yazılabileceğinden iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 y_i'' + \frac{1}{12} h^4 y_i^{(4)} + O(h^6)$$

yazılabilir. Her iki tarafı $h^2$ ye bölersek

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = y_i'' + \frac{1}{12} h^2 y_i'''' + O(h^4)$$

elde edilir. Hata terimi atılır, $y_i''$ ve $y_i^{(4)}$ terimleri yerine de ilgili karşılıkları yazılırsa $(4.1) - (4.2)$ problemi için, önceki bölümde tanımlanan düzgün şebeke üzerindeki Numerov metoduna dayalı

$$\varepsilon \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{12}(a_{i-1}y_{i-1} + 10a_i y_i + a_{i+1}y_{i+1} - f_{i-1} - 10f_i - f_{i+1}) \qquad (4.28)$$

rekürans bağıntısı bulunur. Gerekli düzenleme yapılırsa

$$\left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{a_{i-1}}{12}\right) y_{i-1} - \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{10a_i}{12}\right) y_i + \left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{a_{i+1}}{12}\right) y_{i+1} = -\frac{1}{12}(f_{i-1} + 10f_i + f_{i+1}),$$
$$i = 1,2, \dots, N-1 \qquad (4.29)$$

elde edilir. Bu ise

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{a_{i-1}}{12}, \qquad C_i = \frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{10a_i}{12}, \qquad B_i = \frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{a_{i+1}}{12},$$
$$F_i = \frac{1}{12}(f_{i-1} + 10f_i + f_{i+1})$$

kısaltmaları ile

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = 1,2, \dots, N-1 \qquad (4.30)$$

üçlü band (tridiagonal) sistemi olduğu görülür.

$$A_i > 0, \qquad B_i > 0, \qquad C_i - A_i - B_i > 0 \qquad (4.31)$$

olduğundan Amirali ve Amirali (2018) den sistemin bir çözüme sahip olduğu bilinmektedir. Bu sistem kovma metodu (Thomas algoritması) ile çözülebilir.

### 4.2.4. Üstel katsayılı Numerov şeması

Üstel katsayılı çarpan $\theta_i$ , Numerov metoduna dayalı $(4.28)$ rekurans bağıntısında işleme konursa şema

$$\varepsilon\theta_i \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} - \frac{1}{12}(a_{i-1}y_{i-1} + 10a_i y_i + a_{i+1}y_{i+1}) =$$

$$= -\frac{1}{12}(f_{i-1} + 10f_i + f_{i+1}), \quad i = 1,2,\dots,N-1, \tag{4.32}$$

halini alır. Gerekli düzenleme yapılırsa problemin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanacağımız

$$\left(\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2} - \frac{a_{i-1}}{12}\right)y_{i-1} - \left(\frac{2\varepsilon\theta_i}{h^2} + \frac{10a_i}{12}\right)y_i + \left(\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2} - \frac{a_{i+1}}{12}\right)y_{i+1} =$$

$$= -\frac{1}{12}(f_{i-1} + 10f_i + f_{i+1}), \qquad i = 1,2,\dots,N-1 \tag{4.33}$$

Üstel katsayılı Numerov şemasını elde ederiz. Yukarıda yapılan işlemlere benzer olarak

$$A_i = \frac{\varepsilon\theta_i}{h^2} - \frac{a_{i-1}}{12}, \qquad C_i = \frac{2\varepsilon\theta_i}{h^2} + \frac{10a_i}{12}, \qquad B_i = \frac{\varepsilon\theta_i}{h^2} - \frac{a_{i+1}}{12},$$

$$F_i = \frac{1}{12}(f_{i-1} + 10f_i + f_{i+1})$$

alınırsa

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = 1,2,\dots,N-1 \tag{4.34}$$

katsayı farkı ile benzer üçlü band (tridiagonal) sistemi elde edilir. Katsayılar aynı şartlara sahiptir ve bu yüzden çözümü aynı metodla bulunabilir.

## 4.3. Yakınsaklık Analizi

$$\begin{cases} ly_i \equiv -\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i = f_i, \ i = 1,2,\dots,N-1 \\ y_0 = A, \ y_N = B \end{cases} \tag{4.35}$$

fark şeması (4.1) denkleminin yaklaşık çözümü için önerilen üstel katsayı çarpanlı bir şemadır. $u_i$, (4.1)probleminin $x_i$ noktasındaki çözümü ve $y_i$ de (4.35) in çözümü olmak üzere $0 \le i \le N$ için $z_i = y_i - u_i$ olsun. Amacımız

$$lz_i = R_i \,;\ z_0 = z_N = 0 \tag{4.36}$$

problemini sağlayan $z_i$ yaklaşım hatasını hesaplamaktır. Burada $R_i$ (4.26) ile verilen ve (4.24) ile ifade edilen kesim hatasıdır.

Burada her ne kadar Numerov metoduna dayalı üstel katsayılı fark şeması verilse de benzerliği göz önünde bulundurularak hata analizi için Amirali ve Amirali (2018) kaynağında ispatı ile birlikte yer alan aşağıdaki iki teoremi ve ispatını verelim.

Teorem 4.3.1 $a(x), f(x) \in C^1[0,l]$ olsun. $u_i$, $(4.1)-(4.2)$ probleminin çözümü ve $y_i$ de (4.35) in çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\|y-u\|_{C(\overline{w}_h)} \le Ch \tag{4.37}$$

İspat. Fark maksimum prensibi (4.36) problemine uygulanırsa

$$\|z\|_{C(\overline{w}_h)} \le \alpha^{-1}\|R\|_{C(\overline{w}_h)} \tag{4.38}$$

elde edilir. (4.24) ten

$$|R_i| \le Ch, \qquad i = 1,2,\dots,N-1$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.3.2 $a(x), f(x) \in C^2[0,l]$ ve $a'(0) = a'(l) = 0$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\|y-u\|_{C(\overline{w}_h)} \leq Ch^2 \tag{4.39}$$

İspat. Hatayı $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$ formunda yazarsak $R_i^{(1)}$ve $R_i^{(2)}$ sırasıyla

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)]\, u(x)\varphi_i(x)dx \tag{4.40}$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)]\, \varphi_i(x)dx \tag{4.41}$$

biçiminde olur.

(4.41) in

$$\left|R_i^{(2)}\right| = O(h^2), \quad i = 1,2,\dots,N-1 \tag{4.42}$$

eşitsizliğini sağladığını gösterelim.

(4.41) denkleminde

$$f(x) - f(x_i) = (x - x_i)f'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2} f''(\xi_i), \qquad \xi_i \in (x_i, x)$$

ve

$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)\, \varphi_i(x)dx = 0$ yaklaşımları kullanılırsa

$$R_i^{(2)} = -\chi_i^{-1} h^{-1} f'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)\, \varphi_i(x)dx$$

$$-\frac{1}{2}\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 f''\big(\xi_i(x)\big)\, \varphi_i(x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2 f''\big(\xi_i(x)\big)\,\varphi_i(x)dx$$

bulunur. O halde

$$\left|R_i^{(2)}\right| \le \frac{1}{2}\chi_i^{-1}h^{-1}h^2 \max_{[x_{i-1},x_{i+1}]}|f''(x)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)dx = \frac{h^2}{2}\max_{[x_{i-1},x_{i+1}]}|f''(x)|$$

bulunur ki buradan istenen sonuç elde edilir. Şimdi de (4.40) yaklaşımının

$$\left|R_i^{(1)}\right| = O(h^2),\ \ i = 1,2,\dots,N-1 \qquad (4.43)$$

eşitsizliğini sağladığını gösterelim. Aşağıdaki

$$a(x) - a(x_i) = (x-x_i)a'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}a''(\xi_i), \qquad \xi_i \in (x_i, x)$$

ve

$$u(x) = u(x_i) + (x-x_i)u'(\eta_i), \qquad \eta_i \in (x_i, x)$$

yaklaşımlarını kullanırsak

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[a(x)-a(x_i)]\,u(x)\varphi_i(x)dx$$

$$= \chi_i^{-1}h^{-1}a'(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)u(x)\,\varphi_i(x)dx$$

$$+\frac{1}{2}\chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2 a''\big(\xi_i(x)\big)u(x)\,\varphi_i(x)dx$$

$$= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) u(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)\, \varphi_i(x) dx$$

$$+ \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 u'\big(\eta_i(x)\big)\, \varphi_i(x) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''\big(\xi_i(x)\big) u(x)\, \varphi_i(x) dx$$

$$= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 u'\big(\eta_i(x)\big)\, \varphi_i(x) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''\big(\xi_i(x)\big) u(x)\, \varphi_i(x) dx. \qquad (4.44)$$

olur.

$$\|a''(x)\|_{C[0,l]} \le C, \qquad \|u\|_{C[0,l]} \le C \; ve \; |x - x_i|^2 \le h^2$$

olduğundan (4.44) nin ikinci terimi için

$$\left| \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''\big(\xi_i(x)\big) u(x)\, \varphi_i(x) dx \right| \le C h^2, \quad i = 1,2, \dots, N-1. \quad (4.45)$$

bulunur. (4.44) nin ilk terimi için Lemma 4.1.2 den

$$|u'(\eta_i)| \le C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\eta_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\eta_i)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\}$$

$$\le C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\}, \quad i = 2,3, \dots, N-2.$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik (4.44) ün ilk teriminde yerine yazılırsa

$$\left|\chi_i^{-1}h^{-1}a'(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2u'\big(\eta_i(x)\big)\,\varphi_i(x)dx\right| \leq$$

$$\leq C\chi_i^{-1}h^{-1}|a'(x_i)|\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2\,\varphi_i(x)dx +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}C\chi_i^{-1}h^{-1}|a'(x_i)|\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2\,\varphi_i(x)e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}}dx$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}C\chi_i^{-1}h^{-1}|a'(x_i)|\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2\,\varphi_i(x)e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\sqrt{\varepsilon}}}dx \qquad (4.46)$$

yazılabilir. İlk terim için yaklaşımın $O(h^2)$ olduğu aşikardır. İkinci terime gelirsek,

$$a'(0)=0 \text{ ve } te^{-t}\leq e^{-\frac{t}{2}},\ (t\geq 0)$$

olduğundan

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}C\chi_i^{-1}h^{-1}|a'(x_i)|\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2\,\varphi_i(x)e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}}dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}C\chi_i^{-1}h^{-1}\big|a''\big(\bar{\xi}_i\big)\big|x_ie^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2\,\varphi_i(x)dx$$

$$\leq C_1h^2\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}}\leq C_1h^2\frac{x_i}{x_{i-1}}\frac{x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\leq C_1h^2\frac{i}{i-1}e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{2\sqrt{\varepsilon}}}\leq C_2h^2,\qquad i>1.$$

olduğu görülür.

(4.46) denkleminin üçüncü terimi için, $a'(l) = 0$ olduğundan $O(h^2)$ mertebesine sahip olduğunu gösterebiliriz. Böylece (4.43) yaklaşımı $i = 2,3, \dots, N-2$ için sağlanır.

Geriye kalan $i = 1$ değeri için, yaklaşımın sağlandığını şu şekilde gösterebiliriz. $i = N-1$ için de benzer şekilde gösterilebilir. Eğer

$$a(x) - a(x_1) = (x - x_1)a'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2}a''(\xi_1), \qquad \xi_1 \in (x_1, x)$$

ve

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'(\xi)d\xi$$

kullanırsak

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1}h^{-1}a'(x_1)\int_{x_0}^{x_2}(x - x_1)\left[\int_{x_0}^{x} u'(\xi)\,d\xi\right]\varphi_1(x)dx$$

$$+\frac{1}{2}\chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_0}^{x_2}(x - x_1)^2 a''\big(\xi_1(x)\big)u(x)\,\varphi_1(x)dx \qquad (4.47)$$

bulunur. (4.47) denkleminin ikinci terimi açıktır ki $O(h^2)$ formundadır. İlk teriminde $a'(0) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa Lemma 4.1.2 nin uygulanmasıyla

$$\left|\chi_i^{-1}h^{-1}a'(x_1)\int_{x_0}^{x_2}(x - x_1)\left[\int_{x_0}^{x} u'(\xi)\,d\xi\right]\varphi_1(x)dx\right|$$

$$\leq |a'(x_1)|h\int_{x_0}^{x_2}|u'(x)|dx \leq Cx_1h|a''(\bar{\eta}_1)|\int_{x_0}^{x_2}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)\right\}dx$$

$$\leq C_1h^2\left\{h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{x_0}^{x_2} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}}dx\right\} \leq C_1h^2\left\{h + \left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(1 - e^{-2\frac{\sqrt{\alpha}h}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)\right\} = O(h^2)$$

olur. Buradan

$$\left|R_1^{(1)}\right| = O(h^2), \ \left|R_{N-1}^{(1)}\right| = O(h^2)$$

yazılabilir. Böylece

$$\|R\|_{C(w_h)} \leq Ch^2$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

**4.4. Örnek Problem (**Phaneendra ve ark., 2010**)**

$$\begin{cases} \varepsilon u''(x) - u(x) = cos^2(\pi x) + 2\varepsilon\pi^2 \cos(2\pi x), \ x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.48}$$

problemini ele alalım. Bu problemin probleminin tam çözümü

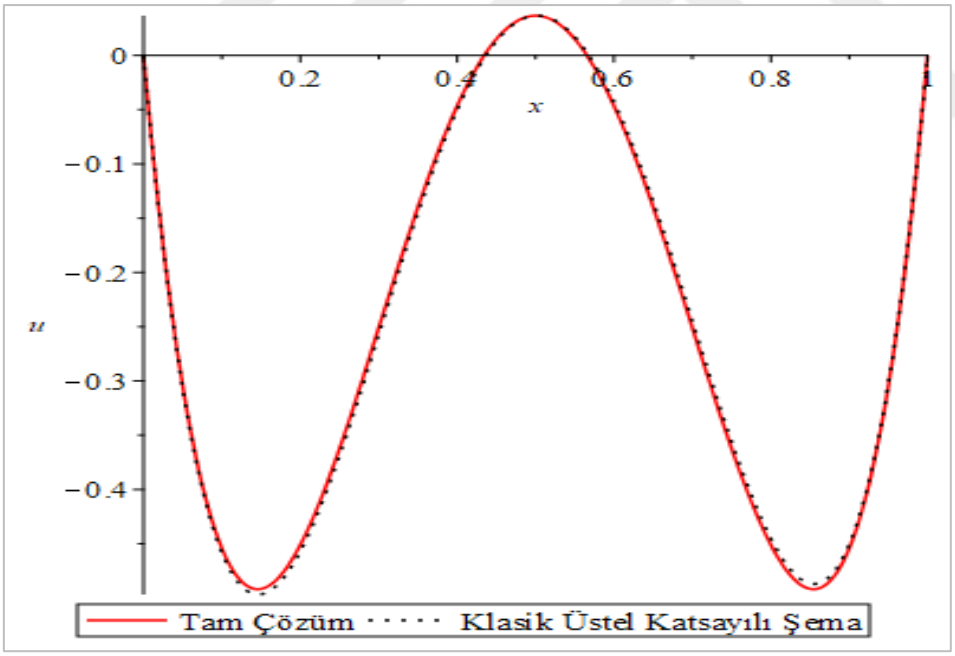
$$u(x) = \frac{e^{-\frac{(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}} - cos^2(\pi x)$$

şeklindedir.

