

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAMİLTON GRAFLARI VE HAMİLTON RENKLENDİRMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Ahmet Hatip GÜZEL
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

VAN-2012

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAMİLTON GRAFLARI VE HAMİLTON RENKLENDİRMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Ahmet Hatip GÜZEL

VAN-2012

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR danışmanlığında, Ahmet Hatip GÜZEL tarafından sunulan “Hamilton Grafları ve Hamilton Renklendirmesi” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili hükümleri gereğince 31/07/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Hakkı DURU

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman EDİZ

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.....

Enstitü Müdürü

ÖZET

HAMILTON GRAFLARI VE HAMILTON RENKLENDİRMESİ

GÜZEL, Ahmet Hatip

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

TEMMUZ 2012, 80 Sayfa

Bu çalışma temelde yedi bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın ilk iki bölümü kısa bir giriş ve kaynak bildirişine ayrılmış olup, üçüncü bölümde Graf Teorisi ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde Hamilton grafları ve bu graf sınıfıyla ilgili temel kavram ve teoremler genel hatlarıyla işlenmiştir. Beşinci bölümde Hamilton renklendirmesi ele alınıp, kavramlar, bazı teoremler ve sonuçları verilmiştir. Altıncı bölümde Hamilton renklendirmesi bazı özel graf sınıflarına uygulanmıştır. Son bölümde ise, genelleştirilmiş Petersen grafları üzerinde Hamilton renklendirmesi çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Graf, Hamilton Grafları, Hamilton Renklendirmesi

ABSTRACT

HAMILTONIAN GRAPHS AND HAMILTONIAN COLORING

GÜZEL, Ahmet Hatip

MSc, Mathematics Science

Supervisor: Asst. Prof. Dr. M. Şerif ALDEMİR

JULY 2012, 80 Pages

This study consists essentially of seven chapters. In the first two chapters are given a short introduction and a notification of references. In chapter three fundamental concepts of Graph Theory have been given. Hamiltonian graphs, its basic features and some related theorems are given in chapter four. In chapter five, Hamiltonian coloring and related some theorems and corollaries are stated. Hamiltonian coloring of some special graph classes have been applied in chapter six. In the last chapter, Hamiltonian coloring on the generalized Petersen graphs is studied.

Key words: Graph, Hamiltonian Graphs, Hamiltonian Coloring

ÖN SÖZ

Çalışmalarım süresince bana gösterdiği sabır ve yardımları için sayın hocam Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR'e, literatür taramaları ve çevirilerde verdiği destek için sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman EDİZ'e ve her konuda bana destek olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet Hatip GÜZEL

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	2
3. TEMEL KAVRAMLAR	3
4. HAMİLTON GRAFLARI	12
5. HAMİLTON RENKLENDİRMESİ	25
5.1. Graflarda Tepelerin Renklendirilmesi	25
5.2. Graflarda Hamilton Renklendirilmesi	27
5.3. Tepe Sayıları Bilinen Grafların Hamilton Kromatik Değerleri Üzerine	40
6. BAZI ÖZEL GRAF SINIFLARINDA HAMİLTON RENKLENDİRMESİ	49
6.1. Ağaç Graflarında Hamilton Renklendirmesi	49
6.2. Maksimum De-tour Uzaklığı $\frac{n}{2}$ Olan Graflarda Hamilton Renklendirmesi	58
6.1. Tırtıl ve Çift Merkezli Yıldız Graflarında Hamilton Renklendirmesi	60
7. TARTIŞMA ve SONUÇ	71
KAYNAKLAR	79
ÖZ GEÇMİŞ	80

ŞEKİLLER DİZİNİ

	sayfa
Şekil 3.1. $G(V, E)$ grafi	3
Şekil 3.2. K_5 tam grafi	5
Şekil 3.3. G , H ve F grafları	6
Şekil 3.4. G grafi	7
Şekil 3.5. Bazı yol grafları	8
Şekil 3.6. Bazı çevre grafları	9
Şekil 3.7. Bazı tam iki parçalı graflar	11
Şekil 3.8. Bazı yıldız grafları	11
Şekil 4.1. C_5 ve K_5 Hamilton grafları	13
Şekil 4.2. H grafinin bir kesiti	15
Şekil 4.3. Teorem 4.8 deki koşulu sağlamayan iki Hamilton grafi	16
Şekil 4.4. C_5 grafi	17
Şekil 4.5. GSP nin graf modeli	19
Şekil 4.6. GSP nin graf modeli	22
Şekil 4.7. T ve G_0 grafları	23
Şekil 4.8. GSP nin çözümü	24
Şekil 5.1. 3-kromatik graf	26
Şekil 5.2. G grafi	28
Şekil 5.3. G grafinin minimum Hamilton renklendirmeleri	30
Şekil 5.4. G_1 ve G_2 graflarının minimum Hamilton renklendirmeleri	31
Şekil 5.5. G üzerinde tanımlanan c_0 Hamilton renklendirmesi	32
Şekil 5.6. $K_{3,3}$ grafi	34
Şekil 5.7. $K_{1,2}$ grafinin minimum Hamilton renklendirmesi	35
Şekil 5.8. Bazı yıldız ve tam iki parçalı grafların minimum Hamilton renklendirmeleri	39
Şekil 5.9. Bazı çevre graflarının minimum Hamilton renklendirmeleri	40
Şekil 5.10. Hamilton kromatik değerleri 2 ve tepe sayıları 3,4 ve 5 olan graflar	41

Şekil 5.11. Hamilton kromatik değerleri 2 olan H_1 ve H_2 grafları	42
Şekil 5.12. $k=2$ ve $n=5$ için F_2 grafinin oluşturulması	43
Şekil 5.13. G üzerindeki bir c^* Hamilton renklendirmesi	45
Şekil 5.14. Bazı Hamilton Graflarının minimum Hamilton renklendirmeleri	47
Şekil 6.1. $1 \leq i \leq 5$ için $hc(I_i)=i$ olan 4 tepeli I_i grafları	52
Şekil 6.2. $1 \leq i \leq 10$, $i \neq 9$ için $hc(J_i)=i$ olan 5 tepeli J_i grafları	53
Şekil 6.3. $C(m,d)$ tırtıl grafi	61
Şekil 6.4. $m=2k+1$ için $C(m,d)$ tırtıl grafi	62
Şekil 6.5. $m=2k$ için $C(m,d)$ tırtıl grafi	64
Şekil 6.6. $C(7,5)$ grafinin bir minimum c Hamilton renklendirmesi	67
Şekil 6.7. $K_2(n_1, n_2)$ grafi	67
Şekil 6.8. $K_2(3,5)$ grafinin minimum c Hamilton renklendirmeleri	70
Şekil 7.1. Petersen Grafi	71
Şekil 7.2. C' çevresinin tam dört ayrıtını içeren C çevresi	73
Şekil 7.3. C' çevresinin tam üç ayrıtını içeren C çevresi	73
Şekil 7.4. $P(5,1)$ ve $P(5,2)$ grafları	75
Şekil 7.5. $P(n,1)$ grafi	76
Şekil 7.6. $P(3,1)$, $P(5,1)$ graflarının minimum Hamilton renklendirmeleri	77
Şekil 7.7. $P(4,1)$ grafinin minimum Hamilton renklendirmesi	78

ÇİZELGELER DİZİNİ

	sayfa
Çizelge 4.1. C_5 grafindaki kapalı ayırıt katarları	18
Çizelge 4.2. Graftaki Hamilton çevreleri ve uzunlukları	20

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

G	Graf
V	Tepeler kümesi
E	Ayrıtlar kümesi
C	Çevre grafi
K	Tam graf
P	Yol grafi
T	Ağaç grafi

Kısaltmalar

$N(v)$	v tepesine komşu olan tepelerin kümesi
$\deg(v)$	v tepesinin derecesi
$\overline{G}$	G grafının tümleyeni
$ G $	G grafının tepe sayısı
$\ G\ $	G grafının ayrıt sayısı
min	minimum
maks	maksimum
GSP	Gezgin Satıcı Problemi
hc	Hamilton kromatik değeri
$d(a,b)$	a ve b tepeleri arasındaki uzaklık
$diam(a,b)$	a ve b tepeleri arasındaki diameter uzaklığı
$D(a,b)$	a ve b tepeleri arasındaki de-tour uzaklığı
PG	Petersen grafi

1. GİRİŞ

Bir graf, elemanları tepe olarak isimlendirilen boş olmayan sonlu bir V kümesi ve elemanları ayrıt olarak isimlendirilen ve yine elemanları bu V kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesinin oluşturduğu $G=(V, E)$ şeklindeki bir sıralı ikili ile ifade edilir. Graf Teorisi'nin bilinen en eski problemi 'Königsberg Köprü Problemi' dir. L.Euler 1736 yılında bu problemin imkansız olduğunu bir graf modeli yardımıyla göstermiştir. Graf Teorisi, bugün kendine özgü tanım ve teoremleriyle, uygulama alanı oldukça geniş olan ayrı bir matematik dalı olarak göze çarpmaktadır. Özellikle ekonomi, yönetim bilimi, satış pazarlama, endüstri alanının her kesiminde kullanılan dağıtım şebekeleri, üretim akışı modelleri ve yol haritalarında graflarla ilgili örneklerle rastlamak mümkündür.

Hamilton Grafları, mühendislikte 'Gezgin Satıcı Problemi' olarak ifade edilen ve bir graftaki en kısa Hamilton çevresini bulmakla eşdeğer olan bir optimizasyon problemi üzerine ortaya çıkmıştır. Buna göre bir grafta, her bir tepeden bir defa geçilerek başlangıç tepesine geri dönülebilmesi durumunda bu graf bir Hamilton grafi olacaktır. Bir grafın Hamilton grafi olabilmesi için gerek ve yeter koşulun ne olduğu hala çözilemeyen bir problem olarak ortada durmakta ve günümüzde graflarla ilgili bir araştırma konusu olmaya devam etmektedir. Buna karşılık, bir grafın Hamilton grafi olabilmesi için bazı yeter koşullar bilinebilmektedir.

Hamilton Renklendirmesi ise graflarda yapılan renklendirmelerin özgün bir çeşidi olup, bu konuda özellikle 2005 yılından sonra önemli çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Hamilton renklendirmesi ile, grafın tepelerine aralarındaki yolların ayrıt sayılarına ve grafın tepe sayısına dayalı olarak birer pozitif tamsayı atanmakta ve graf için bu koşulları sağlayan en uygun renklendirme bulunmaya çalışılmaktadır. Bazı özel graf sınıflarındaki Hamilton renklendirmeleri incelendiğinde, tepelere atanabilecek renklerle ilgili ilginç sonuçlar ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada Hamilton graflarıyla ilgili bazı temel bilgilerin verilmesinin ardından, Hamilton renklendirmesiyle ilgili yapılmış çalışmalar derlenerek bundan sonraki çalışmalar için bir zemin oluşturulmaya çalışılmıştır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Chartrand ve Zhang (2005) ile Ceyhun (1976) Hamilton graflarıyla ilgili bazı temel bilgilere değinmişler ve bu konuda bazı teoremlerin ispatlarına yer vermişlerdir. Bu çalışmanın Hamilton graflarıyla ilgili bölümünün hazırlanması aşamasında bu kaynaklardan yararlanılmıştır.

Graflarda tepelerin özel bir renklendirme türü olan Hamilton renklendirmesinin ilk tanımları, temel özellikleri ve tepe sayısı ile de-tour uzaklıklarına bağlı olarak Hamilton kromatik değerinin sınırları Chartrand ve ark. (2002) de verilmiştir.

Hamilton renklendirmesinin Radio renklendirmesi ile olan ilişkileri ve bazı özel graf sınıflarında (tam graflar, tam iki parçalı graflar, çevre grafları) Hamilton renklendirmesi Chartrand ve ark. (2005a) tarafından çalışılmıştır. Yine bu çalışmada tepe sayısı bilinen grafların Hamilton renklendirmesi incelenmiştir.

Chartrand ve ark. (2005b), belirli renklere sahip graflarda en uzun çevre ile Hamilton renklendirmesi arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Ayrıca bu çalışmada yıldız olmayan ağaç graflarının Hamilton kromatik değeri için bir üst sınıra ulaşarak, bağlantılı grafların Hamilton kromatik değerleri ile ilgili önemli sonuçlara ulaşılmıştır.

Nebesky (2006) da Hamilton bağlantılı alt grafları içermeyen bağlantılı graflar için Hamilton renklendirmesi ele alınmıştır.

Shen ve ark. (2008) maksimum de-tour uzaklığı tepe sayısının yarısı kadar olan graf sınıflarında Hamilton renklendirmesini çalışmışlardır. Aynı çalışmalarında tırtıl grafi ve çift merkezli yıldız graflarında Hamilton kromatik değerini belirlemişlerdir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilerleyen bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı tanım ve örneklere yer verilmiştir.