Tam çözüm ile yaklaşık çözümün grafikleri sırasıyla klasik üstel katsayılı şema (Şeki1 4.1), klasik Numerov şeması (Şeki1 4.2) ve üstel katsayılı Numerov şeması (Şeki1 4.3)'te verilmiştir. Tam çözüm ile yaklaşık çözümünün farkının mutlak değerlerinin maksimumlarından oluşan klasik üstel katsayılı şema sonuçları Çizelge 4.1'de, klasik Numerov şeması sonuçları Çizelge4.4.2'de ve üstel katsayılı Numerov şeması sonuçları da Çizelge 4.3'te verilmiştir. Ayrıca önerilen şemanın sonuçları ile literatür sonuçları (Phaneendra ve ark., 2010) ortak tablolarla iki farklı $\varepsilon$ değeri için Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5'te verilmiştir.

Çizelge 4.1. Örnek 4.4'te üstel katsayılı klasik şema için mutlak hata değerleri ile yakınsaklık hızları

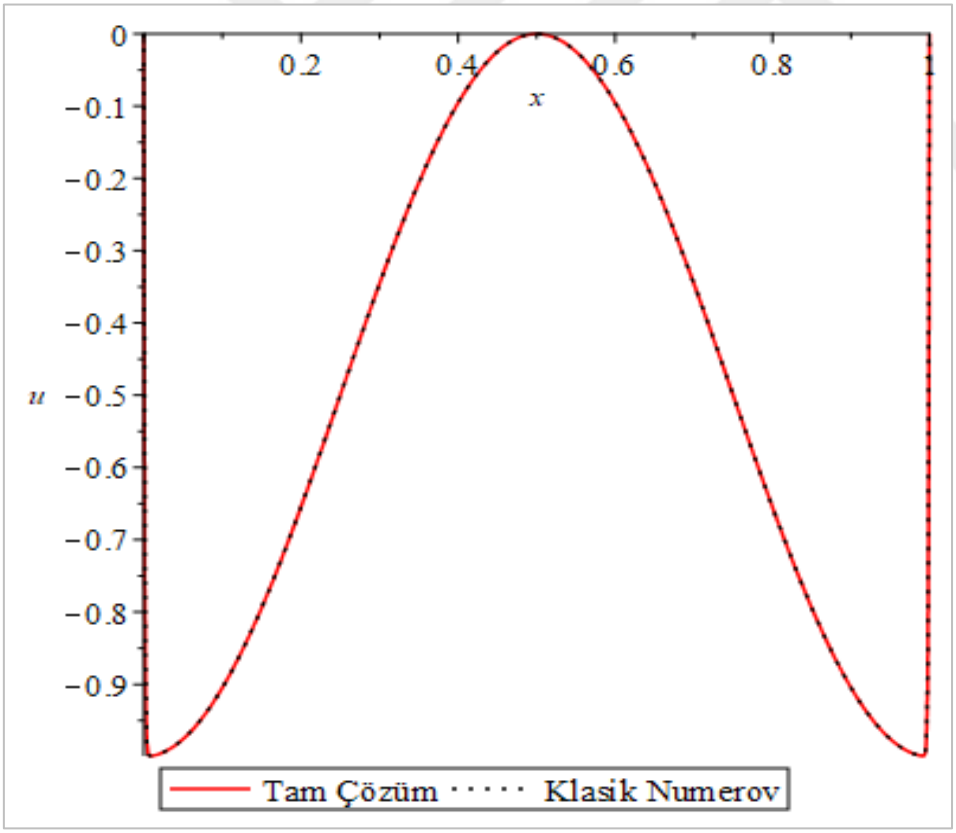
| $\varepsilon$ | $N=2^5$ | $N=2^6$ | $N=2^7$ | $N=2^8$ | $N=2^9$ | $P_\varepsilon^N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-5}$ | 1.7963e-3 | 4.4894e-4 | 1.1222e-4 | 2.8058e-5 | 6.9625e-6 | |
| | 2.000 | 2.000 | 2.000 | 2.011 | --------- | 2.011 |
| $2^{-6}$ | 1.6632e-3 | 4.1617e-4 | 1.0407e-4 | 2.6019e-5 | 6.51e-6 | |
| | 1.999 | 2.000 | 2.000 | 2.000 | --------- | 2.000 |
| $2^{-7}$ | 1.6106e-3 | 4.0396e-4 | 1.0107e-4 | 2.5237e-5 | 6.3287e-6 | |
| | 1.995 | 2.000 | 1.997 | 2.020 | --------- | 2.020 |
| $2^{-8}$ | 1.5906e-3 | 4.0080e-4 | 1.0040e-4 | 2.5114e-5 | 6.30e-6 | |
| | 1.989 | 1.997 | 1.999 | 1.996 | --------- | 1.999 |
| $2^{-9}$ | 1.57e-3 | 3.99e-4 | 1.00e-4 | 2.51e-5 | 6.2962e-6 | |
| | 1.975 | 1.994 | 1.998 | 2.001 | --------- | 2.001 |
| $P^N$ | 1.975 | 2.000 | 1.998 | 2.001 | --------- | --------- |




Şekil 4.1. $N$ =512 ve $\varepsilon = 2^{-6}$

Çizelge 4.2. Örnek 4.4'te Numerov şeması için mutlak hata değerleri ile yakınsaklık hızları

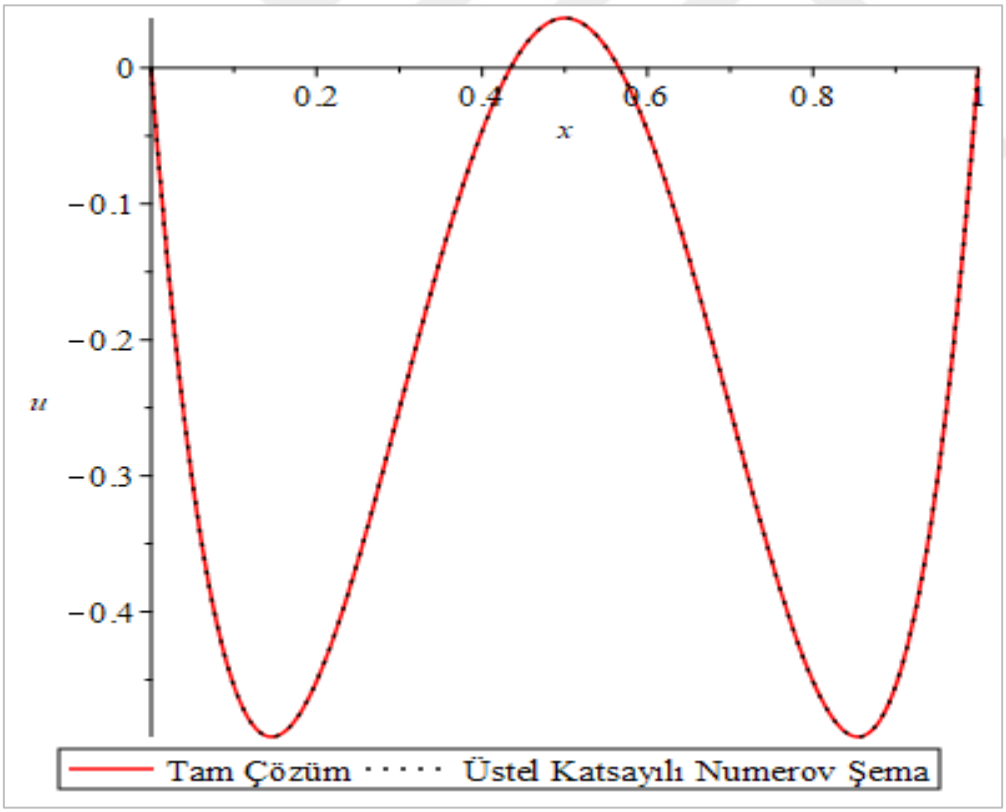
| $\varepsilon$ | $N=2^5$ | $N=2^6$ | $N=2^7$ | $N=2^8$ | $N=2^9$ | $P_\varepsilon^N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-5}$ | 1.7968e-3 | 4.4898e-4 | 1.1222e-4 | 2.8029e-5 | 6.9629e-6 | |
| | 2.001 | 2.000 | 2.001 | 2.009 | ------ | 2.009 |
| $2^{-6}$ | 1.6652e-3 | 4.1630e-4 | 1.0407e-4 | 2.5933e-5 | 6.4166e-6 | |
| | 2.000 | 2.000 | 2.005 | 2.015 | ------ | 2.015 |
| $2^{-7}$ | 1.6171e-3 | 4.0437e-4 | 1.0109e-4 | 2.5221e-5 | 6.2379e-6 | |
| | 2.000 | 2.000 | 2.003 | 2.016 | ------ | 2.016 |
| $2^{-8}$ | 1.6072e-3 | 4.0185e-4 | 1.0046e-4 | 2.5111e-5 | 6.2309e-6 | |
| | 2.000 | 2.000 | 2.000 | 2.011 | ------ | 2.011 |
| $2^{-9}$ | 1.6065e-3 | 4.0161e-4 | 1.0040e-4 | 2.5098e-5 | 6.2689e-6 | |
| | 2.000 | 2.000 | 2.000 | 2.001 | ------ | 2.001 |
| $P^N$ | 2.000 | 2.000 | 2.000 | 2.001 | | |




Şekil 4.2. $N$ =512 ve $\varepsilon = 2^{-6}$.

Çizelge 4.3. Örnek 4.4'te üstel katsayılı Numerov şeması için mutlak hata değerleri ile yakınsaklık hızları

| $\varepsilon$ | $N=2^5$ | $N=2^6$ | $N=2^7$ | $N=2^8$ | $N=2^9$ | $P_\varepsilon^N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-5}$ | 6.3655e-4 | 1.5889e-4 | 3.9772e-5 | 1.0043e-5 | 3.1694e-6 | |
| | 2.002 | 1.998 | 1.986 | 1.664 | ------- | 2.002 |
| $2^{-6}$ | 1.3114e-3 | 3.2893e-4 | 8.2233e-5 | 2.0781e-5 | 5.3661e-6 | |
| | 1.995 | 2.000 | 1.984 | 1.953 | ------- | 2.000 |
| $2^{-7}$ | 2.5202e-3 | 6.2813e-4 | 1.5695e-4 | 3.9483e-5 | 1.0146e-5 | |
| | 2.004 | 2.001 | 1.991 | 1.960 | ------- | 2.004 |
| $2^{-8}$ | 4.6455e-3 | 1.1539e-3 | 2.8832e-3 | 7.2178e-5 | 1.8420e-5 | |
| | 2.009 | 2.001 | 1.998 | 1.970 | ------- | 2.009 |
| $2^{-9}$ | 8.2953e-3 | 2.1497e-3 | 5.3567e-4 | 1.3385e-4 | 3.3702e-4 | |
| | 1.948 | 2.005 | 2.001 | 1.990 | ------- | 2.005 |
| $P^N$ | 1.948 | 2.005 | 2.001 | 1.990 | | |




Şekil 4.3. $N=512$ ve $\varepsilon = 2^{-6}$.

Çizelge 4.4. Örnek 4.4 sonuçlarının bir örnek literatür sonucuyla karşılaştırması (*N =100* ve $\varepsilon = 2^{-3}$ için)

| x değeri | Phaneendra ve ark.(2010) | Klasik Üstel Katsayılı Şema | Klasik Numerov Şema | Üstel Katsayılı Numerov Şema | Tam Çözüm |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| 0.01 | -0.2701197 | -0.2718704 | -0.2701247 | -0.2711283 | -0.2701120 |
| 0.02 | -0.4647713 | -0.4683285 | -0.4647787 | -0.4662516 | -0.4647717 |
| 0.05 | -0.7697869 | -0.7788789 | -0.7697944 | -0.7712647 | -0.7697876 |
| 0.10 | -0.8621783 | -0.880008 | -0.8621821 | -0.8628577 | -0.8621793 |
| 0.20 | -0.6527151 | -0.6823323 | -0.6527170 | -0.6528120 | -0.6527167 |
| 0.30 | -0.3454138 | -0.3755386 | -0.3454157 | -0.3453699 | -0.3454157 |
| 0.40 | -0.0954872 | -0.1146140 | -0.0954883 | -0.0953610 | -0.0954883 |
| 0.50 | -0.0000005 | -0.0082298 | 0.0000000 | 0.0015776 | 0.0000003 |
| 0.60 | -0.0954914 | -0.0776946 | -0.0954883 | -0.0953610 | -0.0954883 |
| 0.70 | -0.3454206 | -0.3158017 | -0.3454157 | -0.3453699 | -0.3454157 |
| 0.80 | -0.6527218 | -0.6225954 | -0.6527170 | -0.6528120 | -0.6527167 |
| 0.90 | -0.8621823 | -0.8430884 | -0.8621821 | -0.8628577 | -0.8621793 |
| 0.92 | -0.8584825 | -0.8426946 | -0.8584843 | -0.8594464 | -0.8584801 |
| 0.95 | -0.7697890 | -0.7594692 | -0.7697944 | -0.7712647 | -0.7697876 |
| 0.98 | -0.4647722 | -0.4604562 | -0.4647787 | -0.4662516 | -0.4647717 |
| 0.99 | -0.2701202 | -0.2679264 | -0.2701247 | -0.2711283 | -0.2701120 |
| 1.00 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 |

Çizelge 4.5. Örnek 4.4 sonuçlarının bir örnek literatür sonucuyla karşılaştırması (*N =100* ve $\varepsilon = 2^{-4}$ için)

| x değeri | Phaneendra ve ark.(2010) | Klasik Üstel Katsayılı Şema | Klasik Numerov Şema | Üstel Katsayılı Numerov Şema | Tam Çözüm |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| 0.01 | -0.6311290 | -0.6325826 | -0.6318753 | -0.6473048 | -0.6311339 |
| 0.02 | -0.8607154 | -0.8639468 | -0.8612670 | -0.8724230 | -0.8607221 |
| 0.05 | -0.9687830 | -0.9777109 | -0.9688579 | -0.9702864 | -0.9687903 |
| 0.10 | -0.9044564 | -0.9222508 | -0.9044640 | -0.9046057 | -0.9044631 |
| 0.20 | -0.6545048 | -0.6841199 | -0.6545085 | -0.6545567 | -0.6545085 |
| 0.30 | -0.3454919 | -0.3756161 | -0.3454915 | -0.3454433 | -0.3454915 |
| 0.40 | -0.0954962 | -0. 1146227 | -0.0954915 | -0.0953653 | -0.0954915 |
| 0.50 | -0.0000079 | -0.00830332 | 0.0000000 | 0.00156017 | 0.0000000 |
| 0.60 | -0.0955004 | -0.0777038 | -0.0954915 | -0.0953653 | -0.0954915 |
| 0.70 | -0.3454988 | -0.3158801 | -0.3454915 | -0.3454433 | -0.3454915 |
| 0.80 | -0.6545116 | -0.6243839 | -0.6545085 | -0.6545567 | -0.6545085 |
| 0.90 | -0.9044606 | -0.8853319 | -0.9044640 | -0.9046057 | -0.9044631 |
| 0.92 | -0.9378142 | -0.9219610 | -0.9378232 | -0.9380554 | -0.9378179 |
| 0.95 | -0.9687852 | -0.9583015 | -0.9688579 | -0.9702864 | -0.9687903 |
| 0.98 | -0.8607163 | -0.8560746 | -0.8612670 | -0.8724230 | -0.8607221 |
| 0.99 | -0.6311294 | -0.6286387 | -0.6318753 | -0.6473048 | -0.6311339 |
| 1.00 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 |

4.4 Örnek probleminin sonuçları Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3'e bakıldığında klasik üstel katsayılı şemanın sonuçlarında $\varepsilon$ değerinin küçülmesiyle maksimum hata miktarının arttığı görülmektedir. Ancak gerek Çizelge 4.2 ve gerekse Çizelge 4.3 sonuçlarından $\varepsilon$ değerinin küçülmesiyle hata payının nispeten daha az arttığı, bunun yanında artan $N$ değerlerine göre mutlak hata miktarının azaldığı görülmektedir. Önerilen şemaların 2.mertebeden bir yakınsama gösterdiği ayrıca yine 2. mertebeden bir düzgün yakınsama gösterdiği görülmektedir.

Örneğimizin literatür sonuçlarıyla karşılaştırıldığı Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5'e bakıldığında Phaneendra ve ark. (2010) çalışmasına benzer sonuçlar verdiği görülmektedir. Yine üstel katsayılı klasik şemaya göre daha iyi sonuç verdiği açıkça görülmektedir.

### 4.5. Shishkin Şebeke (Düzgün Parçalı Şebeke)

Şebeke $[0, l]$ aralığının üç parçaya bölünmesine dayanır. Bunun için $\sigma$ ya bağlı iki geçiş noktası kullanılır. $\sigma$ ve $(1-\sigma)$. Bu noktalar $x = 0$ ve $x = l$ sınır katmanlarında olur. Burada $\sigma$ , N bir çift tamsayı olmak üzere

$$\sigma = min\{1/4, \alpha^{-1}\varepsilon lnN\}$$

şeklinde tanımlanır. Amaç fark şemasının $\varepsilon$-düzgün yakınsak olmasını sağlamaktır. Böylece oluşan alt aralıklarımız $[0, \sigma]$, $[\sigma, l-\sigma]$, $[l-\sigma, l]$ biçiminde olur. Bunlardan $[0, \sigma]$ ve $[l-\sigma, l]$ deki aralıklar N/4 eşit uzaklıklı, $[\sigma, l-\sigma]$ deki aralıklar ise N/2 eşit uzaklığına sahiptir. $[0, \sigma]$, $[\sigma, l-\sigma]$, $[l-\sigma, l]$ alt aralıklarının adım uzunlukları sırasıyla

$$h^{(1)},\ h^{(2)},\qquad h^{(3)}$$

olup

$$h^{(1)} = \frac{4\sigma}{N},\ h^{(2)} = \frac{2(1-2\sigma)}{N},\qquad h^{(3)} = \frac{4\sigma}{N},$$

$$\frac{h^{(1)} + h^{(3)}}{2} = \frac{2}{N};\ h^{(1)} = h^{(3)} \le N^{-1};\ N^{-1} \le h^{(2)} \le 2N^{-1}$$

şeklinde tanımlanır.

$[0, l]$ aralığında $x_i$ düğüm noktaları ise

$$\bar{\omega}_N = \begin{Bmatrix} x_i = ih^{(1)}, i = 0, .., \frac{N}{4};\ x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{4}\right)h^{(2)}, i = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4}; \\ x_i = 1 - \sigma + \left(i - \frac{3N}{4}\right)h^{(3)}, i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N \end{Bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Miller ve ark. 2000).

### 4.5.1. Shishkin şebekede hata analizi

(4.36) fark problemini ele alalım. Bu problemin çözümü hata fonksiyonudur. Şimdi Shishkin şebekede bu fonksiyon için hata değerlendirmesi yapalım.

Lemma 4.5.1 $a(x), f(x) \in C^1[0, l]$ olsun. $u_i$, $(4.1) - (4.2)$ probleminin çözümü ve $y_i$ de $(4.35)$ in çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\|z\|_{C(\overline{w}_h)} \le C\|R\|_{C(\overline{w}_h)} \tag{4.49}$$

Burada $z_i = y_i - u_i$ ; $0 \le i \le N$ dir.

İspat. $(4.36)$ fark probleminin çözümünün

$$z(x) = z_1(x) + \lambda z_2(x) \tag{4.50}$$

formunda olduğunu farz edelim. Burada $z(l) = \lambda \in R$ olacak şekilde $z_1(x)$ ve $z_2(x)$ sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olsun.

$$lz_i = R_i\ ;\ z_1(0) = z_1(l) = 0\ ;\ \ i = 1,2, \dots, N-1 \tag{4.51}$$

$$lz_i = 0;\ z_2(0) = z_2(l) = 1\ ;\ \ i = 1,2, \dots, N-1 \tag{4.52}$$

Maksimum prensibini sırasıyla bu problemlere uygularsak

$$|z_1(x)| \le |z_1(0)| + |z_1(l)| + \alpha^{-1}|R|_\infty \le \alpha^{-1}\|R\|_\infty \le C\|\|R\|_\infty\|$$

$$|z_2(x)| \le |z_2(0)| + |z_2(l)| + \alpha^{-1}|0|_\infty \le 1$$

elde edilir. Bu sonuçların birleştirilmesi ispatı tamamlar.

Teorem 4.5.1 $a(x), f(x) \in C^2[0,l]$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\|R\|_{C(\overline{w}_h)} \leq Ch \tag{4.53}$$

İspat: (4.24) formundaki hatayı $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$ olacak şekilde (4.40) ve (4.41) biçiminde ifade etmiştik. İlk önce $R_i^{(1)}$ e ait olan (4.40) denklemini ele alalım. Ortalama değer teoreminden

$$|a(x) - a(x_i)| = |a'(\xi_i||x - x_i| \leq \max_{1\leq x\leq l}|a'(x)||x - x_i| \leq Ch^{(i)}$$

bulunur. Benzer şekilde $R_i^{(2)}$ e ait olan (4.41) denkleminden de

$$|f(x) - f(x_i)| = |f'(\xi_i||x - x_i| \leq \max_{1\leq x\leq l}|f'(x)||x - x_i| \leq Ch^{(i)}$$

bulunur. (4.7) sonucu bu iki sonuçla birleştirilirse

$$\|R_i\| \leq Ch^{(i)}$$

elde edilir. Bulunan $R_i$ sınırları $[0,\sigma]$, $[\sigma, l-\sigma]$, $[l-\sigma, l]$ alt aralıklarında ayrıca değerlendirilmelidir. $\sigma$ için iki değer söz konusudur. Ya $\sigma = 1/4$ ya da $\sigma = \alpha^{-1}\varepsilon lnN$ olacaktır. Öyleyse

$$h = max\{h^{(i)}\}, \qquad i = 1,2,3.$$

olmak üzere

i) $\sigma = \frac{1}{4}$ , $1 < i < N$ olsun. O zaman $h^{(i)} = h^{(1)} = \frac{4\sigma}{N} = \frac{1}{N} = h^{(2)} = h^{(3)}$ olacaktır. Dolayısıyla

$$\|R_i\| \leq CN^{-1} = Ch$$

olur.

ii) $\sigma = \alpha^{-1}\varepsilon lnN$ olsun. $h^{(i)}$ değişeceğinden her bir alt aralıkta değerlendirelim.

a) $[0, \sigma]$ alt aralığında;

$$\|R_i\| \leq C_1 h^{(1)} \leq \frac{4C_1\sigma}{N} = \frac{4C_1\alpha^{-1}\varepsilon lnN}{N} \leq C_1 N^{-1} lnN \leq Ch, \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{4} - 1$$

b) $[\sigma, l-\sigma]$ aralığında,

$$\|R_i\| \leq C_1 h^{(2)} \leq \frac{2C_1(1-2\sigma)}{N} =$$

$$= \frac{2C_1(1-2\alpha^{-1}\varepsilon lnN)}{N} \leq C_1 N^{-1} lnN \leq Ch,$$

$$\frac{N}{4} + 1 \leq i \leq \frac{3N}{4} - 1$$

c) $[l-\sigma, l]$ aralığında,

$$\|R_i\| \leq C_1 h^{(3)} \leq \frac{4C_1\sigma}{N} = \frac{4C_1\alpha^{-1}\varepsilon lnN}{N} \leq C_1 N^{-1} lnN \leq Ch, \frac{3N}{4} + 1 \leq i \leq N$$

Dışarda kalan $x_{N/4}$ ve $x_{3N/4}$ şebeke noktaları için de benzer bir şekilde,

$$\left|R_{N/4}\right| \leq C_1 h^{(i)} \leq Ch^{(1)} \leq \frac{4C_1\sigma}{N} \leq \frac{4C_1\alpha^{-1}\varepsilon lnN}{N} \leq C_1 N^{-1} lnN \leq Ch$$

$$\left|R_{3N/4}\right| \leq C_1 h^{(i)} \leq C_1 h^{(2)} \leq \frac{2C_1(1-2\sigma)}{N} \leq \frac{2C_1(1-2\alpha^{-1}\varepsilon lnN)}{N} \leq C_1 N^{-1} lnN \leq Ch$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.

## 4.6. Örnek Problem

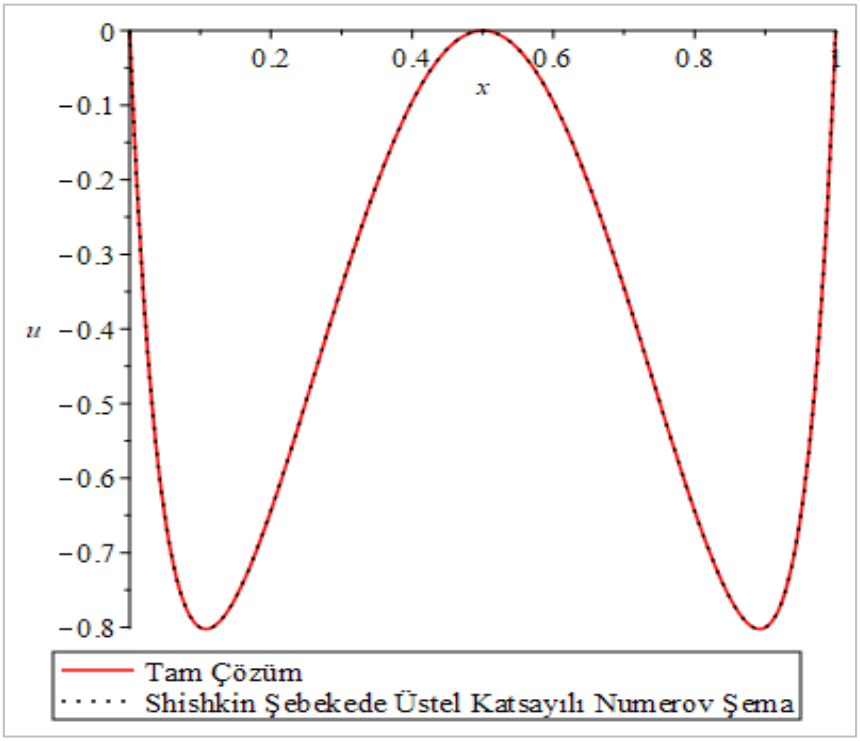
$$\begin{cases} \varepsilon u''(x) - u(x) = cos^2(\pi x) + 2\varepsilon\pi^2 \cos(2\pi x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(4.48) literatür örneğini tekrar ele alalım. Sınır değer probleminin Shishkin (parçalı düzgün) şebeke üzerindeki çözümün hatası aşağıdaki tabloda verilmiştir. Yine gerçek

çözüm ile yaklaşık çözümün grafiği birlikte verilmiştir (Şeki1 4.4). Çizelge 4.6'ya bakıldığında Shishkin şebeke üzerinde özellikle artan $N$ değerlerine göre daha iyi sonuçlar alındığı görülmektedir. Sunulan şemanın 2.mertebeden yakınsama gösterdiği görülmektedir. Burada $\alpha = 0.00046 + 64\varepsilon(\ln N)^2)$ alınmıştır.

Çizelge 4.6. Örnek 4.4 için Shishkin şebekede üstel katsayılı Numerov şemasının mutlak hata değerleri ve yakınsama hızları

| $\varepsilon$ | $N=2^5$ | $N=2^6$ | $N=2^7$ | $N=2^8$ | $N=2^9$ | $P_\varepsilon^N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-5}$ | 6.3488e-4 | 1.5767e-4 | 3.8815e-5 | 9.3852e-6 | 2.0848e-6 | |
| | 2.001 | 2.022 | 2.048 | 2.171 | --------- | 2.171 |
| $2^{-6}$ | 1.3083e-3 | 3.2610e-4 | 8.0336e-5 | 1.9378e-5 | 4.7364e-6 | |
| | 2.004 | 2.021 | 2.052 | 2.033 | --------- | 2.052 |
| $2^{-7}$ | 2.5112e-3 | 6.2186e-4 | 1.5234e-4 | 3.5984e-5 | 9.0346e-6 | |
| | 2.014 | 2.029 | 2.089 | 1.994 | --------- | 2.089 |
| $2^{-8}$ | 4.6218-3 | 1.1378e-3 | 2.7737e-4 | 6.3794e-5 | 1.6590e-5 | |
| | 2.022 | 2.036 | 2.120 | 1.943 | --------- | 2.120 |
| $2^{-9}$ | 8.2517e-3 | 2.1146e-3 | 5.1013e-4 | 1.1448e-4 | 3.1760e-5 | |
| | 1.964 | 2.051 | 2.156 | 1.850 | --------- | 2.156 |
| $P^N$ | 1.964 | 2.051 | 2.156 | 2.171 | --------- | --------- |




Şekil 4.4. $N$ =512 ve $\varepsilon = 2^{-9}$.