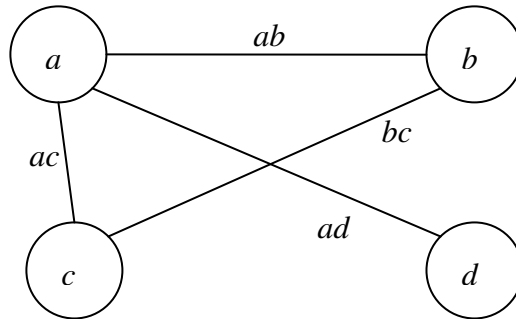
3.1. Tanım (Graf)

Elemanları tepe olarak isimlendirilen boş olmayan sonlu bir V kümesi ve elemanları ayırıt olarak isimlendirilen ve yine elemanları bu V kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesinin oluşturduğu $G = (V, E)$ sıralı ikilisine bir *graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Graflar genellikle düzlem üzerindeki diyagramlar ile gösterilirler. Bu diyagramlar, tepeler ve ayırıtlar arasındaki ilişkileri anlamayı kolaylaştırmak amacıyla kullanılmaktadırlar ve birer fonksiyon grafiği değildirler. Örnek 3.2 de bir graf tanımlanmış ve bu graf Şekil 3.1 de gösterilmiştir.

3.2. Örnek

Tepeleri kümesi $V(G) = \{a, b, c, d\}$ ve ayırıtları kümesi $E(G) = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ olan $G(V, E)$ grafi Şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. $G = (V, E)$ grafi

3.3. Tanım (Komşuluk)

Bir grafa ait ayrıtların gösterimini kolaylaştırmak amacıyla, $\{a,b\}$ ayrıtı yerine ab gösterimi kullanılır. Eğer ab , G nin bir ayrıtı ise a ile b tepeleri *komşudurlar* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.4. Tanım (Bayağı Graf)

Sadece bir tepeden oluşan grafa *bayağı graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005). Bayağı grafın ayrıtı yoktur.

3.5. Tanım (Açık Komşuluk, Kapalı Komşuluk, Bir Tepenin Derecesi)

G bir graf ve $v \in V(G)$ olmak üzere $N(v) = \{u \in G : uv \in E(G)\}$ kümesine v tepesinin *açık komşuluğu kümesi* denir. $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ kümesine de v nin *kapalı komşuluğu kümesi* denir. Bir v tepesine komşu olan tepelerin sayısına da v nin *derecesi* denir ve $\deg(v) = |N(v)|$ ile gösterilir (Meng ve ark., 2007).

3.6. Tanım (k – düzenli graf)

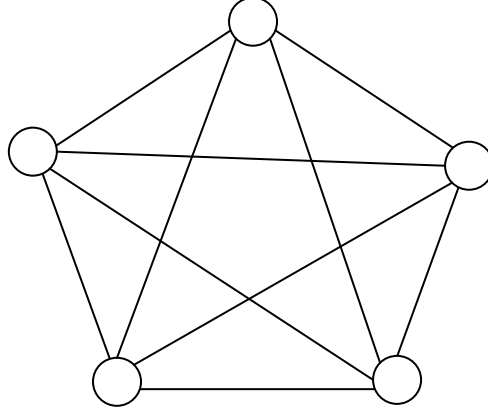
G bir graf olsun. $\forall v \in V(G)$ için $\deg(v) = k$ ise, G grafına bir k – *düzenli graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.7. Tanım (İzole Tepe, Askı Tepesi, Askı Ayrıtı)

$v \in V(G)$ için $\deg(v) = 0$ ise v tepesine bir *izole tepe*, $\deg(v) = 1$ ise v tepesine G nin bir *askı tepesi* denir. Ayrıca bu tepenin bağlantılı olduğu ayrıtı da *askı ayrıtı* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.8. Tanım (Tam Graf)

Bir G grafinın bütün tepeleri birbirleriyle komşu ve dereceleri $n-1$ ise, G ye *tam graf* denir (Meng ve ark., 2007). Tepe sayısı n olan bir tam graf K_n ile gösterilir. Şekil 3.2 de K_5 tam grafi gösterilmiştir.



Şekil 3.2. K_5 tam grafi

3.9. Tanım (Alt Graf, Özalt Graf)

G ve H grafları için $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ koşulları sağlanıyorsa, H ye G nin bir *alt grafi* denir ve $H \subseteq G$ şeklinde gösterilir. Diğer taraftan $V(H) \subset V(G)$ veya $E(H) \subset E(G)$ ise H ye G nin bir *özalt grafi* denir ve $H \subset G$ şeklinde gösterilir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.10. Tanım (Geren Alt Graf)

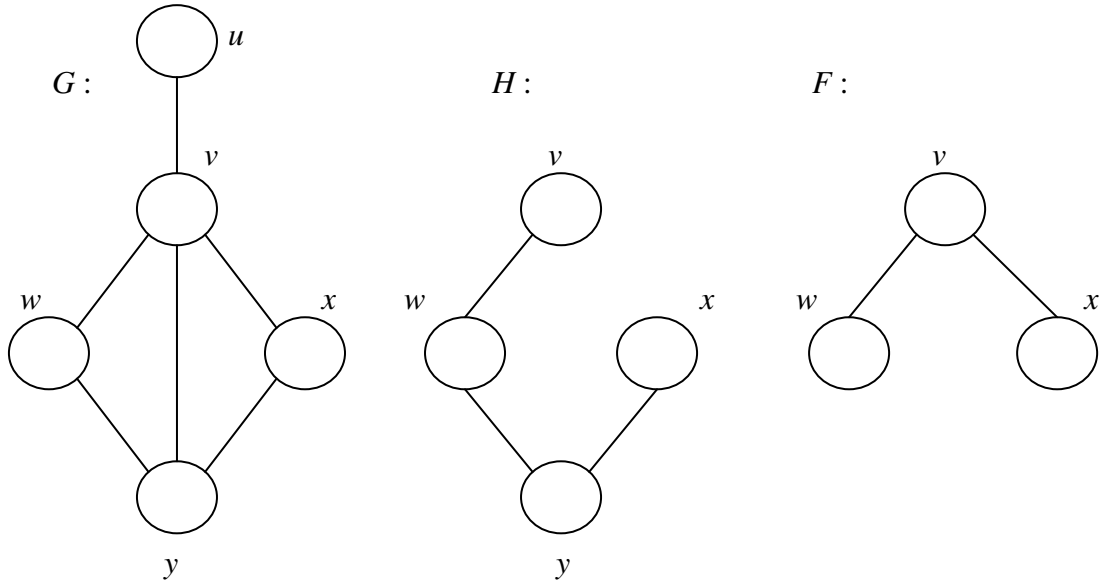
$H \subseteq G$ şeklindeki G ve H grafları için $V(H) = V(G)$ ise, H ye G nin bir *geren alt grafi* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.11. Tanım (İndirgenmiş Alt Graf)

G ve H grafları için $H \subseteq G$ olsun. Bu durumda $\forall u, v \in V(F)$ için $uv \in E(G)$ iken $uv \in E(F)$ oluyorsa, F ye G nin bir *indirgenmiş alt grafi* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.12. Örnek

Şekil 3.3 de bir G grafi ve G nin bazı alt grafları gösterilmiştir. Şekildeki H grafi G nin bir indirgenmiş alt grafi değildir. Çünkü $v, x \in V(H)$ ve $vx \in E(G)$ iken $vx \notin E(H)$ olmaktadır. Diğer taraftan şekildeki F grafi G nin bir indirgenmiş alt grafidir.



Şekil 3.3. G , H ve F grafları

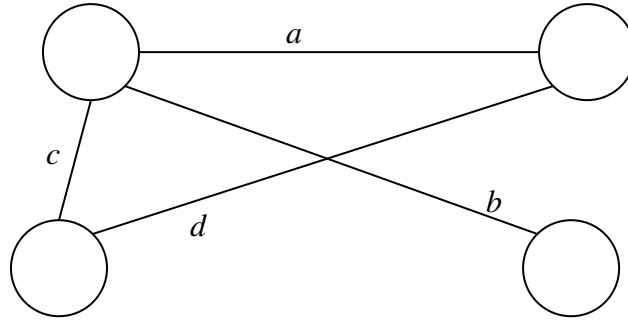
3.13. Tanım (Ayrıt Dizisi)

Bir G grafinin bir tepesinden başlayarak başka bir tepede (ya da aynı tepede) sona eren ve her ayrıtın tepelerinden birisini kendinden önceki ayrıtı, diğerini de

kendinden sonraki ayrıta bağlayan alt grafa, G nin bir *ayrıt dizisi* ya da *sıralı ayrıt* denir (Sessu ve Reed, 1961).

3.14. Tanım (Ayrıt Katarı)

Bir G grafinin bir ayrıt dizisi, aynı ayrıttan ikinci defa geçmiyorsa (ayrıt dizisindeki her bir ayrıttan tekrarı 1 ise) bu ayrıt dizisine G nin bir *ayrıt katarı* denir. Ayrıt katarı başladığı tepede son buluyorsa *kapalı ayrıt katarı*, aksi halde *açık ayrıt katarı* olarak isimlendirilir (Sessu ve Reed, 1961).



Şekil 3.4. G grafi

Şekil 3.4 deki G grafi incelendiğinde $cadcb$, $adcad$ ayrıt dizileri için, $bcda$, $cdab$ açık ayrıt katarları için ve adc , cad ise kapalı ayrıt katarları için ikişer örnek olarak gösterilebilir.

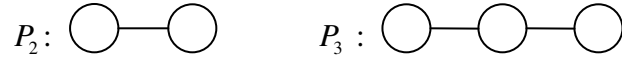
3.15. Tanım (İzomorf Graflar)

G_1 ve G_2 iki graf olsun. Eğer birebir ve örten $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ fonksiyonu varsa ve $u_1v_1 \in E(G_1) \Leftrightarrow f(u_1)f(v_1) \in E(G_2)$ şartı sağlanıyorsa, G_1 ve G_2 ye *izomorf graflar* denir ve $G_1 \cong G_2$ şeklinde gösterilir. Ayrıca burada f ye G_1 den G_2 ye bir *izomorfizm* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.16. Tanım (Yol Grafi)

Eğer $v_1, v_2, \dots, v_n$ tepelerine sahip olan bir G grafının ayrıtları sadece $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ ayrıtlarından ibaret ise, G ye n tepeli bir *yol grafi* denir ve bu graf P_n ile gösterilir. Ayrıca bu yol kısaca $v_1 - v_n$ yolu olarak da gösterilebilir (Meng ve ark., 2007).

Bir yol grafının başlangıç ve bitiş tepelerinin dereceleri 1, iç tepelerinin dereceleri ise 2 dir. Şekil 3.5 de bazı yol grafları gösterilmiştir.



Şekil 3.5. Bazı yol grafları

3.17. Tanım (Uzaklık)

G bir bağlantılı graf ve $u, v \in V(G)$ olsun. G deki $u - v$ yollarından en az sayıda ayrıt içeren yolun ayrıt sayısına, u ile v arasındaki *uzaklık* denir ve $d(u, v)$ ile gösterilir (Chartrand ve Zhang, 2005).

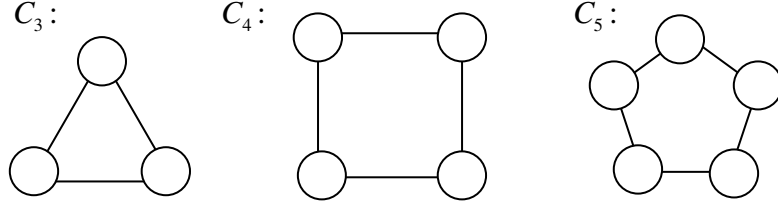
3.18. Tanım (Diameter Uzaklığı)

G bir bağlantılı graf olmak üzere, $\forall u, v \in V(G)$ için $\max\{d(u, v)\}$ değerine G grafının *diameter uzaklığı* denir ve $diam(G)$ ile gösterilir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.19. Tanım (Çevre Grafi)

Eğer $v_1, v_2, \dots, v_n$ tepelerine sahip olan bir G grafının ayrıtları $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ ve v_nv_1 ayrıtlarından ibaret ise, G ye bir *çevre grafi* denir ve bu graf C_n ile gösterilir (Meng ve ark., 2007).

Bir çevre grafinin bütün tepelerinin dereceleri 2 dir. Şekil 3.6 da bazı çevre grafları gösterilmiştir.



Şekil 3.6. Bazı çevre grafları

3.20. Tanım (Bir Grafın Tümleyeni)

G bir graf olmak üzere ayrıtları sadece G de komşu olmayan bütün tepelerin birleştirilmesiyle oluşan grafa G nin *tümleyeni* denir ve $\bar{G}$ ile gösterilir.

$\bar{K}_n$ grafı, n tane tepeden oluşan ve bütün tepeleri birbiriyle komşu olan K_n tam grafının tümleyeni olduğundan ayrıtsız bir graftır. Bu ayrıtsız grafa *boş graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.21. Tanım (İki Parçalı Graf)

G bir graf ve $V(G) = (X, Y)$ grafın tepelerinin bir parçalanışı olmak üzere, G nin bütün ayrıtları sadece X ve Y deki tepelerin karşılıklı olarak birleştirilmesinden oluşuyorsa G ye *iki parçalı graf* denir (Harju, 2007).

3.22. Tanım (Bağlantılı Graf)

Bir G grafının herhangi iki tepesi, bir yol grafı ile birbirlerine bağlanabiliyorsa (grafın herhangi iki tepesi arasında bir yol mevcutsa) G grafına *bağlantılı* (birleştirilmiş) graf denir (Diestel, 2000).

3.23. Tanım (Köprü Ayrıtı)

G bir bağlantılı graf olmak üzere, grafın bir $e \in E(G)$ ayrıtı için $G - e$ grafı bağlantısız bir graf oluyorsa, e ayrıtına bir *köprü* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.24. Tanım (Kesim Tepesi)

G bir bağlantılı graf olmak üzere, grafın bir $v \in V(G)$ tepesi için $G - v$ grafı bağlantısız bir graf oluyorsa, v tepesine G nin bir *kesim tepesi* denir. G grafı kesim tepesi içermiyorsa, G ye *parçalanamaz graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.25. Tanım (Blok Grafı)

$H \subseteq G$ grafı parçalanamaz bir graf olsun. H grafı G nin diğer bir parçalanamaz alt grafının bir özalt grafı değilse, H ye G de bir *blok* denir. Bu koşulları sağlayan bir H grafının G nin bir indirgenmiş alt grafı olduğu açıktır (Chartrand ve Zhang, 2005)

3.26. Tanım (Çevresiz Graf)

G grafı içerisinde herhangi bir çevre grafı barındırmıyorsa, G ye *çevresiz graf* denir (Meng ve ark., 2007).

3.27. Tanım (Ağaç Grafı)

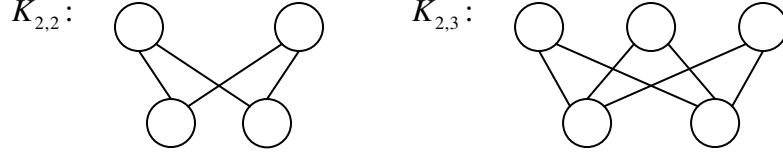
G birleştirilmiş grafı çevresiz ise, G ye bir *ağaç* denir (Meng ve ark., 2007).

3.28. Tanım (Tam İki Parçalı Graf, Yıldız Grafı)

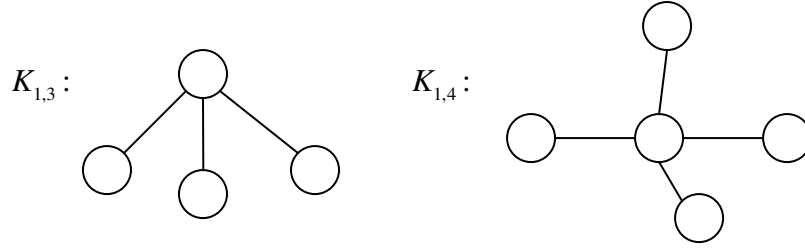
G bir iki parçalı graf ve $V(G) = (X, Y)$ olmak üzere X in bütün tepeleri Y nin bütün tepeleriyle komşu ise G ye *tam iki parçalı graf* denir ve $|X| = r$ ve $|Y| = s$ olmak

üzere $K_{r,s}$ ile gösterilir. Eğer $r=1$ veya $s=1$ ise $G = K_{r,s}$ ye bir *yıldız grafi* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Şekil 3.7 ve Şekil 3.8 de bazı tam iki parçalı graflar ve bu grafların özel bir şekli olan bazı yıldız grafları gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Bazı tam iki parçalı graflar



Şekil 3.8. Bazı yıldız grafları

4. HAMILTON GRAFLARI

Bu bölümde özel bir graf sınıfı olan Hamilton grafları hakkında bazı temel kavramlara, teorem ve örneklerle yer verilmiştir. Ardından Hamilton graflarının mühendislikteki bir uygulaması niteliğini taşıyan Gezgin Satıcı Problemi (GSP) ile ilgili bir örnek ve sonuçları incelenmiştir.

4.1. Tanım (Hamilton Yolu)

G birleştirilmiş bir graf olsun. G nin bütün tepelerini içeren bir yol bulunuyorsa, bu yola G nin bir *Hamilton yolu* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

4.2. Tanım (Hamilton Bağlantılılık)

G birleştirilmiş bir graf olsun. G nin herhangi iki tepesi arasında bir Hamilton yolu bulunuyorsa, G grafi *Hamilton bağlantılıdır* denir (Chartrand ve ark., 2005a).

4.3. Tanım (Hamilton Çevresi)

G birleştirilmiş bir graf olsun. G nin bütün tepelerini içeren bir çevre bulunuyorsa, bu çevreye G nin bir *Hamilton çevresi* denir (Ceyhun, 1976).

4.4. Tanım (Hamilton Grafi)

G birleştirilmiş grafi bir Hamilton çevresi içeriyorsa, G ye bir *Hamilton grafi* denir (Ceyhun, 1976).

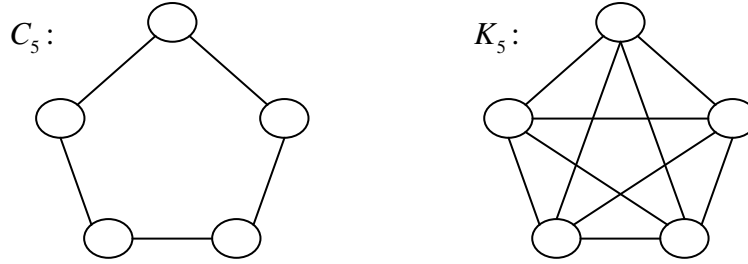
4.5. Gözlem

Bir grafın Hamilton Grafi olabilmesi için, bütün tepelerini içeren bir çevreye (Hamilton çevresine) sahip olması gerekir. Buna karşılık grafın bütün tepelerini içeren

bir yola (Hamilton yoluna) sahip olduğu halde Hamilton grafi olmayan örnekler bulmak mümkündür. Bir grafin Hamilton grafi olabilmesi için bazı yeter koşullar bilinmesine rağmen, gerek ve yeter koşulun ne olduğu (Hamilton graflarının karakteristiği) henüz bilinmemektedir. Bu problem, Hamilton grafları hakkında çözüm bekleyen problemlerden birisi olarak ortada durmaktadır.

4.6. Örnek

Hamilton graflarına en basit örnekler, çevre grafları ve çevre graflarını da içermekte olan tam graf örnekleridir. Yani $n \geq 3$ için C_n ve K_n graflarının hamilton grafi olduklarını görmek kolaydır. Ayrıca çevre içermeyen graflar Hamilton grafi olamayacağından, ağaç ve yol grafları Hamilton grafi olamazlar. Şekil 4.1 de birer Hamilton grafi olan C_5 ve K_5 grafları gösterilmiştir.



Şekil 4.1. C_5 ve K_5 Hamilton grafları

4.7. Gözlem

Örnek 4.6. da verilen C_5 grafini göz önüne alalım. Bu grafin kendisi bir Hamilton çevresidir. Ayrıca (her bir tepeyi başlangıç tepesi olarak seçebileceğimiz) toplam beş tane Hamilton yolu da içermektedir.

Grafin herhangi bir ayrıtını çıkardığımızda, geriye kalan yine birleştirilmiş bir graf olacaktır. Ayrıca bu kez grafin kendisi bir Hamilton yolu haline gelecektir. Ancak çevre içermediğinden bir Hamilton grafi olamayacaktır. Böylece Hamilton yolu içeren her grafin, Hamilton grafi olamayacağını gözlemlemiş oluyoruz.

4.8. Teorem

G grafi $n \geq 3$ tepeli ve birleştirilmiş olsun. Eğer grafta komşu olmayan $\forall u, v \in G$ tepeleri için $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ ise G bir Hamilton grafıdır (Chartrand ve Zhang, 2005).

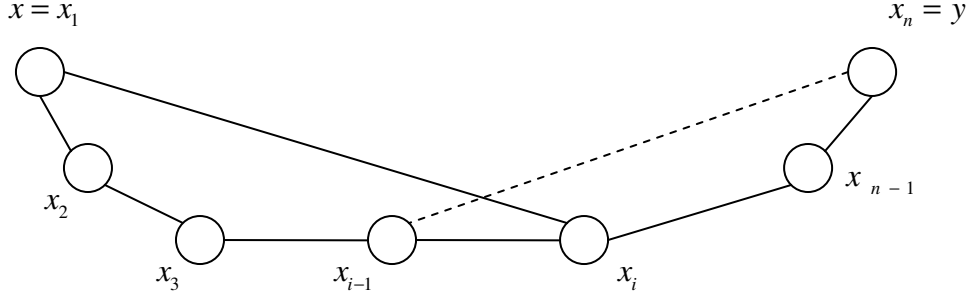
İspat

İspatı yaparken teoremdaki koşulları sağladığı halde Hamilton grafi olmayan bir grafin var olamayacağını göstereceğiz. Kabul edelim ki G grafi teoremdaki koşulları sağladığı halde bir Hamilton grafi olmasın. Yani tepe sayısı $n \geq 3$ olan bir G grafinin birbirleriyle komşu olmayan $\forall u, v \in G$ tepeleri için $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ olduğu halde, G bir Hamilton grafi olmasın.

Bu durumda G ye mümkün olan bütün eksik ayrıtlar eklenirse K_n tam grafına ulaşılacak ve bu graf bir Hamilton grafi olacaktır. Ancak biz oluşacak yeni graf bir Hamilton grafi olmayacak şekilde, G grafına mümkün olduğunca çok ayrıt eklediğimizi düşünelim. Şu halde oluşacak yeni grafa H dersek, H grafına yalnızca bir ayrıt daha eklenmesiyle bir Hamilton grafi oluşacaktır. Aynı zamanda H bir tam graf olmadığından komşu olmayan tepeleri içerecek ve H nin birbiriyle komşu olmayan $\forall u, v \in H$ tepeleri için $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ olacaktır.

Şimdi H grafında komşu olmayan x ve y tepelerini birleştiren bir ayrıt ekleyelim. Bu ayrıt xy ayrıtıdır ve $H + xy$ grafi bir Hamilton grafıdır (Çünkü H grafına yalnızca bir ayrıt eklenmesiyle bir Hamilton grafi oluşacaktır). Dahası $H + xy$ grafinin bir Hamilton çevresi de xy ayrıtını içermek zorundadır. Bunun anlamı H nin $P: x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$ şeklinde bir Hamilton $x - y$ yolu içermesidir.

Biz öyle iddia ediyoruz ki, $2 \leq i \leq n$ için $x_1 x_i$ ayrıtı H grafinin bir ayrıtı olduğu zaman $x_{i-1} x_n$ ayrıtı H nin bir ayrıtı değildir (Şekil 4.2 yi inceleyelim). Aksi durumda $x_1, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_1$ dizisi H grafinin bir Hamilton çevresi olur ki, bu mümkün değildir. Çünkü H grafi bir Hamilton çevresi içeremez.

Şekil 4.2. H grafının bir kesiti

Buradan $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ kümesindeki her bir tepe x_1 tepesine komşu olduğundan $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ kümesindeki hiçbir tepe x_n tepesi ile komşu değildir. Bunun anlamı, $\deg_H(x_n) \leq (n-1) - \deg(x_1)$ ve böylece $\deg_H(x) + \deg_H(y) \leq n-1$ olur ve çelişki elde edilir. Böylece teoremdaki koşulları sağladığı halde Hamilton grafi olmayan bir grafın var olamayacağı ispatlanmış olur.

4.9. Sonuç

G grafi $n \geq 3$ tepeli ve birleştirilmiş olsun. Eğer $\forall u \in G$ tepesi için, $\deg(u) \geq \frac{n}{2}$ ise G bir Hamilton grafıdır (Chartrand ve Zhang, 2005).

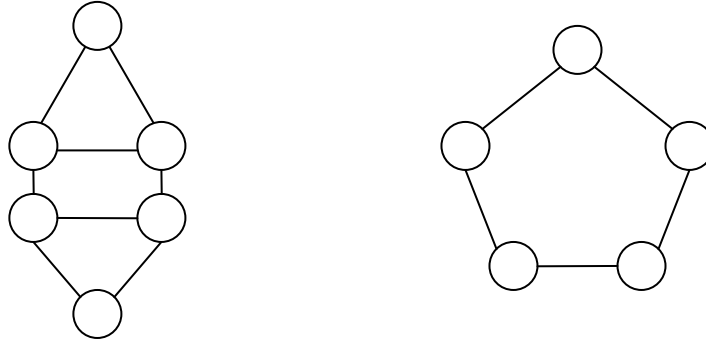
İspat

G nin tam graf yani $G \cong K_n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her tam graf bir Hamilton grafi olduğundan, G bir Hamilton grafi olur.

G nin tam graf olmadığını varsayalım. Bu durumda $\forall u \in G$ tepesi için $\deg(u) \geq \frac{n}{2}$ olması halinde, grafın komşu olmayan herhangi u ve v tepeleri için $\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ olacaktır. Böylece Teorem 4.8 den dolayı G bir Hamilton grafi olacaktır.

4.10. Örnek

Teorem 4.8. de bir grafin Hamilton grafi olabilmesi için yeterli bir koşulu ispatladık. Ancak bu koşulu sağlamadığı halde Hamilton grafi olan örnekler bulmak da mümkündür. Basit bir örnek olarak, tepe sayısı $n \geq 5$ olan C_n grafları bu koşulu sağlamadıkları halde birer Hamilton grafıdır. Şekil 4.3 de bu koşulu sağlamadıkları halde Hamilton grafi olan iki tane graf örneği verilmiştir.