# 5. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER OLMAYAN REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ

Bu bölümde singüler pertürbe özellikli lineer olmayan (yarılineer) reaksiyon-difüzyon sınır değer problemi ele alınmıştır. Ortalama değer teoremi yardımıyla problem lineer hale dönüştürülerek sürekli çözümün özellikleri verilmiştir. Daha sonra quazilinerizasyon tekniği ile lineer fark problemleri dizisine dönüştürlen problem için Numerov metoduna dayalı fark şeması elde edilmiştir. Hatanın yakınsaklık analizi yapılmıştır. Gerçek (tam) çözüm bilinmediğinden çift şebeke yöntemi yardımıyla hatalar hesaplanmış yakınsaklık hızı hesaplanmıştır. Nümerik örneğin sonuçları tablo ile verilmiştir.

Bu kesimde lineer olmayan

$$\begin{cases} Lu(x) \equiv -\varepsilon u'' + f(x,u) = 0, \quad 0 < x < l, & (5.1) \\ u(0) = A, \quad u(l) = B. & (5.2) \end{cases}$$

reaksiyon - difuzyon denklemini ele alacağız. Burada $\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq l$ olacak şekilde bir pertürbasyon parametresi; $f(x,u) \in C([0,l]x\mathbb{R})$, $\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \geq \alpha > 0$ olacak şekilde yeterince düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca (5.1-5.2) problemi $x = 0$, $x = l$ noktalarında sınır katmanına sahiptir (Kopteva,ve Stynes, 2004).

Problemin lineer olmayan terimi olan $f(x,u)\ için$ ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{f(x,u) - f(x,0)}{u} = \frac{\partial f(x,\tilde{u})}{\partial u}, \quad \tilde{u} = \gamma u, 0 < \gamma < 1$$

olur. $\frac{\partial f(x,\tilde{u})}{\partial u} = a(x)$ olduğu varsayılırsa bu durumda

$$\frac{f(x,u) - f(x,0)}{u} = a(x)$$

olur ve dolayısıyla $f(x,u) = a(x)u + f(x,0)$ yazılabilir.

$-f(x,0) = F(x)$ alınırsa

$$Lu \coloneqq -\varepsilon u''(x) + a(x)u(x) = F(x), \quad 0 < x < l, \tag{5.3}$$

$$u(0) = A, \qquad u(l) = B, \tag{5.4}$$

lineer problemi elde edilir.

Problemin nümerik çözümüne geçmeden önce analitik çözümünün bazı özelliklerini tanıtalım. Aşağıda verilen her iki lemma da ispatlarıyla birlikte aşağıda belirtilen kaynaklarda mevcuttur.

### 5.1. Sürekli Problemin Bazı Özellikleri

Lemma 5.1.1 Herhangi bir $v(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l)$ fonksiyonu için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir.

$$|v(x)| \leq |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0\leq x\leq l} |Lv(x)|, \qquad 0 \leq x \leq l. \tag{5.5}$$

İspat:

$$\Psi(\mathrm{x}) = \pm v(\mathrm{x}) + |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0\leq x\leq l} |Lv(x)|, \qquad 0 \leq x \leq l. \tag{5.6}$$

bariyer fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda

$$\Psi(0) \geq 0, \ \Psi(\mathrm{l}) \geq 0 \tag{5.7}$$

ve

$$\mathrm{L}\Psi(\mathrm{x}) \geq 0 \tag{5.8}$$

sağlanır. Maksimum prensibinden $\Psi(\mathrm{x}) \geq 0$ olacağından (5.5) ün ispatı tamamlanmış olur (Amirali ve Amirali, 2018).

Lemma 5.1.2 $a(x), F(x)$ verilen yeterince düzgün fonksiyonlar ve $u(x)$ de $(5.3) - (5.4)$ probleminin tam çözümü olsun. O zaman aşağıdaki değerlendirmeler geçerlidir.

$$\|u(x)\|_\infty \leq C, \quad 0 \leq x \leq l \tag{5.9}$$

$$|u'(x)| \le \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)\right\}, \qquad 0 \le x \le l; \tag{5.10}$$

İspat: Lemma 5.1.1, $(5.3)-(5.4)$ problemine uygulanırsa

$$|u(x)| \le |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{0\le x\le l} |F(x)|$$

bulunur. Bu ise bize (5.9) eşitsizliğini verir. (5.10) eşitsizliğini ispat etmek için (5.3) denkleminin türevini alalım. Buradan

$$Lv(x) = \varphi(x) \tag{5.11}$$

$$v(0) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \qquad v(l) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{5.12}$$

bulunur. Burada

$$v(x) = u'(x), \qquad \varphi(x) = F'(x) - a'(x)u(x) \tag{5.13}$$

dır.

$(5.11)-(5.12)$ probleminin çözümü

$$v(x) = v_0(x) + v_1(x) \tag{5.14}$$

biçiminde düşünülecek olunursa bu takdirde $v_0(x)$ ve $v_1(x)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümü olurlar.

$$\begin{cases} Lv_0 = \varphi(x), \ \ 0 < x < l \\ v_0(0) = v_0(l) = 0, \end{cases} \tag{5.15}$$

$$\begin{cases} Lv_1 = 0, \ \ 0 < x < l \\ v_1(0) = O\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right), \qquad v_1(l) = O\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right). \end{cases} \tag{5.16}$$

(5.15) probleminin çözümü için Lemma 5.1.1 den

$$|v_0(x)| \le \alpha^{-1} \max_{0\le s\le l} |\varphi(s)|$$

ve dolayısıyla

$$|v_0(x)| \le C, \qquad 0 \le x \le l \tag{5.17}$$

bulunur. Maksimum prensibini (5.16) problemine uygularsak,

$$|v_1(x)| \le w(x) \tag{5.18}$$

bulunur. $w(x)$ ise

$$\begin{cases} -\varepsilon w'' + \alpha w' = 0, & 0 < x < l \\ w(0) = |v_1(0)|, \qquad w(l) = |v_1(l)| \end{cases} \tag{5.19}$$

probleminin çözümüdür. Problemin çözümü

$$w(x) = \frac{1}{\sinh\left(\sqrt{\alpha}l/\sqrt{\varepsilon}\right)} \left\{ |v_1(0)| \sinh\left(\sqrt{\alpha}(l-x)/\sqrt{\varepsilon}\right) + |v_1(l)| \sinh\left(\sqrt{\alpha}x/\sqrt{\varepsilon}\right) \right\} \tag{5.20}$$

formundadır. Burada

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse

$$\frac{\sinh\left(\sqrt{\alpha}(l-x)/\sqrt{\varepsilon}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\alpha}l/\sqrt{\varepsilon}\right)} = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l-x)} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l-x)}}{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)}} = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)} \left( \frac{1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(2l-x)}}{1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(2l)}} \right) \le e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)}$$

ve

$$\frac{\sinh\left(\sqrt{\alpha}(x)/\sqrt{\varepsilon}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\alpha}(l)/\sqrt{\varepsilon}\right)} = \frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(x)} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(x)}}{e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l)}} = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l-x)} \left( \frac{1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(2x)}}{1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(2l)}} \right) \le e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l-x)}$$

eşitsizlikleri sağlanır ve

$(5.19)$ dan $|v_1(0)| \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}},\ |v_1(l)| \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$

olduğu göz önüne alınırsa kolaylıkla

$$w(x) \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}}\right) \qquad (5.21)$$

olduğu gösterilebilir. O zaman $(5.17)-(5.18)$ ve $(5.21)$ eşitsizlikleri

$$|u'(x)| \le |v_0(x)| + |v_1(x)|$$

eşitsizliğinde birleştirilirse bu eşitsizlikten istenen

$$|u'(x)| \le \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)\right\}$$

elde edilir (Amirali ve Amirali, 2018).

## 5.2. Şebekenin Oluşturulması

### 5.2.1. Üstel katsayılı fark şeması

Bu kesimde $(5.3)-(5.4)$ probleminin çözümü için düzgün bir şebeke üzerinde kurulu üstel katsayı çarpanına sahip bir nümerik şema oluşturacağız. $w_h,\ [0,1]$ aralığı üzerindeki düzgün şebekeyi göstersin.

$w_h = \{x_i = ih,\ \ i = 1,2,\dots,N-1, \qquad h = 1/N\}, \qquad \overline{w}_h = w_h \cup \{x = 0, l\}.$

Notasyonu kolaylaştırmak için herhangi bir $w(x)$ fonksiyonu için $w_i = w(x_i)$ alalım. Üstelik $w_i$ de $u(x)$ in $x_i$ noktasındaki bir yaklaşımını göstersin. $\overline{w}_N$ üzerinde tanımlı herhangi bir şebeke fonksiyonu $w_i$ için

$$w_{\bar{x},i} = \frac{w_i - w_{i-1}}{h}, \qquad w_{x,i} = \frac{w_{i+1} - w_i}{h}, \quad w_{\bar{x}x,i} = \frac{w_{x,i} - w_{\bar{x},i}}{h},$$

fark türevlerini kullanacağız ve norm ise

$$\|w\|_{C(\bar{w}_h)} = \max_{1 \le i \le N} |w_i|$$

şeklinde tanımlıdır. (5.3) in fark yaklaşımını bulmak için $(x_{i-1}, x_i)$ ve $(x_i, x_{i+1})$, aralıkları üzerinde aşağıdaki özdeşliği Amirali ve Amirali (2018) kullanacağız.

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x)\varphi_i(x)dx = 0, \tag{5.22}$$

(5.22) denkleminde $Lu(x)$ ifadesinin karşılığı (5.1) den yerine yazılır, $f(x_i, w)$ ifadesi de denkleme eklenip çıkrıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$ly_i \equiv -\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i} + f(x_i, y_i) = R_i, \qquad i = 1,2, \dots, N-1 \tag{5.23}$$

elde edilir. Burada $R_i$

$$R_i = \chi_i^{-1} h^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (f(x,y) - f(x_i,y))\varphi_i(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (f(x_i,y) - f(x_i,y_i))\varphi_i(x)dx \right\}$$

$$= \chi_i^{-1} h^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (f(x,y) - f(x_i,y_i))\varphi_i(x)dx \right\} \tag{5.24}$$

şeklindedir. Ayrıca $\theta_i$ bir üstel katsayılı çarpandır ve basit hesaplamalardan sonra

$$\theta_i = \chi_i^{-1} = 1.$$

bulunur. Eğer $R_i$ terimi (5.23) denkleminden ihmal edilerek atılırsa o zaman (5.1) − (5.2) problemi için

$$\begin{cases} ly_i \equiv -\varepsilon y_{\bar{x}x,i} + f(x_i, y_i) = 0, \ i = 1,2, \dots, N-1 \\ y_0 = A, \ y_N = B \end{cases} \tag{5.25}$$

fark şemasını elde ederiz. Hemen belirtelim ki burada $\varphi_i^{(1)}$ ve $\varphi_i^{(2)}$ birer taban fonksiyonudur ve sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir.

$$-\varepsilon {\varphi_i}^{(1)''} = 0, {\varphi_i}^{(1)}(x_i) = 1, {\varphi_i}^{(1)}(x_{i-1}) = 0, \tag{5.26}$$

$$-\varepsilon {\varphi_i}^{(2)''} = 0, {\varphi_i}^{(2)}(x_i) = 1, {\varphi_i}^{(2)}(x_{i+1}) = 0. \tag{5.27}$$

Bu çözümlerde

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = 1. \tag{5.28}$$

olmak üzere

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)} \equiv \dfrac{(x - x_{i-1})}{h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i^{(2)} \equiv \dfrac{(x_{i+1} - x)}{h}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 \quad , \qquad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases} \tag{5.29}$$

şeklindedir.

### 5.2.2. Numerov şeması

Bu kesimde $(5.3) - (5.4)$ problemi için Numerov metoduna dayalı fark şemasını elde edeceğiz. Önceki bölümde tanımlanan düzgün şebeke üzerindeki Numerov metoduna dayalı rekürans bağıntısı

$$\varepsilon \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{12}(a_{i-1}y_{i-1} + 10a_iy_i + a_{i+1}y_{i+1} - F_{i-1} - 10F_i - F_{i+1}) \tag{5.30}$$

biçiminde olur.. Gerekli düzenleme yapılırsa

$$\left(\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}\right)y_{i-1}-\left(\frac{2\varepsilon}{h^2}+\frac{10a_i}{12}\right)y_i+\left(\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12}\right)y_{i+1}=-\frac{1}{12}(F_{i-1}+10F_i+F_{i+1}),$$
$$i=1,2,\dots,N-1 \qquad (5.31)$$

elde edilir. Bu ise

$$A_i=\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}, \qquad C_i=\frac{2\varepsilon}{h^2}+\frac{10a_i}{12}, \qquad B_i=\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12},$$
$$G_i=\frac{1}{12}(F_{i-1}+10F_i+F_{i+1})$$

kısaltmaları ile

$$A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-G_i, \qquad i=1,2,\dots,N-1 \qquad (5.32)$$

üçlü band (tridiagonal) sistemi olduğu görülür.

$$A_i>0, \qquad B_i>0, \qquad C_i-A_i-B_i>0 \qquad (5.33)$$

olduğundan Samarskii (2001), Amirali ve Amirali (2018) den sistemin bir çözüme sahip olduğu bilinmektedir. Bu sistem kovma (Thomas) algoritmasıyla çözülebilir.

### 5.2.3. Üstel katsayılı Numerov şeması

Üstel katsayılı çarpan (5.30) Numerov fark şemasında işleme konursa şema

$$\varepsilon\theta_i\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}-\frac{1}{12}(a_{i-1}y_{i-1}+10a_iy_i+a_{i+1}y_{i+1})=$$

$$=-\frac{1}{12}(F_{i-1}+10F_i+F_{i+1}), \quad i=1,2,\dots,N-1, \qquad (5.34)$$

halini alır. Gerekli düzenleme yapılırsa problemin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanacağımız

$$\left(\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}\right)y_{i-1}-\left(\frac{2\varepsilon\theta_i}{h^2}+\frac{10a_i}{12}\right)y_i+\left(\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12}\right)y_{i+1}$$

$$= -\frac{1}{12}(F_{i-1} + 10F_i + F_{i+1}), \qquad i = 1,2,\dots,N-1 \tag{5.35}$$

üstel katsayılı Numerov şemasını elde ederiz. Yukarıda yapılan işlemlere benzer olarak

$$A_i = \frac{\varepsilon\theta_i}{h^2} - \frac{a_{i-1}}{12}, \qquad C_i = \frac{2\varepsilon\theta_i}{h^2} + \frac{10a_i}{12}, \qquad B_i = \frac{\varepsilon\theta_i}{h^2} - \frac{a_{i+1}}{12},$$

$$G_i = \frac{1}{12}(F_{i-1} + 10F_i + F_{i+1})$$

alınırsa

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -G_i, \qquad i = 1,2,\dots,N-1 \tag{5.36}$$

katsayı farkı ile benzer üçlü band (tridiagonal) sistemi elde edilir. Katsayılar aynı şartlara sahiptir ve bu yüzden çözümü kovma algoritması (Thomas Algoritması) yardımıyla bulunur.

### 5.3. Numerov Tipi Bir Algoritma

(5.1) sınır değer probleminin çözümü için Numerov Metodu uygulanırsa

$$\begin{cases} -\varepsilon \;\; u_{\bar{x}x,j} + f\left(x_j, u_j\right) + \frac{1}{12}h^2 \;\; f_{\bar{x}x,j} = 0, \;\; j = 1,2,\dots,N; \\ u_0 = A, \; u_{N+1} = B \end{cases} \tag{5.37}$$

elde edilir. Burada (5.37) problemi için Newton-Raphson-Kantorovich yaklaşımı yardımıyla quazilinerizasyon yaparak bir Numerov tipi şema elde edeceğiz. Bunun için (5.37) Numerov fark şemasında $f\left(x_j, u_j\right)$ fonksiyonu yerine

$$f\left(x_j, u_j^{(k)}\right) = f\left(x_j, u_j^{(k-1)}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\left(x_j, u_j^{(k-1)}\right).(u_j^{(k)} - u_j^{(k-1)})$$

eşitliği düşünülür ve $f_{\bar{x}x,j}$ fark türevi buna göre hesaplandığında gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa şema

$$= -\varepsilon\frac{(u_{j+1}^{(k)}-2u_j^{(k)}+u_{j-1}^{(k)})}{h^2} + f_j^{(k-1)} + f_{u_j}^{(k-1)}\left(u_j^{(k)}-u_j^{(k-1)}\right) +$$

$$+\frac{1}{12}\left(f_{j+1}^{(k-1)} - 2f_j^{(k-1)} + f_{j-1}^{(k-1)}\right) + \frac{1}{12}\left(f_{u_{j+1}}^{(k-1)}-2f_{u_j}^{(k-1)}+f_{u_{j-1}}^{(k-1)}\right).\left(u_j^{(k)}-u_j^{(k-1)}\right)$$

$$+$$

$$+\frac{1}{12}[(u_{j+1}^{(k)}-2u_j^{(k)}+u_{j-1}^{(k)}) - (u_{j+1}^{(k-1)}-2u_j^{(k-1)}+u_{j-1}^{(k-1)})].f_{u_j}^{(k-1)} = 0$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{12}f_{u_j}^{(k-1)}\right)u_{j-1}^{(k)} - \left[\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{12}\left(f_{u_{j+1}}^{(k-1)}+8f_{u_j}^{(k-1)}+f_{u_{j-1}}^{(k-1)}\right)\right]u_j^{(k)} +$$

$$+\left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{12}f_{u_j}^{(k-1)}\right)u_{j+1}^{(k)} =$$

$$= -\frac{1}{12}\{\left(f_{u_{j+1}}^{(k-1)}+10f_{u_j}^{(k-1)}+f_{u_{j-1}}^{(k-1)}\right).u_j^{(k-1)} -$$

$$-\left(f_{j+1}^{(k-1)} + 10f_j^{(k-1)} + f_{j-1}^{(k-1)}\right) + f_j^{(k-1)}.(u_{j+1}^{(k-1)}-2u_j^{(k-1)}+u_{j-1}^{(k-1)})\};$$

$$j = 1,2,\dots,N-1;\ k = 1,2,\dots \qquad (5.38)$$

elde edilir. Eğer

$$A_j^{(k-1)} = \left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{12}f_{u_j}^{(k-1)}\right),\ C_j^{(k-1)} = \left[\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{12}\left(f_{u_{j+1}}^{(k-1)}+8f_{u_j}^{(k-1)}+f_{u_{j-1}}^{(k-1)}\right)\right],$$

$$B_j^{(k-1)} = \left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{12}f_{u_j}^{(k-1)}\right),\ G_j^{(k-1)} = \frac{1}{12}\{\left(f_{u_{j+1}}^{(k-1)}+10f_{u_j}^{(k-1)}+f_{u_{j-1}}^{(k-1)}\right).u_j^{(k-1)} -$$

$$-\left(f_{j+1}^{(k-1)} + 10f_j^{(k-1)} + f_{j-1}^{(k-1)}\right) + f_j^{(k-1)}.(u_{j+1}^{(k-1)}-2u_j^{(k-1)}+u_{j-1}^{(k-1)})\}$$

alınırsa

$$A_j^{(k-1)}u_{j-1}^{(k)} - C_j^{(k-1)}u_j^{(k)} + B_j^{(k-1)}u_{j+1}^{(k)} = -G_j^{(k-1)}, j = 1,2,\dots,N-1;\ k = 1,2,\dots \quad (5.39)$$

elde edilir. Bu sistemi çözmek için uygun bir başlangıç

$$\{u_{j+1}^{(0)}, u_j^{(0)}, u_{j-1}^{(0)}\}$$

yaklaşımı verilir veya seçilir. Başlangıç değerlerinin kullanılmasıyla birlikte (5.32) formuna benzer bir form elde edileceği açıktır ve (5.33) şartlarına sahiptir. Dolayısıyla şema kararlıdır.

## 5.4. Yakınsaklık Analizi

$$\begin{cases} \boldsymbol{ly_i \equiv -\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i = F_i}, & \boldsymbol{i = 1,2,\dots,N-1} \\ \boldsymbol{y_0 = A}, \quad \boldsymbol{y_N = B} \end{cases} \quad (5.40)$$

fark şeması (5.3) denkleminin yaklaşık çözümü için önerilen üstel katsayılı bir şemadır. $u_i$, (5.3)probleminin $x_i$ noktasındaki çözümü ve $y_i$ de (5.40) in çözümü olmak üzere

$z_i = y_i - u_i$ , $0 \le i \le N$

olsun. Amacımız

$$lz_i = R_i\ ;\ z_0 = z_N = 0 \quad (5.41)$$

problemini sağlayan $z_i$ yaklaşım hatasını hesaplamaktır. Burada $R_i$ (5.24) ile verilen kesim hatasıdır.

Teorem 5.4.1 $a(x), F(x) \in C^1[0,l]$ olsun. $u_i$, $(5.3)-(5.4)$ probleminin çözümü ve $y_i$ de (5.40) in çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\|y-u\|_{C(\overline{w}_h)} \le Ch \quad (5.42)$$

İspat. Fark maksimum prensibi (5.41) problemine uygulanırsa

$$\|z\|_{C(\overline{w}_h)} \leq \alpha^{-1}\|R\|_{C(\overline{w}_h)} \tag{5.43}$$

elde edilir. (5.24) ten

$$|R_i| \leq Ch, \qquad i = 1,2,\dots,N-1$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla bu da teoremin ispatını tamamlar (Amirali ve Amirali, 2018).

Theorem.5.4.2 Kabul edelim ki $f(x,u) \in C^2[0,l]$ $dir$. O zaman aşağıdaki değerlendirme geçerlidir.

$$\|y-u\|_{C(\overline{w}_h)} \leq Ch^2 \tag{5.44}$$

İspat. Eğer $R_i$ için bir sınır bulunursa ispat tamamlanmış olur. Bunun için $f(x,u)$ fonksiyonunu Taylor serisine açalım. O zaman aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$f(x,u) - f(x_i,u_i) = (x-x_i)\left\{\frac{\partial f(x_i,u_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i,u_i)}{\partial u}\frac{du(x_i)}{dx}\right\} +$$

$$+\frac{(x-x_i)^2}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f(\xi_i,u(\xi_i))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(\xi_i,u(\xi_i))}{\partial x \partial u}\frac{du(\xi_i)}{dx} + \frac{\partial^2 f(\xi_i,u(\xi_i))}{\partial u^2}\left(\frac{du(\xi_i)}{dx}\right)^2\right\}$$

Bu eşitliği $R_i$ ifadesinde yerine yazacak olursak aşağıdaki denklem bulunur:

$$R_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)\left\{\frac{\partial f(x_i,u_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i,u_i)}{\partial u}\frac{du(x_i)}{dx}\right\}\varphi_i(x)dx +$$

$$+h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f(\xi_i,u(\xi_i))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(\xi_i,u(\xi_i))}{\partial x \partial u}\frac{du(\xi_i)}{dx} + \frac{\partial^2 f(\xi_i,u(\xi_i))}{\partial u^2}\left(\frac{du(\xi_i)}{dx}\right)^2\right\}\varphi_i(x)dx$$

Eğer $u'$nün (5.10) daki ve $u''$ nün de (5.1) den değerleri yerine yazılırsa

$$\|R\|_{C(w_h)} \leq Ch^2$$

olduğu rahatlıkla görülür. Bu da ispatı tamamlar.

### 5.5. Örnek Problem

Aşağıdaki lineer olmayan singüler pertürbe özellikli reaksiyon-difüzyon problemini ele alalım:

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) - e^{-(x^2+u)} = 0, & x \in [0,1] \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{cases} \tag{5.45}$$

Problemin tam çözümü elde edilemediğinden mutlak maksimum hata aşağıdaki formüller ve çift şebeke sistemi yardımıyla bulundu. Burada örnek probleme ( 5.39) Numerov şeması uygulanmıştır.

Hatalara ilişkin sonuçlar ve yakınsaklık hızları Çizelge 5.1'de verildi. ($u_i^0 = x^2,\ 1 \leq i \leq N-1,$ keyfi başlangıç fonksiyonu için) Çizelge 5.1 sonuçlarından lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemi için önerilen şemanın deneysel olarak 2.mertebeden bir yakınsama hızına sahip olduğu görülmektedir. Bu da teorik bilgilerle örtüşmektedir. Maksimum hatanın artan $N$ değerleri için azaldığı ve $\varepsilon$ değerleri küçüldükçe maksimum hata miktarının artmasının önemli ölçüde engellendiği gözlemlenmektedir.

Çizelge 5.1. Örnek 5.5 için üstel katsayılı Numerov şemasının mutlak hata ve yakınsama hızı değerleri

| | *N= 32* | *N= 64* | *N= 128* | *N =256* | *N =512* | $P_\varepsilon^N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon=2^{-5}$ | 9.3628e-4 | 2.3459e-4 | 5.8624e-5 | 1.4743e-5 | 3.7175e-6 | |
| | 1.997 | 2.001 | 1.992 | 1.988 | --------- | 2.001 |
| $\varepsilon=2^{-6}$ | 1.5159e-4 | 3.7832e-4 | 9.4641e-5 | 2.3782e-5 | 6.1786e-6 | |
| | 2.003 | 1.999 | 1.993 | 1.945 | --------- | 2.003 |
| $\varepsilon=2^{-7}$ | 2.5342e-3 | 6.3532e-4 | 1.5915e-5 | 3.9856e-5 | 1.008e-5 | |
| | 1.996 | 1.997 | 1.998 | 1.983 | --------- | 1.998 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon=2^{-8}$ | 4.4481e-3 | 1.1021e-3 | 2.7494e-4 | 6.8799e-5 | 1.7331e-5 | |
| | 2.013 | 2.003 | 1.999 | 1.989 | --------- | 2.013 |
| $\varepsilon=2^{-9}$ | 7.7248e-3 | 1.9461e-3 | 4.9046e-4 | 1.2245e-4 | 3.0717e-5 | |
| | 1.989 | 1.988 | 2.002 | 1.995 | --------- | 2.002 |
| $P^N$ | 1.989 | 1.988 | 2.002 | 1.995 | ---------- | -------- |

# 6. SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ GECİKMELİ LİNEER REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMLERİ

Bu bölümde singüler pertürbe özellikli gecikmeli lineer reaksiyon-difüzyon denklemleri için bir sınır değer problemi ele alınmıştır. İlkönce indirgenmiş problemin çözümü yardımıyla problemin iç nokta değeri hesaplanmıştır. Böylelikle bu nokta yardımıyla verilen sınır değer problemi adi diferensiyel denklemler için iki sınır değer problemine dönüştürülmüştür. Bu problemlerin her biri birer lineer adi diferensiyel denklemler için sınır değer problemi olduklarından 4. bölümdeki sonuçlar her bir probleme genişletilmiştir. Önerilen üstel katsayılı Numerov şemasının kararlılığı ve yakınsaklığı incelenmiş, sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiştir. Sonuçlar tablo halinde verilmiştir.

Şimdi aşağıdaki singüler pertürbe özellikli gecikmeli lineer reaksiyon-difüzyon problemini ele alalım.

$$Lu \coloneqq -\varepsilon u''(x) + a(x)u(x) + b(x)u(x-r) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{6.1}$$

$$u(x) = \emptyset(x), x \in [-r, 0]\,; \quad u(l) = B, \tag{6.2}$$

Burada $0 < \varepsilon \ll 1$, $a(x) > 0$, $b(x) < 0$, $\alpha > o$ olmak üzere $a(x) + b(x) > 2\alpha$ ve $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığı üzerinde yeterince düzgün sürekli fonksiyonlar, $\emptyset(x)$; $[-r, 0]$ üzerinde düzgün fonksiyon ve $r > 0$ gecikme terimidir. Bu problemin benzeri Subburayan ve Ramanujan (2013) tarafından ele alınmış ve başlangıç değer tekniği adı verilen bir metodla problemin çözümü incelenmiştir.

Kabul edelim ki $u(x)$ çözümü $C^0[0, l] \cap C^1(0, l) \cap C^2\{(0, r) \cup (r, l)\}$ kümesine ait olsun. Bu durumda sınır değer problemimiz

$$\begin{cases} L_1 u \coloneqq -\varepsilon u''(x) + a(x)u(x) = f(x) - b(x)\emptyset(x-r) = G(x), \quad 0 \le x \le r, \\ u(0) = \emptyset(0), u(r) = c \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\begin{cases} L_2 u \coloneqq -\varepsilon u''(x) + a(x)u(x) + b(x)u(x-r) = f(x), \quad r \le x \le l, \\ u(r) = c, u(l) = B \end{cases} \tag{6.4}$$

iki sınır değer problemine dönüşür. Burada $u(r) = c$ değeri $(6.1)$ problemi için indirgenmiş problemin değeridir. Böylelikle $(6.1) - (6.2)$ problemi yerine $(6.3)$ ve $(6.4)$ problemleri ele alınacaktır.