Şekil 4.3. Teorem 4.8 deki koşulu sağlamayan iki Hamilton grafi

4.11. Gözlem

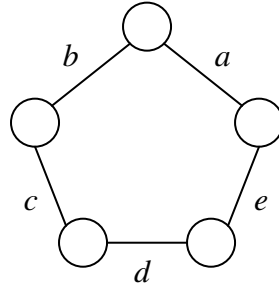
Şekil 4.3 deki grafların tepelerinin sayısı ve bu tepelerin dereceleri göz önüne alındığında Teorem 4.8 deki koşulu sağlamadıkları görülmektedir. Ancak buna rağmen Hamilton çevresi içerdikleri için birer Hamilton grafıdır. Bu graflardan C_5 grafinin kendisi bir Hamilton çevresidir. Diğer grafin sahip olduğu Hamilton çevresi ise C_6 grafıdır.

4.12. Teorem

$n \geq 3$ için K_n tam grafinde bulunan Hamilton çevrelerinin sayısı $\frac{(n-1)!}{2}$ tanedir (Nesim ve ark., 2003).

İspat

K_n tam grafında kaç tane Hamilton çevresi olduğunu araştırmak, aslında bu grafın kaç tane C_n çevresi içerdiğini bulmaya çalışmakla eşdeğerdir. Buna göre grafın n tane tepesinin sıralama ilkesine göre $n!$ farklı şekilde sıralanabileceğini göz önüne alalım. Bu sıralamaların her birisi birer ayırıt dizisi olarak düşünülebilir. Ayrıca her birisi birer çevre grafi oldukları için birer kapalı ayırıt katarıdır. Ancak bu kapalı ayırıt katarlarından bazıları aslında aynı çevrenin farklı gösterimlerinden ibarettir. Bunu daha iyi anlayabilmek için Şekil 4.4 deki C_5 grafını inceleyelim.



Şekil 4.4. C_5 grafi

Şekil 4.4 deki C_5 grafının aslında K_5 grafının içerdiği Hamilton çevrelerinden birisi olduğunu anlamak kolaydır. Dikkat edilirse bu çevrenin birbirinden farklı kapalı ayırıt katarları olarak ifade edilebileceği görülebilir. Bu kapalı ayırıt katarları, C_5 grafının her bir tepesinden başlayarak yine aynı tepede son bulan 5 tane kapalı ayırıt katarı ve bunların tersi yönünde yazılabilecek 5 farklı kapalı ayırıt katarı olarak toplam 10 tanedir. Bu kapalı ayırıt katarları Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1 dikkatli olarak incelendiğinde, gerçekten de bu kapalı ayırıt katarlarından her birisinin aslında aynı çevrenin farklı gösterimleri olduğu görülebilir. Öte yandan bu gösterimlerin her birisi grafın tepelerinin birbirinden farklı birer sıralanışıdır. Böylece C_5 grafının 10 farklı kapalı ayırıt katarı olarak ifade edilebileceğini söylemek mümkündür.

Çizelge 4.1. C_5 grafindaki kapalı ayırıt katarları

<i>abcde</i>
<i>bcdea</i>
<i>cdeab</i>
<i>deabc</i>
<i>eabcd</i>
<i>aedcb</i>
<i>baedc</i>
<i>cbaed</i>
<i>dcbae</i>
<i>edcba</i>

Daha genel bir ifadeyle, K_n grafinda ilk olarak $n!$ tane C_n grafi olduğu düşünülebilir. Ancak K_n grafindaki her bir C_n grafi, tepelerinin her birini başlangıç ve bitiş tepesi olarak kabul eden toplam $2n$ tane kapalı ayırıt katarı olarak düşünülmelidir. Bu göz önüne alındığında K_n grafinin aslında birbirinden farklı $\frac{n!}{2n}$ tane C_n grafi içerdiğini söyleyebiliriz. Bu graflardan her birisi K_n grafinin içerdiği birer Hamilton çevresidir.

Böylece K_n grafinin toplam $\frac{(n-1)!}{2}$ tane Hamilton çevresi içereceği görülmektedir. Bu Hamilton çevrelerinden her birisi K_n grafinin tepelerinden oluşan ancak birbirinden farklı C_n graflarıdır.

4.13. Gezgin Satıcı Problemi (GSP)

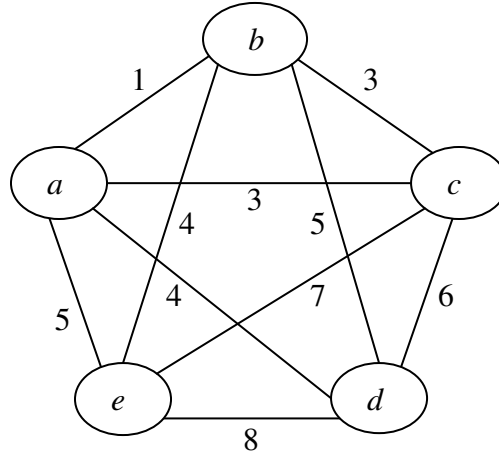
Gezgin Satıcı Problemi'nde amaç bir satıcının bir şehirden başlayarak diğer bütün şehirlere birer defa uğradıktan sonra yine başladığı şehre geri döneceği en kısa yolu bulmaktır. Burada bütün şehirlerin birbirleriyle bağlantılı olan yollarını ve bu yolların uzaklıklarını bilmek gerekmektedir (Nesim ve ark., 2003).

GSP yi anlamak oldukça kolaydır ancak çözümü zordur. Bu problemi çözmeye başlarken şehir merkezlerinin birer tepe, şehirlerin arasındaki yolların ise birer ayırıt olarak düzenleneceği bir graf modeli oluşturmak yararlı olacaktır. Öncelikle grafin

içerdiği bütün Hamilton çevreleri belirlenmeli ve bu çevreler arasında en kısa uzunlukta olanı araştırılmalıdır.

4.14. Örnek

Şekil 4.5 deki K_5 tam grafi şeklinde ifade edilebilen bir GSP yi göz önüne alalım. Çözüm için bu grafin içerdiği bütün Hamilton çevrelerini araştırarak ve en kısa olan çevreyi problemin çözümü olarak belirleyeceğiz.



Şekil 4.5. GSP nin graf modeli

Çözüm

Şekil 4.5 deki diyagramda GSP bir K_5 grafi ile ifade edilmiş ve iki şehrin (tepenin) arasındaki yolların (ayrıtların) uzunlukları gösterilmiştir. Bundan sonra yapılması gereken bu graftaki Hamilton çevrelerini ve bu Hamilton çevrelerinin uzunluklarını belirlemektir.

Teorem 4.12 yardımıyla bir K_n grafinin kaç tane Hamilton çevresi içerdiği belirlenebilmektedir. Teoremdeki formülü uyguladığımızda, K_5 grafinde toplam 12 tane Hamilton çevresi olduğunu hesaplayabiliriz. Çizelge 4.2 de bu grafin içerdiği Hamilton çevreleri ve uzunlukları verilmiştir.

Çizelge 4.2. Graftaki Hamilton çevreleri ve uzunlukları

Hamilton Çevresi	Çevrenin Uzunluğu
a,b,e,c,d,a	22
a,b,e,d,c,a	22
a,c,b,e,d,a	22
a,d,c,b,e,a	22
a,b,c,d,e,a	23
a,b,c,e,d,a	23
a,c,d,b,e,a	23
a,c,e,b,d,a	23
a,b,d,c,e,a	24
a,b,d,e,c,a	24
a,c,b,d,e,a	24
a,d,b,c,e,a	24

Çizelge 4.2 incelendiğinde grafın içerdiği Hamilton çevreleri arasında 22 birim uzunluğunda olan dört tane çevre görülmektedir. Bu çevrelerden her birisi satıcının izleyeceği en ideal güzergâhlar olduğundan, herhangi birisi GSP nin en iyi çözümü olarak kabul edilebilir.

4.15. Gözlem

GSP de satıcının uğramak zorunda olduğu şehir merkezlerinin sayısı arttıkça graftaki Hamilton çevrelerinin sayısı artacaktır ve problemin çözümü daha uzun sürecektir. Örneğin, Teorem 4.12 yardımı ile K_6 grafının toplam 60 tane Hamilton çevresi içerdiği, K_{10} grafında ise 181.440 tane Hamilton çevresi bulunduğunu görebiliriz. Böylece 10 tane şehirden oluşan bir GSP nin çözümü için 181.440 tane Hamilton çevresinin göz önüne alınması gerekmektedir.

4.16. GSP İçin Çözüm Yöntemleri

Çok şehirli GSP'leri çözmek için pratik olan yöntem, yaklaşık çözümler üreten sezgisel algoritmaları kullanmaktır. Bu yöntemler en iyi çözümü garanti etmezler ancak çözüme yakın sonuçlara daha kısa sürede ulaşılmasına olanak tanırırlar. Şimdi bu algoritmalarından bazılarını inceleyelim.

a) En Yakın Şehir Algoritması :

Bu algoritma, satıcının bir şehirden diğerine giderken henüz ziyaret etmediği şehirler arasından en yakın olanı tercih etmesi ilkesine dayanır. Örnek 4.14 deki GSP için a şehirden başlangıç yapan bir satıcı 'en yakın şehir algoritması' yardımıyla 23 birim uzunluğundaki $abcdea$ yolunu izleyerek gezisini tamamlar. Ancak bu çözüm GSP nin gerçek çözümü olan 22 birimden 1 birim daha uzun bir çevreye karşılık gelmektedir.

Eğer bir graftaki herhangi a, b, c tepelerinin aralarındaki uzaklıklar için $d_{a,c} \leq d_{a,b} + d_{b,c}$ eşitsizliği sağlanıyorsa, bu graf için 'üçgen eşitsizliğini sağlayan graf' denilebilir. Bunun anlamı, bu grafın iki tepesi arasındaki en kısa yolun o iki tepe arasındaki tek ayrıtla sağlanabilecek olmasıdır. Bir grafta tepeler şehirleri ve ayrıtlar ise bu şehirlerin arasındaki yolları ifade ediyorsa bu varsayım geçerli olacaktır.

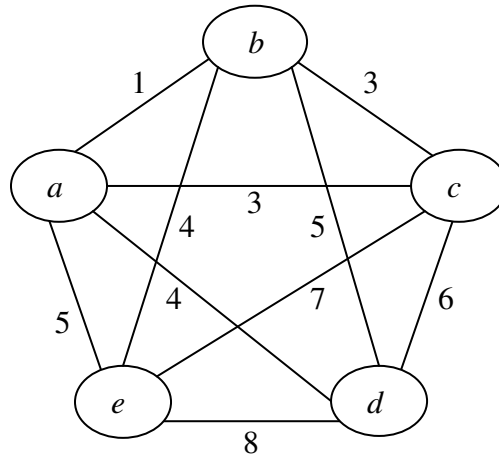
Şimdi üçgen eşitsizliğini sağlayan bir grafta, Hamilton çevrelerinden en kısa olanının en fazla iki katı kadar uzunluktaki bir Hamilton çevresini çözüm olarak üreten sezgisel bir algoritmayı daha ifade edelim.

b) En Kısa Çevre Algoritması :

Bir G grafının en kısa ayrıtlardan oluşan geren ağacı olarak T yi göz önüne alalım. Böylece G grafının bütün tepeleri T ağacında bulunacak ve T ağacındaki ayrıtların uzunlukları toplamı mümkün olduğunca küçük olacaktır. Burada T nin her bir ayrıtı için ikinci bir ayrıt eklenerek yeni bir graf oluşturulabilir. Bu grafa G_0 grafi diyelim. G_0 grafindaki bütün tepelerin derecesi çift olacaktır. Bu sayede G_0 grafinda

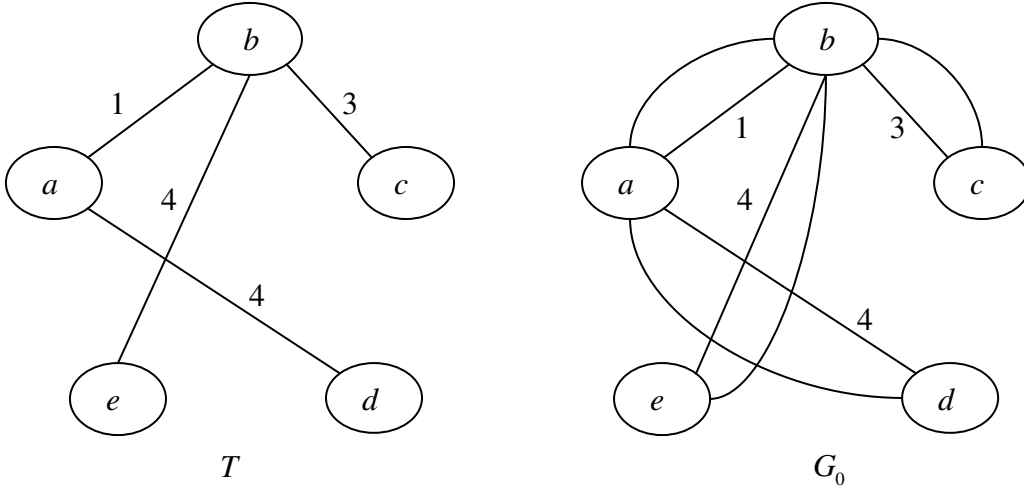
bir tepeden başlayarak bütün ayrıtlardan birer defa geçen ve başladığı tepeye dönen bir kapalı ayrıt katarı vardır. Bu kapalı ayrıt katarının tepeleri sırasıyla yazılarak ve tekrar eden bir tepe yerine G grafında bulunan alternatif ayrıtı kullanılarak, G grafındaki her tepeden bir defa geçen ve bütün tepelere uğrayan bir çevre (Hamilton çevresi) elde edilecektir.