### 6.1. Sürekli Çözümün Bazı Özellikleri

$(6.3)$ ve $(6.4)$ problemlerinin her biri $(4.1) - (4.2)$ sınır değer problemi tipinde birer problem olduğundan 4.kesimdeki sürekli problemin sahip olduğu özelliklere sahiptir. Yani problemin çözümü olan $u(x)$,

$$\|u(x)\|_\infty \le C, \quad 0 \le x \le l$$

özelliğine ve $u'(x)$ türevi de

$$|u'(x)| \le \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)\right\}, \qquad 0 \le x \le l;$$

özelliğine sahiptir (Amirali ve Amirali, 2018).

### 6.2. Şebekenin Oluşturulması

#### 6.2.1. Üstel katsayılı fark şeması

Bu kesimde $(6.3)$ ve $(6.4)$ problemlerinin herbirinin çözümleri için ayrı ayrı düzgün bir şebeke üzerinde kurulu üstel katsayılı çarpana sahip birer nümerik şema oluşturacağız.

$[0, l]$ aralığını $[0, r]$ ve $[r, l]$ olmak üzere iki alt aralığa bölelim. Herbir aralığı da $N$ parçaya bölelim. 4.kesimdeki notasyonlara uygun olarak $(6.3)$ için

$$\theta_i = \frac{a_i \rho^2}{4 sinh^2(\sqrt{a_i}.\frac{\rho}{2})}, \quad \rho = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}$$

olmak üzere kuadratür formülleri yardımıyla Amirali ve Amirali (2018) den

$$l y_i \equiv -\varepsilon \theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i = G_i - R_i, \qquad i = 1,2, \dots, N-1 \tag{6.5}$$

bağıntısı bulunur. Burada

$$R_i = \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[a(x)-a(x_i)]u(x)\varphi_i(x)dx + \\ +\chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[G(x_i)-G(x)]\varphi_i(x)dx \qquad (6.6)$$

biçimindedir.

Ayrıca $\varphi_i(x)$ üstel taban fonksiyonları

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)} \equiv \dfrac{sinh_{\gamma_i}(x-x_{i-1})}{sinh_{\gamma_i}h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i^{(2)} \equiv \dfrac{sinh_{\gamma_i}(x_{i+1}-x)}{sinh_{\gamma_i}h}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 \quad , \qquad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

ve

$$\chi_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)dx = \frac{2\tanh(\gamma_i h/2)}{\gamma_i h}, \quad \gamma_i = \sqrt{\frac{a(x_i)}{\varepsilon}}$$

şeklindedir. Hemen belirtelim ki $\varphi_i^{(1)}$ ve $\varphi_i^{(2)}$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir.

$$\begin{cases} -\varepsilon\varphi''(x) + a_i\varphi(x) = 0, & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi(x_{i-1}) = 0, & \varphi(x_i) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon\varphi''(x) + a_i\varphi(x) = 0, & x_i < x < x_{i+1} \\ \varphi(x_i) = 1, & \varphi(x_{i+1}) = 0 \end{cases}$$

Eğer denklemdeki $R_i$ ihmal edilirse probleme karşılık önereceğimiz fark problemi

$$\begin{cases} ly_i \equiv -\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i = G_i, & i = 1,2,\dots,N-1 \\ y_0 = \emptyset(0), & y_N = c \end{cases} \tag{6.7}$$

şeklinde olur. Benzer şekilde (6.4) problemi için de

$$ly_i \equiv -\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i + b_i y_{i-N} = f_i - R_i, \qquad i = N+1, N+2, \dots, 2N-1 \tag{6.8}$$

fark denklemi elde edilir. Burada $R_i$

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)]\varphi_i(x)dx$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)]\varphi_i(x)dx$$

$$R_i^{(3)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x)u(x-r) - b(x_i)u(x_i-r)]\varphi_i(x)dx$$

olmak üzere

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \tag{6.9}$$

şeklindedir.

Eğer denklemdeki $R_i$ ihmal edilirse

$$\begin{cases} ly_i \equiv -\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i + b_i y_{i-N} = f_i, & i = N+1, N+2, \dots, 2N-1 \\ y_N = c, & y_{2N} = B \end{cases} \tag{6.10}$$

şeklinde bir fark şeması yazılabilir.

### 6.2.2. Numerov şeması

Bu kesimde (6.3) ve (6.4) problemlerinin herbiri için Numerov metoduna dayalı fark şemasını elde edeceğiz.

4. ve 5. kesimlerde olduğu gibi Taylor serisinden faydalanırsak (6.3) problemi için Numerov metoduna dayalı

$$\left(\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}\right)y_{i-1}-\left(\frac{2\varepsilon}{h^2}+\frac{10a_i}{12}\right)y_i+\left(\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12}\right)y_{i+1}=-\frac{1}{12}(G_{i-1}+10G_i+G_{i+1}),$$
$$i=1,2,\dots,N-1 \qquad (6.11)$$

fark şeması elde edilir. Burada

$$G_{i-1}=f_{i-1}-b_{i-1}\emptyset_{i-1-N}\,,$$

$$G_i=f_i-b_i\emptyset_{i-N},$$

$$G_{i+1}=f_{i+1}-b_{i+1}\emptyset_{i+1-N}$$

dir.

$$A_i=\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}, \qquad C_i=\frac{2\varepsilon}{h^2}+\frac{10a_i}{12}, \qquad B_i=\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12},$$

$$F_i=\frac{1}{12}(G_{i-1}+10G_i+G_{i+1})$$

kısaltmaları ile

$$A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-F_i, \qquad i=1,2,\dots,N-1 \qquad (6.12)$$

üçlü band (tridiagonal) sistemi olduğu görülür.

$$A_i>0, \qquad B_i>0, \qquad C_i-A_i-B_i>0 \qquad (6.13)$$

olduğu açıktır. Benzer şekilde (6.4) problemi için Numerov metoduna dayalı

$$\left(\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}\right)y_{i-1}-\left(\frac{2\varepsilon}{h^2}+\frac{10a_i}{12}\right)y_i+\left(\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12}\right)y_{i+1}=-\frac{1}{12}(J_{i-1}+10J_i+J_{i+1}),$$
$$i=N+1,N+2,\dots,2N-1 \qquad (6.14)$$

fark şeması elde edilir. Burada

$$J_{i-1}=f_{i-1}-b_{i-1}y_{i-1-N}\,,$$

$$J_i=f_i-b_iy_{i-N},$$

$$J_{i+1}=f_{i+1}-b_{i+1}y_{i+1-N}$$

dir. Yine

$$A_i=\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}, \qquad C_i=\frac{2\varepsilon}{h^2}+\frac{10a_i}{12}, \qquad B_i=\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12},$$

$$E_i=\frac{1}{12}(J_{i-1}+10J_i+J_{i+1})$$

kısaltmaları ile

$$A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-E_i, \qquad i=N+1,N+2,\dots,2N-1 \qquad (6.15)$$

üçlü band (tridiagonal) sistemi olduğu görülür.

$$A_i>0, \qquad B_i>0, \qquad C_i-A_i-B_i>0 \qquad (6.16)$$

olduğu açıktır. Amirali ve Amirali (2018) den sistemin bir çözüme sahip olduğu bilinmektedir. Bu sistem Thomas algoritmasıyla çözülebilir.

### 6.2.3. Üstel katsayılı Numerov şeması

Üstel katsayı çarpanı, (6.11) Numerov fark şemasında işleme konursa (6.3) problemi için

$$\left(\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}\right)y_{i-1}-\left(\frac{2\varepsilon\theta_i}{h^2}+\frac{10a_i}{12}\right)y_i+\left(\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12}\right)y_{i+1}$$

$$=-\frac{1}{12}(G_{i-1}+10G_i+G_{i+1}),\qquad i=1,2,\dots,N-1 \tag{6.17}$$

üstel katsayılı Numerov şeması elde edilir. Burada

$$G_{i-1}=f_{i-1}-b_{i-1}\emptyset_{i-1-N}\,,$$

$$G_i=f_i-b_i\emptyset_{i-N},$$

$$G_{i+1}=f_{i+1}-b_{i+1}\emptyset_{i+1-N}$$

dir.

$$A_i=\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12},\qquad C_i=\frac{2\varepsilon\theta_i}{h^2}+\frac{10a_i}{12},\qquad B_i=\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12},$$

$$F_i=\frac{1}{12}(G_{i-1}+10G_i+G_{i+1})$$

kısaltmaları ile

$$A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-F_i,\qquad i=1,2,\dots,N-1 \tag{6.18}$$

üçlü band (tridiagonal) sistemi olduğu görülür. Katsayılar aynı şartlara sahiptir ve bu yüzden çözümü aynı metodla bulunabilir.

Benzer şekilde üstel katsayı çarpanı, (6.14) fark şemasında işleme konursa, (6.4) problemi için Numerov metoduna dayalı

$$\left(\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}\right)y_{i-1}-\left(\frac{2\varepsilon\theta_i}{h^2}+\frac{10a_i}{12}\right)y_i+\left(\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12}\right)y_{i+1}=-\frac{1}{12}(J_{i-1}+10J_i+J_{i+1}),$$
$$i=N+1,N+2,\dots,2N-1 \qquad (6.19)$$

üstel katsayılı Numerov şeması elde edilir. Burada

$$J_{i-1}=f_{i-1}-b_{i-1}y_{i-1-N}\,,$$

$$J_i=f_i-b_iy_{i-N},$$

$$J_{i+1}=f_{i+1}-b_{i+1}y_{i+1-N}$$

dir. Yine

$$A_i=\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i-1}}{12}, \qquad C_i=\frac{2\varepsilon\theta_i}{h^2}+\frac{10a_i}{12}, \qquad B_i=\frac{\varepsilon\theta_i}{h^2}-\frac{a_{i+1}}{12},$$

$$E_i=\frac{1}{12}(J_{i-1}+10J_i+J_{i+1})$$

kısaltmaları ile

$$A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-E_i, \qquad i=N+1,N+2,\dots,2N-1 \qquad (6.20)$$

katsayı farkı ile benzer üçlü band (tridiagonal) sistemi elde edilir. Katsayılar aynı şartlara sahiptir ve bu yüzden çözümü kovma metodu yardımıyla bulunabilir.

### 6.3. Yakınsaklık Analizi

$$\begin{cases} ly_i\equiv-\varepsilon\theta_iy_{\bar{x}x,i}+a_iy_i=G_i,\ i=1,2,\dots,N-1 \\ y_0=\emptyset(0),\ y_N=c \end{cases} \qquad (6.21)$$

fark şeması (6.3) denkleminin yaklaşık çözümü için önerilen üstel katsayı çarpanlı bir şemadır. $u_i$, (6.3)probleminin $x_i$ noktasındaki çözümü ve $y_i$ de (6.21) in çözümü olmak üzere $0 \le i \le N$ için $z_i = y_i - u_i$ olsun. Amacımız

$$lz_i = R_i\,;\; z_0 = z_N = 0 \tag{6.22}$$

problemini sağlayan $z_i$ yaklaşım hatasını hesaplamaktır. Burada $R_i$ (6.6) ile verilen kesim hatasıdır.

Teorem 6.3.1 $a(x), G(x) \in C^1[0,l]$ olsun. $u_i$, (6.3) probleminin çözümü ve $y_i$ de (6.21) in çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\|y-u\|_{C(\overline{w}_h)} \le Ch \tag{6.23}$$

İspat. Fark maksimum prensibi (6.22) problemine uygulanır ve Amirali ve Amirali (2018) deki yol izlenirse

$$\|z\|_{C(\overline{w}_h)} \le \alpha^{-1}\|R\|_{C(\overline{w}_h)} \tag{6.24}$$

elde edilir. $R_i$ nin tanımından

$$|R_i| \le Ch, \qquad i = 1,2,\dots,N-1$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 6.3.2 $a(x), G(x) \in C^2[0,l]$ ve $a'(0) = a'(l) = 0$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\|y-u\|_{C(\overline{w}_h)} \le Ch^2 \tag{6.25}$$

İspat. Hatayı $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$ formunda yazarsak $R_i^{(1)}$ve $R_i^{(2)}$ sırasıyla

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)]\, u(x) \varphi_i(x) dx \qquad (6.26)$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [G(x_i) - G(x)]\, \varphi_i(x) dx \qquad (6.27)$$

biçiminde olur. Burada $\varphi_i(x)$ üstel taban fonksiyonudur ve 4.2 kesimde tanımlanmıştır. Amirali ve Amirali (2018) kaynağındaki yol izlenirse

(6.27) için

$$\left|R_i^{(2)}\right| = O(h^2), \quad i = 1,2, \dots, N-1 \qquad (6.28)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterilebilir.

(6.27) denkleminde

$$G(x) - G(x_i) = (x - x_i) G'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} G''(\xi_i), \qquad \xi_i \in (x_i, x)$$

ve

$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)\, \varphi_i(x) dx = 0$ yaklaşımları kullanılırsa

$$R_i^{(2)} = -\chi_i^{-1} h^{-1} f'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)\, \varphi_i(x) dx - \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 G''\left(\xi_i(x)\right) \varphi_i(x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 G''\left(\xi_i(x)\right) \varphi_i(x) dx$$

bulunur. O halde

$$\left|R_i^{(2)}\right| \le \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} h^2 \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |G''(x)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx = \frac{h^2}{2} \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |G''(x)|$$

bulunur ki buradan istenen sonuç elde edilir.

(6.26) yaklaşımının

$$\left|R_i^{(1)}\right| = O(h^2), \;\; i = 1,2,\dots,N-1$$

olduğunu, Teorem 4.4.2 nin ispatındakine benzer biçimde yapılabilir. Dolayısıyla

$$\left|R_1^{(1)}\right| = O(h^2), \;\; \left|R_{N-1}^{(1)}\right| = O(h^2)$$

yazılabilir. Böylece sonuçlar birleştirilirse

$$\|R\|_{C(w_h)} \leq Ch^2$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi de

$$\begin{cases} ly_i \equiv -\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i + b_i y_{i-N} = f_i, & i = N+1, N+2, \dots, 2N-1 \\ y_N = c, \quad y_{2N} = B \end{cases} \tag{6.29}$$

fark problemini ele alalım. Farz edelim ki $(6.29)$ fark şeması $(6.4)$ denkleminin yaklaşık çözümü için önerilen üstel katsayı çarpanlı bir şema olsun. $u_i$, $(6.4)$ probleminin $x_i$ noktasındaki çözümü ve $y_i$ de $(6.29)$ un çözümü olmak üzere $0 \leq i \leq N$ için $z_i = y_i - u_i$ olsun. Amacımız

$$lz_i = R_i \,;\; z_0 = z_N = 0 \tag{6.30}$$

problemini sağlayan $z_i$ yaklaşım hatasını hesaplamaktır. Burada $R_i$ $(6.9)$ ile verilen kesim hatasıdır.

Teorem 6.3.3 $a(x), f(x) \in C^1[0,l]$ olsun. $u_i$, $(6.4)$ probleminin çözümü ve $y_i$ de $(6.29)$ un çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\|y - u\|_{C(\overline{w}_h)} \leq Ch \tag{6.31}$$

İspat. $R_i$ hatası $(6.9)$ formunda olduğundan

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[f(x_i)-f(x)]\varphi_i(x)dx$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[a(x)\ -\ a(x_i)]\varphi_i(x)dx$$

$$R_i^{(3)} = \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[b(x)u(x-r)\ -\ b(x_i)u(x_i-r)]\varphi_i(x)dx$$

dir. Ortalama değer teoreminden

$$|f(x)-f(x_i)| = |f'(\xi_i)||x-x_i| \le Ch$$

ve

$$|a(x)-a(x_i)| = |a'(\xi_i)||x-x_i| \le Ch$$

dir. Bu sonuçlar ilgili yerlerde yerine yazılırsa $R_i^{(1)}$ ve $R_i^{(2)}$ için istenen sonuç bulunur. 3.terimin yaklaşımını bulmak için Amiraliyev ve Çimen (2010) daki yolun izlenmesiyle

$$R_i^{(3)} = \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[b(x)u(x-r)\ -\ b(x_i)u(x_i-r)]\varphi_i(x)dx$$

$$= \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{d}{dx}(b(x)u(x-r))K_{0,i}(x,\xi)d\xi\,,\quad 1\le i\le N-1$$

$$\left|R_i^{(3)}\right| \le \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left|\frac{d}{dx}\big(b(\xi)u(\xi-r)\big)\right|d\xi \le Ch\Big(1+\sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}|u'(\xi-r)|\ d\xi\Big)$$

$$\le Ch\Big(1+\int_0^l|u'(\xi-r)|d\xi\Big)$$

bulunur ve $t=\xi-r$ dönüşümü yapılırsa

$$\left|R_i^{(3)}\right| \leq Ch(1 + \int_0^l |u'(t)|dt)$$

elde edilir. $u'(t)$ nin sınırı göz önüne alınır ve sonuçlar birleştirilirse

$$|R_i| \leq Ch$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

**6.4. Örnek Problem (**Chakravarty ve Kumar, 2017**)**

$$-\varepsilon u''(x) + 5u(x) - u(x-1) = 1, \quad 0 < x < 2$$
$$u(x) = \varphi(x) = 1, \qquad x \in [0,1], \qquad u(2) = 2$$

problemini ele alalım. Bu problemin indirgenmiş problemi

$5u(x) - u(x-1) = 1$

olduğundan $x = 1$ için $u(1) = 2/5$ bulunur. Dolayısıyla problemimiz

$$-\varepsilon u''(x) + 5u(x) = 2, \quad 0 < x < 1$$
$$u(0) = \varphi(0) = 1, \qquad u(1) = 2/5$$

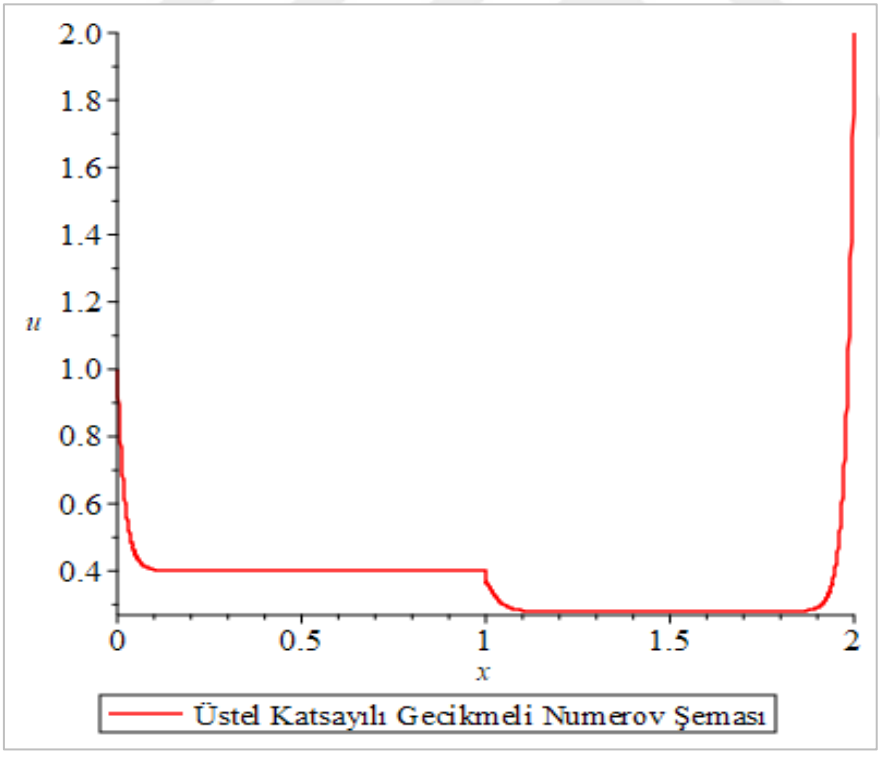
ve

$$-\varepsilon u''(x) + 5u(x) - u(x-1) = 1, \quad 1 < x < 2$$
$$u(1) = 2/5, \qquad u(2) = 2$$

sınır - değer problemlerine dönüşmüş oldu. Problemin çözümünün maksimum normdaki hatası Çizelge 6.1'de verilmiştir. Önerilen şemanın yakınsaklığı ve düzgün yakınsaklığı 2 iken $\varepsilon$ parametresi küçülürken mutlak hata artmakta ancak artan adım sayısına bağlı olarak mutlak hatanın nispeten azaldığı görülmektedir.

Çizelge 6.1. Örnek 6.4 için üstel katsayılı Numerov şemasının mutlak hata ve yakınsama hızı değerleri

| $\varepsilon$ | $N=32$ | $N=64$ | $N=128$ | $N=256$ | $N=512$ | $R_\varepsilon^N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-5}$ | 3.0658e-3 | 7.7397e-4 | 1.9301e-4 | 4.8048e-5 | 7.7603e-6 | |
| | 1.986 | 2.004 | 2.006 | 2.630 | --------- | 2.630 |
| $2^{-6}$ | 6.2383e-3 | 1.5408e-3 | 3.8635e-4 | 9.6961e-5 | 9.70e-5 | |
| | 2.018 | 1.996 | 1.995 | 2.185 | --------- | 2.185 |
| $2^{-7}$ | 1.2523e-2 | 3.0654e-3 | 7.7389e-4 | 1.9310e-4 | 1.93e-4 | |
| | 2.030 | 1.986 | 2.003 | 2.005 | --------- | 2.030 |
| $2^{-8}$ | 2.6394e-2 | 6.2382e-3 | 1.5408e-3 | 3.8637e-4 | 3.86e-4 | |
| | 2.081 | 2.018 | 1.996 | 2.002 | --------- | 2.081 |
| $2^{-9}$ | 4.9961e-2 | 1.2523e-2 | 3.0655e-3 | 7.7388e-4 | 7.74e-4 | |
| | 1.996 | 2.030 | 1.986 | 2.003 | --------- | 2.030 |
| $R^N$ | 1.996 | 2.030 | 2.006 | 2.003 | --------- | |




Şekil 6.1. $N$ =1024 ve $\varepsilon = 2^{-9}$.

# 7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında fen, mühendislik, ekonomi ve tıbbi bilimlerdeki birçok problem için model olan singüler pertürbe özellikli reaksiyon- difüzyon denklemi tipli sınır değer problemleri çalışılmıştır. Tezin ilk bölümünde ele alınan sınır değer problem sınıfının kapsamı açıklanmış, nümerik çözümün önemi vurgulanmıştır. İkinci bölümde ilgili literatür bilgileri verilmiştir. Üçüncü bölümde ise çalışmada kullanılan gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir. 4, 5 ve 6. bölümler çalışmanın esas kısımlarını teşkil etmektedir.

4. bölümde singüler pertürbe özellikli lineer reaksiyon-difüzyon tipi sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problem için düzgün şebeke üzerinde hem üstel katsayılı Numerov şeması, hem de klasik Numerov şeması elde edilerek nümerik çözümleri bulunmuştur. Yakınsaklık ve kararlılıkları incelenmiştir. Daha sonra parçalı düzgün şebekede (Shishkin tipi), ele alınan problem için üstel katsayılı Numerov şeması elde edilmiş, yakınsaklık analizi yapılmıştır. Metodun uygulanabilirliğini ve etkinliğini görmek için literatürden bir test problemi ele alınmış, gerçek çözüm ile önerilen fark şemasının sonuçlarının mutlak farklarının maksimum değerleri tablo halinde verilmiştir. Sonuçlardan hareketle önerilen metodun yakınsaklığını ve teorik çalışmalarla uyumluluğunu gözlemlemekteyiz. Yakınsaklık mertebesinin iki olduğu görülmektedir. Burada yapılan çalışma, Phaneendra ve ark. (2010) çalışmasından üstel katsayının elde edilmesi bakımından farklıdır ve elde edilen nümerik sonuçlar karşılaştırılmış, önerilen fark şemasının iyi sonuçlar verdiği Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5'te görülmüştür.

Beşinci bölümde singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon-difüzyon tipi sınır değer problemi ele alınmıştır. Söz konusu problem, lineerleştirme (quazilinerizasyon) tekniği ile lineer hale getirilmiş ve sonra bu problem için üstel katsayılı Numerov şeması elde edilmiştir. Şemanın yakınsaklığı ve kararlılığı incelenmiş, çalışma nümerik örnekle desteklenmiştir. Ele alınan problemin gerçek çözümü elde edilemediğinden çift katlı şema tekniği kullanılmıştır. Sonuçlar Çizelge 5.1'de verilmiştir. Lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemi için önerilen şemanın 2. mertebeden bir yakınsama hızına sahip olduğu görülmüştür. Bu sonuç teorik çalışmayla örtüşmektedir. Burada problemin lineerleştirilmesiyle Numerov şemasının oluşturulması

literatüre bir yeniliktir ve bu bakımdan Herceg (1990;1993;2001), Vulanovic (2004) çalışmalarından farklıdır.

Altıncı bölümde ise singüler pertürbe özellikli gecikmeli lineer reaksiyon-difüzyon tipi sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problem iki tane singüler pertürbe özellikli lineer reaksiyon-difüzyon tipli sınır değer problemine dönüştürülmüş daha sonra üstel katsayılı Numerov şemaları oluşturulmuştur. Kararlılık ve yakınsaklık analizleri yapılmıştır. Çalışmalar nümerik örneklerle desteklenmiş sonuçlar Çizelge 6.1 ile verilmiştir. Önerilen metodun yakınsama hızı ve düzgün yakınsama hızı tespit edilmiştir. Bu bölümde yapılan çalışma Kadalbajoo ve Sharma (2005;2006;2008) çalışmalarından üstel katsayılı şemanın elde edilişinde kullanılan yöntem bakımından farklıdır.

Singüler pertürbe özellikli problemler için kurulan nümerik şemaların düzgün yakınsaklık özelliğine sahip olması gerekliliğinden hareketle bu çalışma; Numerov metoduna dayanan, singüler pertürbe teorisi ve kuadratür formülleri yardımıyla kurulan şemaların düzgün yakınsama göstermesi bakımından önemlidir.

Burada açık problem olarak, ele alınan problem için yakınsaklığın derecesinin iyileştirilmesi çalışmasının yapılabileceği söylenebilir. Ayrıca singüler pertürbe özellikli gecikmeli diferensiyel denklem tipli sınır değer probleminin lineer olmayan hali çalışılabilir.

Tüm nümerik sonuçlar Maple2017 programı kullanılarak yapılmıştır. Tez çalışması Yüzüncü Yıl Üniversitesi BAP birimince FDK-5843 nolu proje ile desteklenmiştir.

## KAYNAKLAR


Al-Said, E.A., Noor, M.A., 2001. Modified Numerov method for solving system of second-order boundary value problems. ***Korean J.Comput.&Applied Math.,*** **8**(1):129-136.

Amirali, G., Amirali, I., 2018. ***Numerik Analiz***. (Teori ve Uygulamalarla) 1.Baskı. Seçkin Yayıncılık, Ankara. 495.

Amiraliyev,G.M., Cimen,E., 2010, Numerical method for a singularly perturbed convection-diffusion problem with delay. ***Applied Mathematics and Computation,*** **216:** 2351-2359.

Amiraliyeva,I.G., Erdogan,F.,Amiraliyev,G.M., 2010, A uniform numerical method for dealing with a singularly perturbed delay inital value problem. ***Applied Mathematics Letters,*** **23**:1221-1225.

Avdelas ,G., Konguetsov, A., Simos, T.E.., 2000. A generalization of Numerov's method for the numerical solution of the Schrödinger equation in two dimensions. ***Computer and Chemstry*** **24**: 577-584.

Bawa, R.k., 2007. A parallel approach for self -adjoint singular perturbation problems using Numerov's scheme**.** ***Int. J. Of Comp. Math.,*** **84**(3): 317-323.

Bellen,A., Zennaro, M., 2003, ***Numerical Methods for Delay Differential Equations.,*** Oxford University Press, Oxford.

Barbu, L., Moroşanu, G., 2007, ***Singularly Perturbed Boundary Value Problems***, ***ISNM,*** **156**, Birkhauser Verlag AG.

Berghe, G.V, Daele, M.V., 2007. Exponentially-fitted Numerov methods. ***Journal of Comp. And Applied Mathematics,*** **200**: 140-153.

Bulatov, M.V., Berghe, G.V., 2009. Two-step fourth order methods for linear Odes of the second order. ***Numer Algor*** **51**: 449-460.

Chakravarthy,P.P.,Rao,R.N., 2012, A modified Numerov method for solving singularly perturbed differential-difference equations ***Arising in Science and Engineering Results in Physics,*** **2**:100-103.