Algoritmayı Örnek 4.14 deki GSP için uygulayalım. GSP nin Şekil 4.6 daki grafi göz önüne alarak, algoritmada ifade edilen geren ağacını belirleyelim.



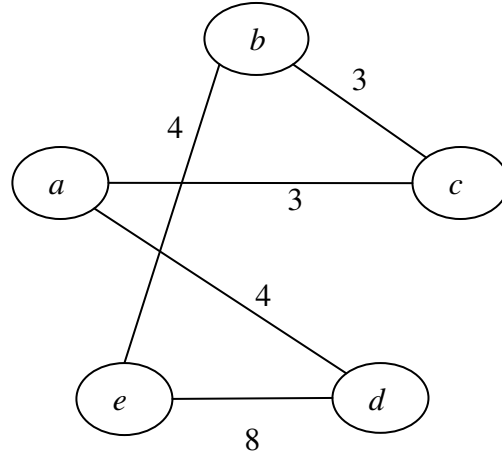
Şekil 4.6. GSP nin graf modeli

Bunun için grafın ayrıtlarını uzunlukları en kısıdan uzun olana doğru $ab, bc, ac, be, ad, ae, bd, cd, ec, ed$ şeklinde sıralayalım. Bu sıralamadaki en kısa ayrıt olan ab ayrıtından başlayacağız. Bu ayrıtla bağlantılı olan a ve b tepelerini ilk iki tepe olarak seçeceğiz. Ardından sırası ile ağaç grafının özelliğini bozmayacak şekilde seçeceğimiz ayrıtları sırasıyla ekleyerek, GSP için algoritmada ifade edilen T geren ağacına ulaşırız. Ardından T grafının her bir ayrıtını çiftleyerek G_0 grafına ulaşacağız. Şekil 4.7 de T ve G_0 grafları gösterilmiştir.



Şekil 4.7. T ve G_0 grafları

G_0 grafi üzerinde bütün tepeleri içeren bir kapalı ayırıt katarı bulunabilir. Bu kapalı ayırıt katarlarından birisinin $e, b, c, b, a, d, a, b, e$ dizisi olduğu görülebilir. Bu kapalı ayırıt katarında e tepesinden b tepesine ve ardından c tepesine ulaşılır. Bunun ardından tekrar b tepesine dönerken, bundan yapmaktan vazgeçecek ve GSP deki alternatif ayırıtı kullanarak bir Hamilton çevresi belirlemeye başlayacağız. Bunun için e, b, c, b, a dizisinde b tepesini atlayarak a tepesine yöneleceğiz. Böylece b tepesini ikinci kez ziyaret etmemiş ve çevre oluşturma şartını bozmamış olacağız. Benzer şekilde d tepesinin ardından da e tepesine yöneleceğiz. Bütün bu dönüştürme işlemleri tamamlandıktan sonra GSP nin graf modelinin barındırdığı Hamilton çevrelerinden birisi e, b, c, a, d, e şeklinde oluşacaktır. Problemin çözümlerinden birisi olan bu çevrenin uzunluğu 22 birimdir ve GSP nin en iyi çözümlerinden birisidir. Ancak bu sezgisel yolla her zaman en iyi çözümün bulunabileceği kesin değildir. Şekil 4.8 de GSP için en iyi çözüm olan Hamilton çevrelerinden birisi gösterilmiştir.



Şekil 4.8. GSP nin çözümü

5. HAMILTON RENKLENDİRMESİ

Bu bölümde öncelikle grafların tepelerinin renklendirilmesi hakkında temel bilgiler üzerinde durulmuş, ardından graflar için tepelerin özel bir renklendirme şekli olan Hamilton renklendirmesi daha detaylı olarak incelenmiştir.

5.1. Graflarda Tepelerin Renklendirilmesi

Graflarda tepelerin renklendirilmesi kavramı, grafin her bir tepesine bir renk atanması yoluyla tepelerinin sınıflandırılması anlamını taşımaktadır. Tepelere atanan bu renkler, aynı rengin atandığı tepelerin bazı açılardan benzer özellikler taşıdığını ifade ederler. Bir diğer renklendirme biçimi ise tepeler yerine ayrıtlara renkler atanması ve ayrıtların sınıflandırılmasıdır. Ancak biz bu çalışmada renklendirme kavramını tepelerin renklendirilmesi olarak ele alacağız.

5.1.1. Tanım (Renklendirme Fonksiyonu)

Bir grafin tepeleri klasik olarak renklendirilirken komşu olan tepelerin renkleri birbirlerinden farklı olarak atanırlar. Öte yandan bir G grafinin bir k -renklendirmesi denildiğinde, grafin tepeler kümesinden pozitif tamsayılar kümesine tanımlanmış olan bir fonksiyon anlaşılır.

Yani $\alpha : V_G \rightarrow [1, k]$ şeklindeki fonksiyon grafin bir α renklendirmesini belirtmektedir. Burada α renklendirmesi göz önüne alınarak bir $u \in G$ tepesine atanan renk $\alpha(u)$ ile gösterilir (Harju, 2007).

5.1.2. Tanım (Düzgün Renklendirme)

Eğer G grafinin bir α renklendirmesinde komşu olan $\forall u, v \in G$ tepeleri için $\alpha(u) \neq \alpha(v)$ oluyorsa, bu renklendirmeye *düzgün (uygun) renklendirme* denir (Harju, 2007).

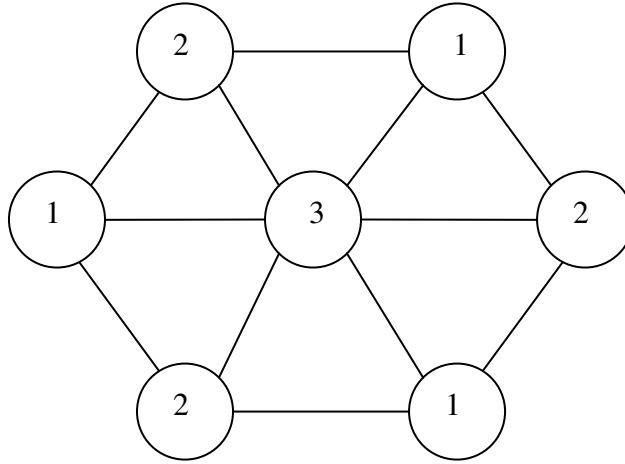
Eğer G grafinin bir düzgün k -renklendirmesi varsa, bu G grafi için k -renklendirilebilirdir denir. Buna bağlı olarak G grafinin kromatik değeri $\chi(G)$ ile gösterilir ve $\chi(G) = \min\{k : G \text{ nin bir düzgün } k\text{-renklendirmesi var}\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $\chi(G) = k$ iken, G grafi k -kromatik olur (Harju, 2007).

5.1.3. Gözlem

Her bir düzgün renklendirme $\alpha : V_G \rightarrow [1, k]$ iken grafin tepe kümesinin bir $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ parçalanışını verir. Öyle ki bu parçalanışta $V_i = \{v : \alpha(v) = i\}$ olur.

5.1.4. Örnek

Şekil 5.1 deki graf 3-kromatik bir graftır. Yani renklendirme yapılırken, grafin komşu olan tepelerine farklı renkler atanarak toplam 3 tane renk kullanılmıştır.



Şekil 5.1. 3-kromatik graf

5.2. Graflarda Hamilton Renklendirmesi

Graflarda tepelerin renklendirilmesi ile ilgili olarak çeşitli koşullar ve bu koşullara bağlı olarak değişik renklendirme biçimleri geliştirilmiştir. Bunlardan birisi de Hamilton renklendirmesidir. Hamilton renklendirmesi ile grafin tepelerine, tepe çiftlerinin aralarındaki yollardan en uzun olanının ayrıt sayısına ve grafin tepe sayısına dayalı olarak birer pozitif tamsayı atanmakta ve graf için bu koşulları sağlayan en uygun renklendirme bulunmaya çalışılmaktadır.

5.2.1. Tanım (De-tour Uzaklığı)

G grafında birbirinden farklı olan $u, v \in G$ tepelerini göz önüne alalım. Bu iki tepe arasındaki yollardan en fazla sayıda ayrıt içeren yolun ayrıt sayısına bu iki tepenin *De-tour uzaklığı* denir ve $D(u, v)$ ile gösterilir (Chartrand ve Zhang, 2005).

5.2.2. Tanım (Hamilton Renklendirmesi)

G nin bir Hamilton renklendirmesi, grafin tepelerine pozitif tamsayıların atanmasıdır, öyle ki ; grafin bir $u \in G$ tepesine atanan renk (pozitif tamsayı) $c(u)$ ile gösterilir ve bu atamada; n tane tepe içeren bir G grafinin birbirinden farklı olan $\forall u, v \in G$ tepeleri için $D(u, v) + |c(u) - c(v)| \geq n - 1$ şartı sağlanmalıdır (Chartrand ve ark., 2005a).

Tanımdan da anlaşılabileceği gibi, bir graf için bu koşulu sağlayan birçok renklendirme belirlenebilir.

5.2.3. Tanım (Kromatik Değer)

Bir G grafinin Hamilton renklendirmelerinden birisi c olsun. Bu renklendirmeye göre grafin tepelerine atanan pozitif tamsayılar arasında en büyük olan değer, bu c renklendirmesinin *kromatik değerini* verir ve $hc(c)$ ile gösterilir.

Yani $hc(c) = \max\{c(u) : u \in G\}$ dir (Chartrand ve ark., 2005a).

5.2.4. Tanım (Hamilton Kromatik Değer)

Bir G grafi üzerinde uygulanabilecek bütün Hamilton renklendirmelerinin kromatik değerleri arasında en küçük olanı, bu grafin *Hamilton kromatik değerini* verir ve $hc(G)$ ile gösterilir (Chartrand ve ark., 2005a).

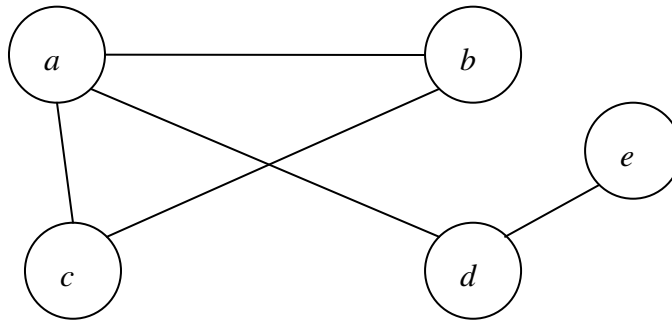
Yani $hc(G) = \min \{hc(c) : c, G \text{ üzerinde bir Hamilton renklendirmesidir}\}$

5.2.5. Gözlem

Graf üzerindeki bir Hamilton renklendirmesinin kromatik değeri araştırılırken, bu renklendirme esas alınarak grafin tepelerine atanan pozitif tamsayılar arasından en büyük olanı dikkate alınmaktadır. Öte yandan grafin Hamilton kromatik değeri belirlenirken ise bu graf üzerindeki bütün Hamilton renklendirmelerinin kromatik değerleri arasında en küçük olanı seçilmektedir. Böylece bir G grafinin Hamilton kromatik değeri araştırılırken, aslında G için minimum Hamilton renklendirmesinin belirlenmesi gerekmektedir.

5.2.6. Örnek

Şekil 5.2 deki G grafinin Hamilton kromatik değerini araştıralım.



Şekil 5.2. G grafi

Çözüm

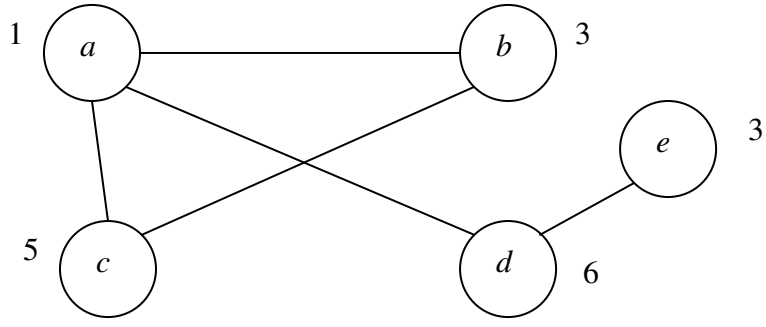
G grafinin Hamilton kromatik değerini bulabilmek için, en uygun olan Hamilton renklendirmelerinden birisini belirleyelim. Grafin tepe sayısının $n = 5$ olduğunu dikkate alarak, kuralımızı bütün tepe çiftlerine uygulayacağız. Tepelere atanacak renkleri belirlerken renk atayacağımız her bir tepe için, daha önce renk atadığımız bütün tepelerle ayrı ayrı karşılaştırma yapmamız gerektiğini göz önünde bulundurmalıyız.