Chakravarthy,P.P.,Kumar,K., 2017, A novel method for singularly perturbed delay differential equations of reaction-diffusion type. ***Differ Equ Dyn Syst ,DOI 10.1007/s12591-017-0399-x.***

Chakravarthy,P.P.,Kumar,S.D.,Rao,R.N., 2017, An exponentially fitted finite difference scheme for a class of singularly perturbed delay differential equations with large delays. ***Ain Shams Engineering Journal*** **8** (4): 663-671.

Clavero, C.,Lisbona, F., Jhon, J.H.M, 1995. Uniform convergence of arbitrary order on nonuniform meshes for a singularly perturbed boundary value problem. ***J. Of Comp. and Applied Mathematics,*** **59**: 155-171.

Constantinou, P., Xenophontos, C., 2015. Finite element analysis of an exponentially graded mesh for singularly perturbed problems. ***Computational Methods in Applied Math.,*** **15** (2) :135-143.

Doolan, E.P., Miller, J.J., Schilders, W.H.A., 1980, ***Uniform Numerical Methods for Problems with Inital and Boundary Layers,*** Boole Press, Dublin.

El'sgol'ts, L.E., Norkin, S.B., 1973. ***Introduction to the Theory and Application of Differential with Deviating Arguments,*** Matematics in Science and Engineering, Vol:105, New York, Academic Press.

Erdogan,F.Amiraliyev,G.M., 2012, Fitted finite difference method for singularly perturbed delay differential equations. ***Numer Algor,*** **59**:131-145.

Erdogan, F., Cen, Z., 2018, A uniformly almost second order convergent numerical method for singularly perturbed delay differential equations. ***Journal of Computational and Applied Mathematics,*** **333**:382-394.

Fack, V., Berghe, G.V., 1987. (Extended) Numerov method for computing eigenvalues of specific Schrödinger equations. ***J.Phys.A: Math. Gen.,*** **20** :4153-4160.

Fang, Y., Wu, X., 2008. A trigonometrically fitted explicit Numerov-type method for second-order inital value problems with oscillating solutions. ***Applied Numerical Mathematics,*** **58**:341-351.

Farrel, P.A., Hegarty, A.F., Miller, J.J.H., O'Riordian, E.,Shishkin,G.I., 2000. ***Robust Computational Techniques for Boundary Layers***. Applied Mathematics Series. 16. Chapman&Hall/Crc, Boca Raton- Florida.USA.

Gao, Q., Cheng, X., Huang, Z., 2013. Modified Numerov's method for inverse Sturm-Liouville problems. ***J.of Comp. and App. Math.,*** **25** :181-199.

Gelu,F.W., Duvessa, G.F., Bullo, T.A.,2017 .Sixth-order compact finite difference method for singularly perturbed 1D reaction-diffusion Problems. ***Journal of Taibah University for Science*****.** **11**(2): 302-308.

Harier, E., Norsett, S.P., and Wanner, G., 1993. ***Solving Ordinary Differential Equation I, Nonstiff Problems***. Second Revised Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. 528.

Herceg, D., 1990. On the numerical solution of a singularly perturbed nonlocal problem. ***Novi Sad J.Math,*** **Mat. 20** (2) :1-10.

Herceg, D., 1990. Uniform fourth order difference scheme for a singular perturbation problem. ***Numer. Math.,*** **56** :675-693.

Herceg, D., 1993. On numerical solution of singularly perturbed boundary value problem III. ***Novi Sad J.Math, Mat.*** **23** (1): 371-381.

Herceg, D., Surla, K., Radeka, I., Maliçiç, H., 2001. Numerical experiments with different schemes for a singularly perturbed problem. ***Novi Sad J.Math.,*** **31** (1): 93-101.

Holevoet, D., Daele, M.V., Berghe, G.V., 2009. The optimal exponentially-fitted Numerov method for solving two-point boundary value problems. ***Journal of Comp. and Applied Mathematics,*** **230**: 260-269.

Isaacson, E., Keller, B.H., 1994**.** ***Analysis of Numerical Methods***. Dover Publications, Inc.

Jayakumar, J., 2003. Improvement of numerical solution by boundary value technique for singularly perturbed one dimentional reaction diffusion problem. ***Applied Mathematics and Computation,*** **142**: 417-447.

Kadalbajoo, M.K. , Sharma, K.K., 2004, Numerical analysis of singularly perturbed delay differential equations with layer behavior, ***Appl. Math. Comput.*** **157**: 11–28.

Kadalbajoo, M.K., Sharma, K.K.,2005, Numerical treatment of boundary value problems for second order singularly perturbed delay differential equations. ***Comput. Appl. Math.*** **24**(2): 151–172

Kadalbajoo, M.K., Sharma, K.K.,2005, Numerical treatment for singularly perturbed nonlinear differential difference equations with negative shift. ***Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*** **63**(5): e1909–e1924.

Kadalbajoo, M.K., K.K. Sharma, 2006, Parameter-uniform fitted mesh method for singularly perturbed delay differential equations with layer behavior***, Electron. Trans. Numer. Anal.*** **23**: 180–201.

Kadalbajoo, M.K. , Ramesh, V.P. , 2007, Hybrid method for numerical solution of singularly perturbed delay differential equations, ***Appl. Math. Comput.*** **187**: 797–814.

Kadalbajoo, M.K., Sharma, K.K., 2008. A numerical method based on finite difference for boundary value problems for singularly perturbed delay differential equations, ***Appl. Math. Comput.*** **197**: 692–707.

Kadalbajoo, M.K. Kumar, D. 2010, A computational method for singularly perturbed nonlinear differential-difference equations with small shift, ***Appl. Math. Model.*** **34**: 2584–2596.

Kalaiselvan, S.S., Miller, J.J.H., Sigamani, V., 2019. A parameter uniform numerical method for a singularly perturbed two-parameter delay differential equation. ***Applied Numerical Matematics,*** **145**: 90-110.

Kalogiratou, Z., Monovasilis, T., Simos, T.E., 2005. Numerical solution of the two-dimensional time independent Schrödinger equation with Numerov-type methods. ***J.of Math. Chemstry,*** **37** (3): 271-279.

Kanth, A. R., & P. Murali, M. K., 2018. A numerical technique for solving nonlinear singularly perturbed delay differential equations. ***Mathematical Modelling and Analysis,*** **23**(1), 64-78. ***https://doi.org/10.3846/mma.2018.005***

Keller, B.H., 1968. ***Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems.*** Blaisdell, Waltham. 184.

Konguetsof,A., 2010. A new two-step hybrid method for the numerical solution of the Schrödinger equation. ***J.Math. Chem.,*** **47**:871-890.

Kopteva,N., Stynes, M., 2004. Numerical analysis of a singularly perturbed nonlinear reaction-diffusion problem with multiple solutions. ***Applied Numerical Mathematics,*** **51**:273-288.

Kumar, V., 2009. High–order compact finite-difference scheme for singularly perturbed reaction-diffusion problems on a new mesh of Schinhkin type. ***J.Optim. Theory Appl.,*** **143** :123-147.

Lange,C.G., Miura,R.M., 1982, Singular perturbation analysis of boundary-value problems for differential-difference equations. ***SIAM J.Appl.Math.,*** **42**(3):502-531.

Lange, C.G., Miura, R.M., 1985, Singular perturbation analysis of boundary-value problems for differential-difference equations III. turning point problems. ***SIAM J.Appl.Math.,*** **45** (5):708-734.

Linss,T., Madden, N., 2003. An improved error estimate for a numerical method for a system of coupled singularly perturbed dimentional reaction-diffusion equations. ***Coputational Methods in Applied Math.,*** **3** (3) : 417-423.

Linss, T., Madden, N., 2004. A finite element analysis of a coupled system of singularly perturbed reaction-difussion equations. ***App. Math. and Comp.,*** **148**: 869-880.

Linss, T., 2005. Sufficient conditions for uniform convergence on layer-adapted meshes for one-dimentional reaction-diffusion problems. ***Numerical Algorithms,*** **40**: 23-32.

Linss, T. , 2010. ***Layer Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems***, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin.

Linss, T., 2014. A posteriori error estimation for arbitrary order FEM applied to singularly perturbed one dimentional reaction-diffusion problems. ***Applied of Mathematics,*** **59** (3) : 241-256.

Mathews, S., O'Riordan,E., Shishkin, G.I., 2002. A numerical method for a system of singularly perturbed reaction-diffusion equations. ***J. of Comp. and Applied Mathematics,*** **145**:151-166.

Mohapatra, J., Natesan, S., 2011, Uniformly convergent numerical method for singularly perturbed differential-difference equation using grid equidistribution, ***Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.*** **27**: (9) 1427–1445.

Miller, J.J.H., O'Riordian, E.,Shishkin, G.I., 2012. ***Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems***. Revised Edition,World Scientific, Singapor.

Noumerov, B.V.,1924. A method of extrapolation of perturbations. ***Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,*** **84**(8):592-601.

O'Riordan, E., Stynes, M., 1996. A uniformly accurate FEM for a singularly perturbed one dimentional reaction-diffusion problem. ***Mathematics of Computation,*** **47** (176) : 555-570.

Patidar, K.C., 2005, High order fitted operator numerical method for self-adjoint singular perturbation problems. ***Appl. Math. Comput.*** **171**(1):, 547–566

Phaneendra, K., Reddy, Y.N.,and Soujanya, GBSL., 2012. Asymptotic-numerical method for third-order singular perturbation problems***. Int.Journal of Applied Science and Engineering,*** **10** (3) :241-248.

Phaneendra, K., Chakravarthy, P.P.Reddy, Y.N., 2010. A fitted Numerov method for singuler perturbation problems exhibiting twin layers, ***Applied Math.&Inf. Sciences,*** **4** (3): 341-352.

Quiroz Gonzalas, J.L.M. and Thompson, D., 1997. Getting started with Numerov's method. ***Computers in Physics,*** **11** (5): 514-515.

Ramos, J.I. , 2006, Exponential methods for singularly perturbed ordinary differential-difference equations, ***Appl. Math. Comput.*** **182**: 1528–1541.

Rao, S.C.S., Kumar, S., Kumar, M., 2011. Uniform global convergence of a hybrid scheme for singularly perturbed reaction-diffusion systems. ***J.Optim. Theory Appl,*** **151**: 338-352.

Roos, H.G., Stynes, M., Tobiska, L., 2008. ***Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion-Reaction and Flow problems***. Second Edition, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. 604.

Salama, A., Al-Amery, D., 2016. High-order uniformly convergent method for nonlinear singularly perturbed delay differential equations with small shifts. ***Turk J Math*** **40**: 1144 – 1167, ***doi:10.3906/mat-1508-75***

Samarskii A.A., 2001. ***Theory of Difference Schemes***. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics v 240. Marcel Dekker, New York, 761.

Sekar, E., Tamilselvan, A, 2019. Parameter uniform method for a singularly perturbed system of delay differential equations of reaction–diffusion type with integral boundary conditions. ***Int. J. Appl. Comput. Math*** **5**(85). ***https://doi.org/10.1007/s40819-019-0675-2.***

Stynes, M., Kopteva, N., 2006. Numerical analysis of singularly perturbed nonlinear reaction-diffusion problems with multiple solutions. ***Computers and Mathematics with Applications,*** **51**: 857-864.

Subburayan, V., Ramanujam, N., 2013. An initial value technique for singularly perturbed reaction-diffusion problems with a negative shift. ***Novi Sad J. Math.,*** **43**(2):67-80.

Swomy, D.K., Phaneendra, K., Babu, A.B., Reddy, Y.N., 2015. Computational method for singularly perturbed delay differential equations with twin layers or oscillatory behaviour. ***Ain Shams Engineering Journal*, 6** (1): 391-398.

Tatu,C.,Rizea,M.,Puşcaş,N.N., 2007. Eigenvalue problem for Schrödinger equation using Numerov method. *U.P.B.* ***Sci. Bull, Serias A*, 69** (2) : 61-73.

Tselyaev, V.I., 2004. A generalized Numerov method for linear second-order differential equations ivolving a first derivative term. ***Journal of Computational and Applied Mathematics,* 170**: 103 – 120.

Vulanoviç,R., 2004. An almost sixth-order finite difference method for semilinear singular perturbation problems. ***Comp. Methods in App. Math.,* 4** (3):368-383.

Wang, Y.M., 2011. On Numerov's method for a class of strongly nonlinear two-point boundary value problems. ***Applied Numerical Mathematics,* 61**: 38-52.

Wang, Y.M., Wu, W.J., and Scalia, M., 2012. Numerov's method for a class of nonlinear multipoint boundary value problems. ***Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering***: ***Article ID 316852,29pp***.

Xenophontos, C., 2002. Optimal mesh design for the FE approximation of reaction-diffusion problems. ***Int.Journal for Numerical Methods in Engineering,* 53**: 929-943.

Xenophontos, C., Fulton, F.R., 2003. Uniform approximation of singularly perturbed reaction-diffusion problems by the finite element method on a Shishkin mesh. ***Numerical Method for Partical Differential Equations***. **19**(1): 89-111.

You, X., Chen, Z., Fang, Y., 2013. New explicit adapted Numerov method for second order osciltory differential equations. ***App. Math. and Comp.,* 219**: 6241-6255.

# ÖZ GEÇMİŞ

1970 yılında Bitlis'in Mutki ilçesinin Salman Köyü'nde doğdu. İlkokul ve ortaokuldan sonra lise öğrenimini 1988 yılında Bitlis'te tamamladı. 1993 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümünden Astronomi-Matematik programı mezunu oldu. 1996 yılında da Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamlayarak mezun oldu. 1994 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atandı. 2008-2009 tarihleri arasında 1 yıl Kars TÜİK'te ve 2009-2012 yılları arasında 3 yıl Bitlis Belediye'sinde çalıştı. 2012 yılı Kasım ayından itibaren Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır. 2011-2012 eğitim öğretim yılından itibaren doktora öğrenimine başladı. Yabancı dili İngilizce olup evli ve 2 çocuk babasıdır.

**T.C**
**VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU**

**Tarih:** 25 / 12 / 2019

Tez Başlığı : BELİRLİ SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ REAKSİYON-DİFÜZYON PROBLEM SINIFININ NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yukarıda başlığı belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 93 sayfalık kısmına ilişkin, 25 / 12 / 2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNITIN .intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 8 (Sekiz) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

25.12.2019
Kerem YAMAÇ

Adı Soyadı: **Kerem YAMAÇ**
Öğrenci No: 11911120284
Anabilim Dalı: **Matematik**
Programı: **Matematik**
Statüsü: Y. Lisans ☐ Doktora **X**

**DANIŞMAN ONAYI**
UYGUNDUR

Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

25.12.2019

**ENSTİTÜ ONAYI**
UYGUNDUR
../../2019

Enstitü Sekreteri
Prof. Dr. [illegible] SENSOY
Enstitü Müdürü