Grafin bir minimum Hamilton renklendirmesini belirlemek için de-tour uzaklığı küçük olan tepe çiftleri belirleyici olacağından, tepelere minimum renk atamalarını yaparken bunu göz önünde bulundurmak gerekecektir. Grafin tepe çiftleri için de-tour uzaklıkları olan $D(a,d)=1$, $D(d,e)=1$, $D(a,e)=2$, $D(a,b)=2$, $D(a,c)=2$, $D(b,c)=2$, $D(b,d)=3$, $D(c,d)=3$, $D(b,e)=4$, $D(c,e)=4$ değerlerini dikkate alarak öncelikle a , d ve e tepelerinin renk atamalarını yapacağız.

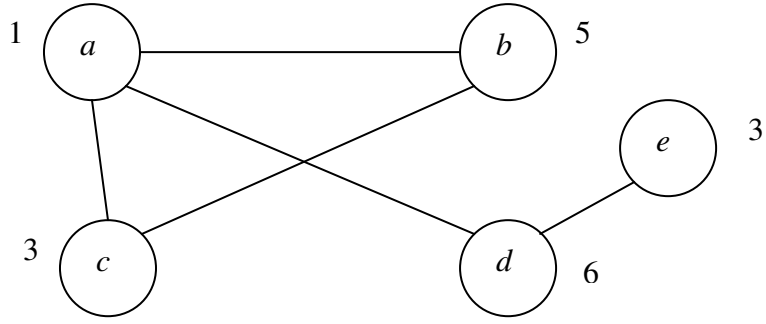
$c(a)=1$ olsun. $D(a,d)=1$, $D(a,e)=2$ ve $D(d,e)=1$ olmasını ve Hamilton renklendirmesinin şartlarını dikkate alarak $c(d)=6$ ve $c(e)=3$ şeklindeki bir atama yapabiliriz. Bunun ardından $D(a,b)=2$, $D(b,d)=3$ ve $D(b,e)=4$ olduğunu göz önüne alarak $c(b)=3$ şeklinde bir atama yapabiliriz. Son olarak da $D(a,c)=2$, $D(b,c)=2$, $D(c,d)=3$ ve $D(c,e)=4$ olduğunu dikkate alarak $c(c)=5$ atamasını yapacağız. Böylece bütün tepelere birer renk atamış olduk.

Gözlem 5.2.5 te bir graf üzerinde birçok Hamilton renklendirmesi uygulanabileceği ifade edilmiştir. Ancak bu renklendirmenin Hamilton kromatik değerini verebilmesi için graf üzerindeki minimum Hamilton renklendirmelerinden birisi olması gerekir. G grafi üzerinde yaptığımız renklendirmede de-tour uzaklıkları dikkate alınarak renkleri atayacağımız sırayı belirledik ve böylece grafa en uygun Hamilton renklendirmelerinden birisini uyguladık. Sonuç olarak grafin tepelerine Hamilton renklendirmesini uyguladığımızda Şekil 5.3 (a) daki gibi bir renklendirme ile karşılaşmış oluruz ve bu renklendirme grafin Hamilton kromatik değerini veren minimum Hamilton renklendirmelerinden birisidir. Yani $hc(G)=6$ olur.

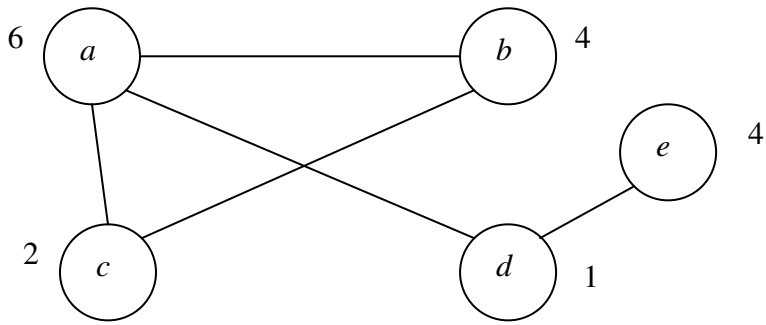
Şekil 5.3 (b) ve Şekil 5.3 (c) de graf üzerinde uygulanabilecek minimum Hamilton renklendirmelerden ikisi daha gösterilmiştir.



(a)



(b)

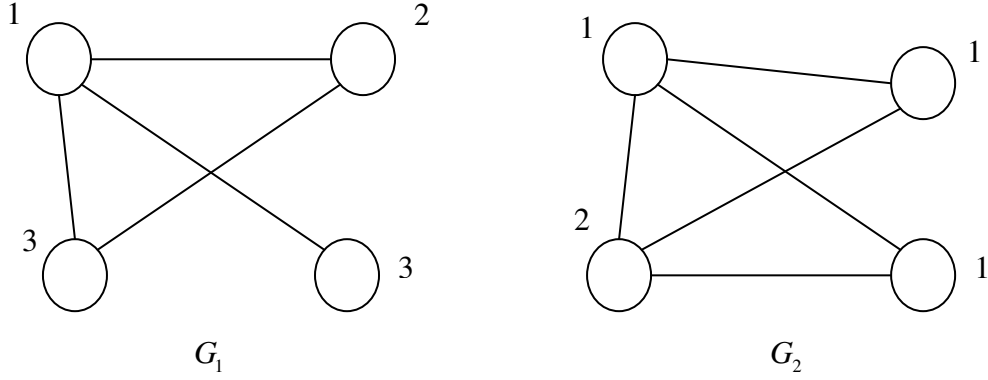


(c)

Şekil 5.3. G grafının minimum Hamilton renklendirmeleri

5.2.7. Örnek

Şekil 5.4 de iki farklı grafın birer minimum Hamilton renklendirmeleri verilmiştir. Bu grafların Hamilton kromatik değerleri sırasıyla $hc(G_1) = 3$ ve $hc(G_2) = 2$ olarak gerçekleşmiştir.



Şekil 5.4. G_1 ve G_2 graflarının minimum Hamilton renklendirmeleri

5.2.8. Teorem

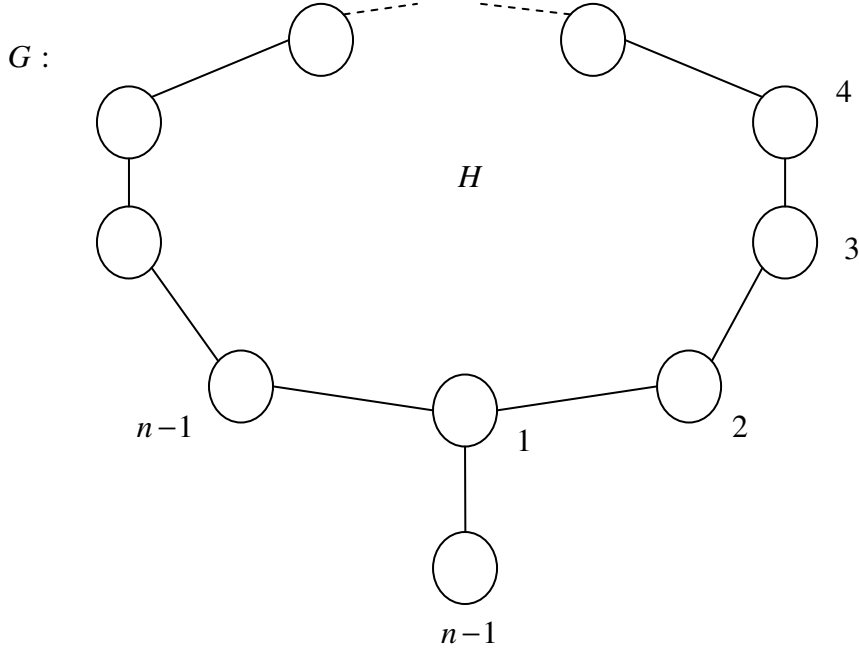
H grafi $n-1 \geq 3$ tepeli bir Hamilton grafi olsun. H grafına bir askı ayrıtı eklenmesiyle elde edilen bir G grafi için $hc(G) = n-1$ olur (Chartrand ve ark., 2005a).

İspat

$C = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_1$ çevresi H grafının bir Hamilton çevresi, $v_1 v_n$ ayrıtı da G grafının askı ayrıtı olsun. G üzerinde bir Hamilton renklendirmesi olarak c yi göz önüne alalım.

$\forall u, v \in V(C)$ için $D(u, v) \leq n-2$ olduğundan C üzerinde aynı rengin atanacağı hiçbir tepe çifti yoktur. Bu ise $hc(c) \geq n-1$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $hc(G) \geq n-1$ olur.

Şimdi de G üzerinde bir c_0 renklendirmesini $c_0(v_i) = i$ ($1 \leq i \leq n-1$) ve $c_0(v_n) = n-1$ olacak şekilde tanımlayalım (Şekil 5.5 incelenebilir).



Şekil 5.5. G üzerinde tanımlanan c_0 Hamilton renklendirmesi

Şimdi biz c_0 renklendirmesinin bir Hamilton renklendirmesi olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak $1 \leq i < j \leq n-1$ olmak üzere v_i ve v_j tepelerini göz önüne alalım. Bu durumda $|c_0(v_i) - c_0(v_j)| = j - i$ ve $D(v_i, v_j) \geq n-1 + i - j$ olduğu görülebilir. Buradan da $|c_0(v_i) - c_0(v_j)| + D(v_i, v_j) \geq n-1$ olacaktır.

Şimdi de $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere v_i ve v_n tepelerini göz önüne alalım. Bu durumda $|c_0(v_i) - c_0(v_n)| = n-1-i$ ve $D(v_i, v_n) \geq i$ olduğu görülebilir. Buradan da $|c_0(v_i) - c_0(v_n)| + D(v_i, v_n) \geq n-1$ olacaktır.

Böylece c_0 renklendirmesi G grafi üzerinde bir Hamilton renklendirmesi olur. Buradan da $hc(G) \leq hc(c_0) = n-1$ sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır.

5.2.9. Gözlem

Hamilton grafları ile ilgili bölümde, Hamilton bağlantılılık kavramını ifade etmiştik. Buna göre, herhangi iki tepesi arasında bir Hamilton yolu (grafın bütün tepelerini içeren bir yol) bulunan bir graf Hamilton bağlantılıdır. Bu kavramlar ışığında aşağıdaki gözlemi yapabiliriz.

Bağlantılı bir G grafının Hamilton bağlantılı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $hc(G)=1$ olmasıdır (Chartrand ve ark., 2005a). Çünkü n tepeli bir graf için bütün tepelerin aynı rengi alması, tepe çiftleri arasındaki de-tour uzaklığının $n-1$ olması ile mümkün olabilir. Bunun için de grafın Hamilton bağlantılı olması gerekir.

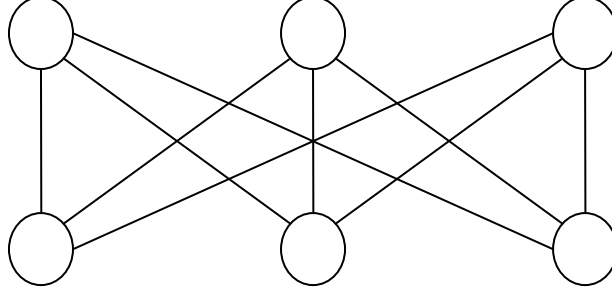
Bu gözlem yardımıyla şöyle bir soru akla gelebilir. Acaba bağlantılı bir grafın Hamilton kromatik değerini bulmak, bize bu grafın Hamilton bağlantılı olmaya ne kadar yaklaştığı ile ilgili bir fikir verebilir mi? Bu sorunun yanıtı evettir. Bir grafın Hamilton kromatik değeri 1 olmaya ne kadar yaklaşırsa, grafın Hamilton bağlantılı olması giderek daha fazla mümkün hale gelir. Ayrıca grafın iki farklı tepesine atanan renkler aynı olduğunda, bu iki tepe arasında bir Hamilton yolu mevcut olacaktır.

5.2.10. Gözlem

$n \geq 3$ için K_n grafı Hamilton bağlantılı olduğundan $hc(K_n)=1$ dir. Bu gözlemi K_n grafı için herhangi iki tepe arasındaki de-tour uzaklığının $n-1$ olmasına dayanarak yapıyoruz. Buna bağlı olarak Hamilton renklendirmesinin koşulları göz önüne alındığında, K_n grafı için her bir tepeye atanan renk 1 olarak seçilebilmektedir.

5.2.11. Gözlem

Tam iki parçalı $K_{r,r}$ grafını göz önüne alalım. Bu graf $n=2r$ tane tepesi olan bir Hamilton grafıdır. Ancak Hamilton grafı olmasına karşın Hamilton bağlantılı değildir. Bu örnek yardımıyla bir Hamilton grafının Hamilton bağlantılı olmayabileceğini de görmüş oluyoruz. Şekil 5.6 da $K_{3,3}$ grafı verilmiştir. Bu graf Hamilton grafı olmasına rağmen Hamilton bağlantılı değildir.



Şekil 5.6. $K_{3,3}$ grafi

$K_{r,r}$ grafinın Hamilton bağlantılı olmadığını görmek için grafa Hamilton renklendirmesi uygulanabilir. Bu grafin $u, v \in K_{r,r}$ tepeleri için de-tour uzaklığının,

$$D(u, v) = \begin{cases} n-1 & , \quad uv \in E(K_{r,r}) \text{ ise} \\ n-2 & , \quad uv \notin E(K_{r,r}) \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde olduğunu görebiliriz. Komşu olmayan tepeler için de-tour uzaklığının $n-2$ olması, bu iki tepeye farklı renkler atanması sonucunu doğuracak ve böylece $hc(K_{r,r}) \neq 1$ olacaktır. Buradan $K_{r,r}$ grafinın Hamilton bağlantılı bir graf olmadığı görülecektir.

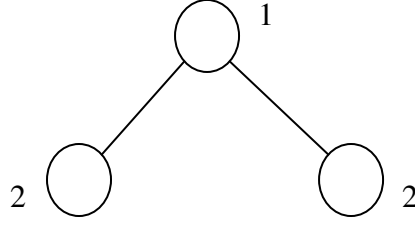
Şimdi de $r < s$ olduğunda ve $r=1$ ile başlayarak $hc(K_{r,s})$ yi belirlemeye çalışalım.

5.2.12. Teorem

$n \geq 3$ için $hc(K_{1,n-1}) = (n-2)^2 + 1$ dir (Chartrand ve ark., 2005a).

İspat

$n=3$ için $hc(K_{1,2}) = 2$ olduğundan teoremdeki ifade sağlanır. Şekil 5.7 de $K_{1,2}$ grafinın minimum Hamilton renklendirmesi verilmiştir.



Şekil 5.7. $K_{1,2}$ grafının minimum Hamilton renklendirmesi

Şimdi $n \geq 4$ olduğunu varsayalım. $G = K_{1,n-1}$ tepelerinin kümesi $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan bir graf olsun. Burada v_n tepesi G grafının merkez tepesidir. G grafı üzerinde bir c renklendirmesini $c(v_n) = 1$ ve $1 \leq i \leq n-1$ için $c(v_i) = (n-1) + (i-1)(n-3)$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu c renklendirmesi bir Hamilton renklendirmesi olduğundan $hc(G) \leq hc(c) = c(v_{n-1}) = (n-1) + (n-2)(n-3) = (n-2)^2 + 1$ olacaktır.

Bundan sonra $hc(G) \geq (n-2)^2 + 1$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi c renklendirmesini G nin minimum Hamilton renklendirmesi olarak alalım. G grafı bir Hamilton yolu içermediği için, bu renklendirmede grafın hiçbir tepe çifti aynı rengi alamaz. Kabul edelim ki $c(v_1) < c(v_2) < \dots < c(v_{n-1})$ olsun. Burada üç farklı durumu göz önüne alıp incelemeliyiz.

Durum 1 :

$c(v_n) = 1$ olsun. $D(v_1, v_n) = 1$ ve $1 \leq i \leq n-2$ için $D(v_i, v_{i+1}) = 2$ olduğundan $c(v_1) \geq n-1$ ve $1 \leq i \leq n-2$ için $c(v_{i+1}) \geq c(v_i) + (n-3)$ yazılabilir. Buradan da $c(v_{n-1}) \geq (n-1) + (n-2)(n-3) = (n-2)^2 + 1$ ifadesi elde edilir ve dolayısıyla $hc(c) = hc(G) \geq (n-2)^2 + 1$ olur.

Durum 2 :

$c(v_n) = hc(c)$ olsun. O halde $1 = c(v_1) < c(v_2) < \dots < c(v_{n-1}) < c(v_n)$ olacaktır. Ayrıca $2 \leq i \leq n-1$ koşulunu sağlayan $\forall i \in \mathbb{N}$ için $c(v_i) \geq (n-2) + (i-2)(n-3)$ yazılabilir. Özellikle de $c(v_{n-1}) \geq (n-2) + (n-3)(n-3) = n^2 - 5n + 7$ olduğunu dikkate

olarak buradan $c(v_n) \geq c(v_{n-1}) + (n-2) \geq (n^2 - 5n + 7) + (n-2) = (n-2)^2 + 1$ yazılabilir.

Böylece $hc(c) = hc(G) \geq (n-2)^2 + 1$ olur.

Durum 3 :

$1 \leq j \leq n-2$ koşulunu sağlayan $\exists j \in \mathbb{N}$ için $c(v_j) < c(v_n) < c(v_{j+1})$ olsun.

Buradan,

$$c(v_j) \geq (n-2) + (j-2)(n-3)$$

$$c(v_n) \geq c(v_j) + (n-2) = 2(n-2) + (j-2)(n-3)$$

$$c(v_{j+1}) \geq c(v_n) + (n-2) \geq 3(n-2) + (j-2)(n-3) \quad \text{yazılabilir. Bu ifadeler yardımıyla,}$$

$$c(v_{n-1}) \geq 3(n-2) + (n-4)(n-3) = n^2 - 4n + 6 > (n-2)^2 + 1 \quad \text{yazılabilir ve buradan da,}$$

$$hc(c) = hc(G) \geq (n-2)^2 + 1 \quad \text{olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.}$$

Şimdi de $2 \leq r < s$ olmak üzere $K_{r,s}$ grafını göz önüne alalım. Bu grafın tepelerinin parçalanış kümeleri V_1 ve V_2 için $|V_1| = r$ ve $|V_2| = s$ olsun. Böylece,

$$D(u, v) = \begin{cases} 2r-2=n-s+r-2 & , \quad u, v \in V_1 & \text{ise} \\ 2r-1=n-s+r-1 & , \quad uv \in E(K_{r,s}) & \text{ise} \\ 2r=n-s+r & , \quad u, v \in V_2 & \text{ise} \end{cases}$$

şeklindedir ve sonuç olarak, c renklendirmesi $K_{r,s}$ üzerinde bir Hamilton renklendirmesi iken,

$$|c(u) - c(v)| \geq \begin{cases} s-r+1 & , \quad u, v \in V_1 & \text{ise} \\ s-r & , \quad uv \in E(K_{r,s}) & \text{ise} \\ s-r-1 & , \quad u, v \in V_2 & \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde olur. Bu değerleri belirledikten sonra aşağıdaki teoremi inceleyelim.

5.2.13. Teorem

$r, s \in \mathbb{N}$ için $2 \leq r < s$ iken $hc(K_{r,s}) = (s-1)^2 - (r-1)^2$ dir (Chartrand ve ark., 2005a).

İspat

$K_{r,s}$ grafının parçalanış kümeleri $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ ve $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ olsun. Şimdi $K_{r,s}$ grafi üzerinde bir c renklendirmesini;

$$1 \leq i \leq r-1 \text{ için } c(u_i) = 1 + (i-1)(s-r+1) \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} 1 \leq j \leq s \text{ için } c(v_j) &= c(u_{r-1}) + (s-r) + (j-1)(s-r-1) \\ &= (r-1)(s-r+1) + (j-1)(s-r-1) \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Burada c renklendirmesi $K_{r,s}$ üzerinde bir Hamilton renklendirmesi olduğundan $hc(K_{r,s}) \leq hc(c) \leq (s-1)^2 - (r-1)^2$ şeklinde yazılabilir.

Bundan sonra geriye $hc(K_{r,s}) \geq (s-1)^2 - (r-1)^2$ olduğunu göstermek kalıyor. Şimdi c renklendirmesi $K_{r,s}$ grafi üzerinde bir Hamilton renklendirmesi ve $c(w_1) \leq c(w_2) \leq \dots \leq c(w_{r+s})$ için $V(K_{r,s}) = \{w_1, w_2, \dots, w_{r+s}\}$ olsun.

$K_{r,s}$ nin bir V_1 bloğu derken; $1 \leq \alpha \leq \beta \leq r+s$ için $A \subseteq V_1$, $\alpha > 1$ için $w_{\alpha-1} \in V_2$ ve $\beta < r+s$ için $w_{\beta+1} \in V_2$ şartlarını sağlayan $A = \{w_\alpha, w_{\alpha+1}, \dots, w_\beta\}$ kümesini kastediyoruz. $K_{r,s}$ nin bir V_2 bloğunu da benzer şekilde tanımlayabiliriz.

$p \geq 1$ ise $A_1, A_2, \dots, A_p$ kümeleri $K_{r,s}$ nin farklı V_1 bloklarıdır. Öyle ki $1 \leq i < j \leq p$ için $w' \in A_i$ ve $w'' \in A_j$ için $c(w') < c(w'')$ olur.

$p \geq 2$ ise $K_{r,s}$ grafi $1 \leq i \leq p-1$ şartını sağlayan $\forall i \in \mathbb{N}$ için $B_1, B_2, \dots, B_{p-1}$ şeklindeki blokları içerir ve $w' \in A_i$, $w \in B_i$, $w'' \in A_{i+1}$ için $c(w') < c(w) < c(w'')$ olur.

$K_{r,s}$ grafi B_0 ve B_p denilen iki tane V_2 bloğu daha içerebilir. Öyleki, $y \in B_0$ ve $y' \in A_1$ iken $c(y) < c(y')$; $z \in A_p$ ve $z' \in B_p$ iken $c(z) < c(z')$ dir.

Eğer $p=1$ ise B_0 ve B_1 den en az bir tanesi mevcuttur. Burada $t \in \{0,1,2\}$ için $K_{r,s}$ grafi tam olarak p tane V_1 bloğu ve $(p-1+t)$ tane V_2 bloğu içerir.

Sonuç olarak $K_{r,s}$ içinde;

- (1) Her ikisi de V_1 bloğuna ait olan $(r-p)$ tane ve birbirinden farklı $\{w_i, w_{i+1}\}$ tepe ikilileri vardır,
- (2) Tam olarak ikisinden birisinin V_1 bloğuna ait olduğu $(2p-2+t)$ tane ve birbirinden farklı $\{w_i, w_{i+1}\}$ tepe ikilileri vardır,
- (3) Her ikisi de V_2 bloğuna ait olan $s-(p-1+t)$ tane ve birbirinden farklı $\{w_i, w_{i+1}\}$ tepe ikilileri vardır.

Yukarıdaki ifadeler ışığında;

‘(1)’ ifadesi her ikisi de V_1 bloğuna ait olan w_i ve w_{i+1} tepelerini renkleri (atanacak pozitif tamsayıları) birbirinden en az $(s-r+1)$ fark olacak şekilde renklendirir,

‘(2)’ ifadesi tam olarak birisi V_1 bloğuna ait olan w_i ve w_{i+1} tepelerini renkleri (atanacak pozitif tamsayıları) birbirinden en az $(s-r)$ fark olacak şekilde renklendirir,

‘(3)’ ifadesi her ikisi de V_2 bloğuna ait olan w_i ve w_{i+1} tepelerini renkleri (atanacak pozitif tamsayıları) birbirinden en az $(s-r-1)$ fark olacak şekilde renklendirir,

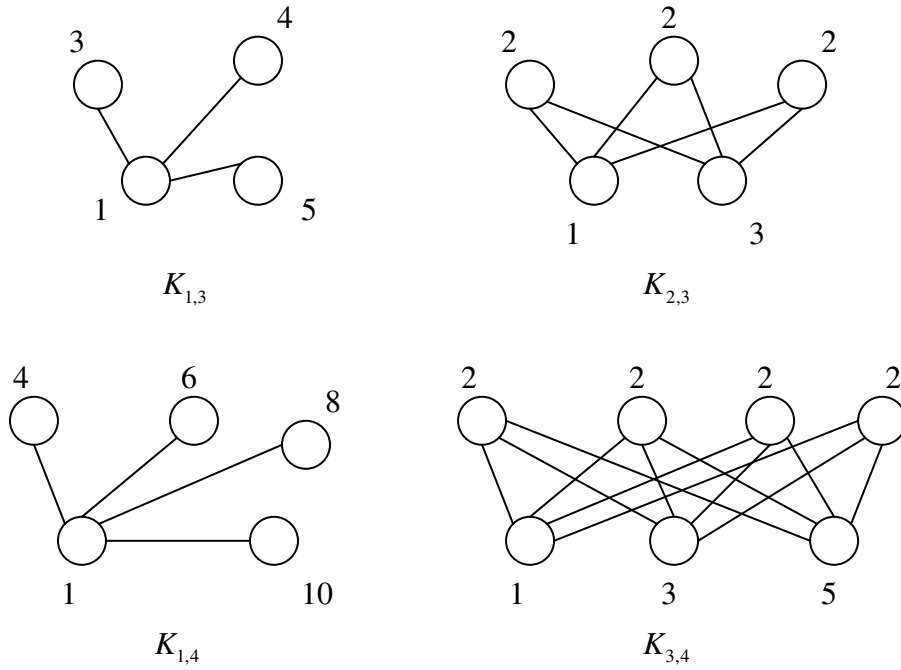
sonuçlarına ulaşabiliriz. Bu ifadeleri,

$$c(w_{r+s}) \geq 1 + (r-p)(s-r+1) + (2p-2+t)(s-r) + (s-(p-1+t))(s-r-1) = (s-1)^2 - (r-1)^2 + t$$

olması takip eder. Buradan da $hc(K_{r,s}) \leq (s-1)^2 - (r-1)^2$ ve $t \geq 0$ olduğundan, $t = 0$ ve $hc(K_{r,s}) = (s-1)^2 - (r-1)^2$ olduğu sonucuna ulaşılır ve ispat biter.

5.2.14. Örnek

Şekil 5.8 de bazı yıldız ve tam iki parçalı grafların minimum Hamilton renklendirmeleri verilmiştir.



Şekil 5.8. Bazı yıldız ve tam iki parçalı grafların minimum Hamilton renklendirmeleri

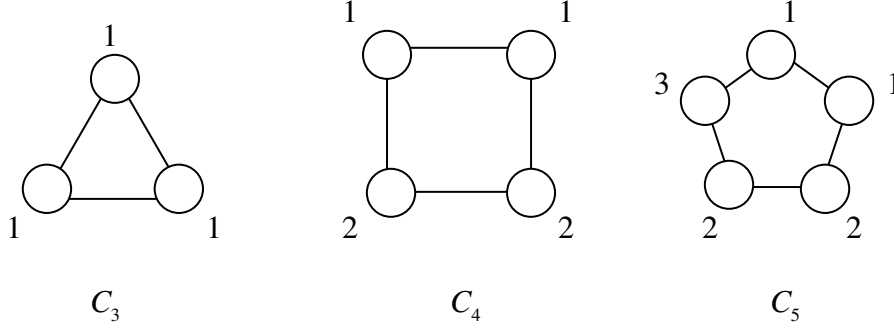
İki parçalı grafların Hamilton kromatik değerleriyle ilgili bu teoremlerin ardından, çevre graflarının hamilton renklendirme değeriyle ilgili aşağıda teoremi de ifade edebiliriz.

5.2.15. Teorem

$n \geq 3$ için $hc(C_n) = n - 2$ dir (Chartrand ve ark., 2005a).

5.2.16. Örnek

Şekil 5.9 da bazı çevre graflarının minimum Hamilton renklendirmeleri verilmiştir.

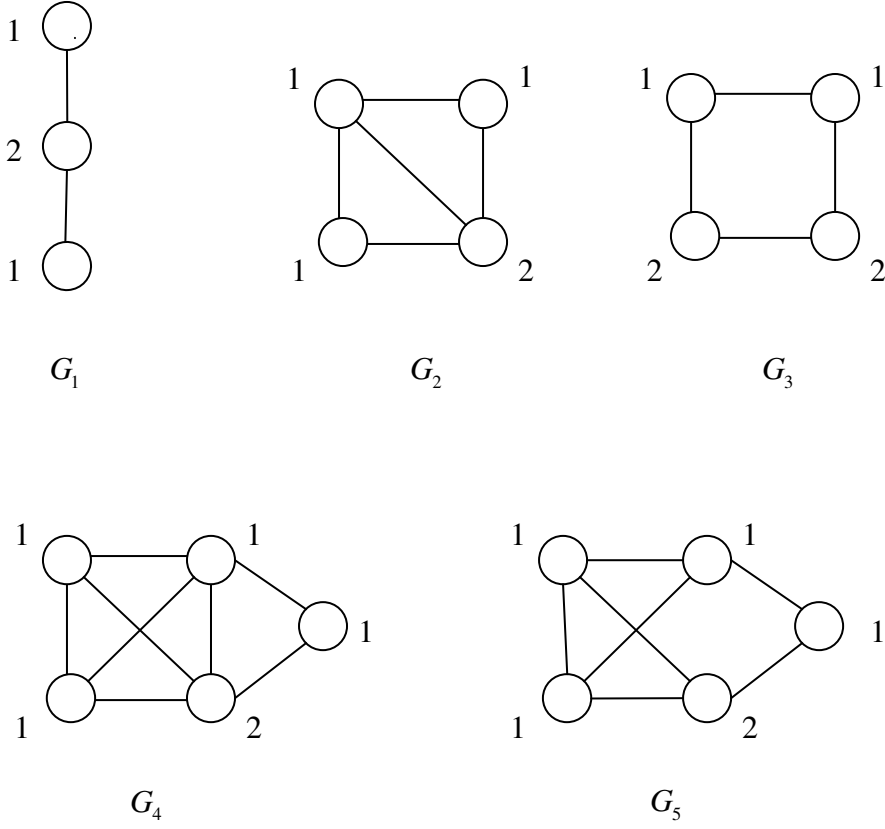


Şekil 5.9. Bazı çevre graflarının minimum Hamilton renklendirmeleri

Buraya kadar Hamilton renklendirmesiyle ilgili bazı önemli bilgilere yer verildi. Bir diğer soru ise, grafin tepe sayısının bilinmesi durumunda Hamilton kromatik değeri hakkında neler söylenebileceğidir. Bir sonraki bölümde bu konu ele alınacaktır.

5.3. Tepe Sayıları Bilinen Grafların Hamilton Kromatik Değerleri Üzerine

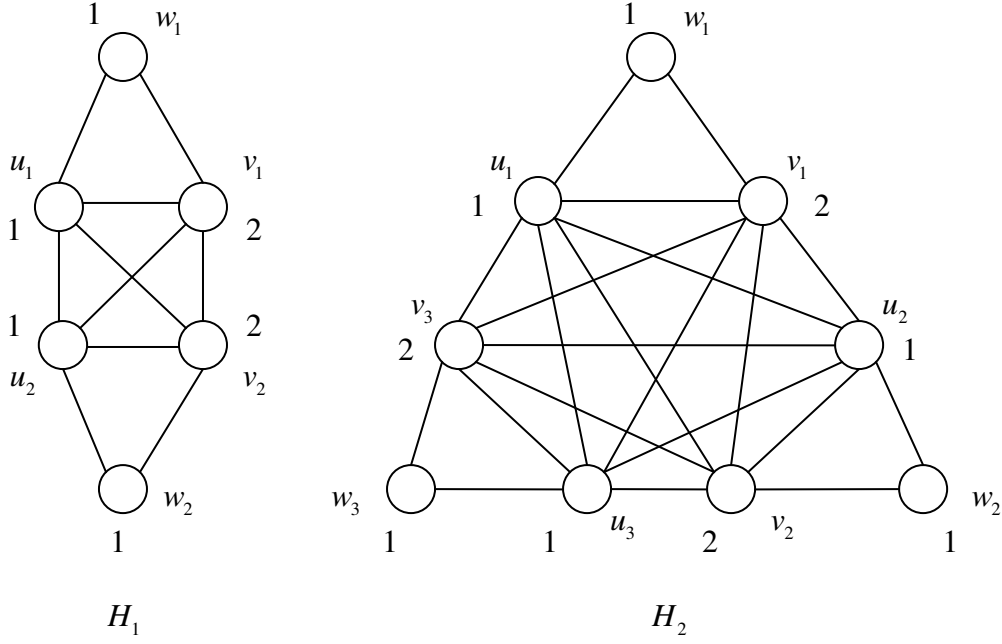
Tepe sayısı $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq 3$ olan bağlantılı grafları göz önüne alalım. Bu tür grafların Hamilton kromatik değerlerinin 1 olmasının ancak ve ancak grafin Hamilton bağlantılı olması ile mümkün olabileceğini daha önce ifade etmiştik. Şimdi bir G grafinin Hamilton kromatik değerinin 2 olabileceğini gösterelim. Şekil 5.10 da Hamilton kromatik değerleri 2 ve tepe sayıları 3, 4 ve 5 olan bütün graflar gösterilmiştir.



Şekil 5.10. Hamilton kromatik değerleri 2 ve tepe sayıları 3, 4 ve 5 olan graflar

Şekil 5.10 da verilen G_2 ve G_4 grafları (ve G_3 ve G_5 grafları) gerçekten de daha genel graf sınıflarının özel örnekleridir. Örneğin $n \geq 4$ için G_{2n-6} grafı, K_{n-1} grafindaki u ve v tepelerinin yeni bir w tepesiyle birleştirilmesinden elde edilen bir graf ve $G_{2n-5} = G_{2n-6} - uv$ olsun. Bu durumda $n \geq 4$ için $hc(G_{2n-6}) = hc(G_{2n-5}) = 2$ olur.

Ayrıca tepe sayısı daha fazla olan ve Hamilton kromatik değeri 2 olan başka graflar da bulabiliriz. Şekil 5.11 de verilen H_1 ve H_2 graflarının Hamilton kromatik değerleri de 2 dir.



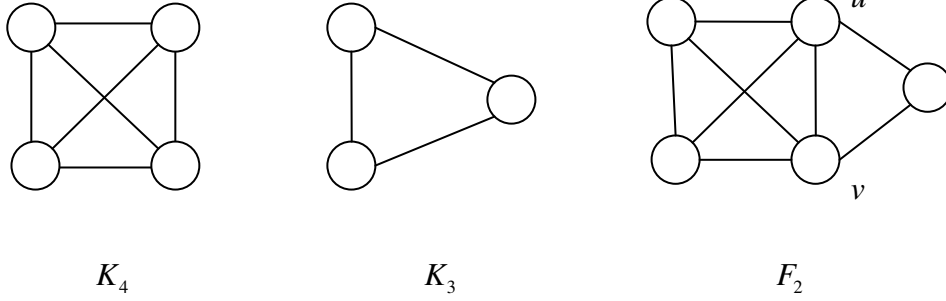
Şekil 5.11. Hamilton kromatik değerleri 2 olan H_1 ve H_2 grafları

Genel olarak $n = 3k \geq 6$ için H_{k-1} grafi, tepelerinin kümesi $V(K_{2k}) = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k\}$ olan K_{2k} grafına k tane yeni $w_1, w_2, \dots, w_k$ tepelerinin eklenmesiyle ve $1 \leq i \leq k$ koşuluna uygun olarak w_i nin u_i ve v_i tepeleri ile birleştirilmesiyle elde edilsin. Bu durumda $k \geq 2$ için $hc(H_{k-1}) = 2$ olacaktır. Burada H_{k-1} grafının bir Hamilton renklendirmesi; $1 \leq i \leq k$ iken w_i ve u_i tepelerine 1 ve v_i tepesine 2 tamsayılarını atamaktadır. Bu örnekler bize gösteriyor ki, $hc(G) = 2$ olan ve bu c renklendirmesine göre atanan iki rengin her birisinin istenildiği kadar kullanılabileceği bir G grafi bulunabilir. Hamilton kromatik değeri 2 olan diğer graflar $1 \leq i \leq k$ olmak üzere H_{k-1} grafında herhangi sayıda $u_i v_i$ ayrıtlarının silinmesiyle elde edilebilir.

Hamilton kromatik değeri 2 olan bu graf sınıflarının elde edilme şekilleri, daha büyük Hamilton kromatik değerlerine sahip grafları elde edebilmek için değiştirilebilir.

Şimdi $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \geq 2k \geq 4$ için n tane tepesi olan F_k grafi, K_{n-k+1} ve K_{k+1} graflarının birer ayrıtları ortak hale getirilerek oluşturulmuş olsun.

Biz ortak ayrıta uv ayrıtı diyelim. Şekil 5.12 de örnek olarak $k = 2$ ve $n = 5$ için F_2 grafının nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir.



Şekil 5.12. $k = 2$ ve $n = 5$ için F_2 grafının oluşturulması

Burada $n \geq 2k$ olmasını $n - k + 1 \geq k + 1$ olması takip eder ve ayrıca $D(u, v) = n - k$ olur. Şu durumda c renklendirmesi F_k grafının v tepesi dışındaki bütün tepelerine 1 tamsayısını atayacaktır. Sadece v tepesine k tamsayısını atayacaktır ki, bu k tamsayısı F_k grafının Hamilton kromatik değeri olacaktır. Yani $|c(u) - c(v)| + D(u, v) = (k - 1) + (n - k) = n - 1$ olduğundan c renklendirmesi F_k nın bir minimum Hamilton renklendirmesi ve böylece $hc(F_k) = k$ olur. Ayrıca $hc(F_k - uv) = k$ olduğu da açıktır. Bu ise aşağıdaki önermeyi doğurur.

5.3.1. Önerme

$\forall k, n \in \mathbb{N}$ için $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ iken n tane tepesi bulunan ve $hc(G) = k$ olan

bir G Hamilton grafı vardır (Chartrand ve ark., 2005a).

Bu önerme daha da genişletilebilir. Ancak öncelikle aşağıdaki yardımcı teoremi incelemek yararlı olacaktır.

5.3.2. Yardımcı Teorem

G grafinin n tane tepesi bulunsun. H ise k tepeli ve G nin bir indirgenmiş alt grafi olsun. Eğer $\forall u, v \in V(H)$ farklı tepeleri için $D_H(u, v) \geq D_G(u, v) - (n - k)$ koşulu sağlanıyorsa $hc(H) \leq hc(G)$ olur (Chartrand ve ark., 2005a).

İspat

G nin bir Hamilton renklendirmesi c olsun. Ayrıca c' renklendirmesi de c renklendirmesinin H üzerindeki bir kısıtlanması olsun. Şimdi $u, v \in V(H)$ olmak üzere $D_H(u, v) \geq D_G(u, v) - (n - k)$ olduğundan aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} |c'(u) - c'(v)| + D_H(u, v) &\geq |c(u) - c(v)| + D_G(u, v) - (n - k) \\ &\geq (n - 1) - (n - k) = k - 1 \end{aligned}$$

Buradan c' renklendirmesinin H üzerinde bir Hamilton renklendirmesi olduğu ortaya çıkar ve böylece $hc(H) \leq hc(c') \leq hc(c) = hc(G)$ olur.

5.3.3. Teorem

$j, n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 6$ için $2 \leq j \leq \frac{(n+1)}{2}$ olmak üzere n tane tepesi bulunan bir Hamilton grafi vardır ve bu grafin Hamilton kromatik değeri $(n - j)$ dir (Chartrand ve ark., 2005a).

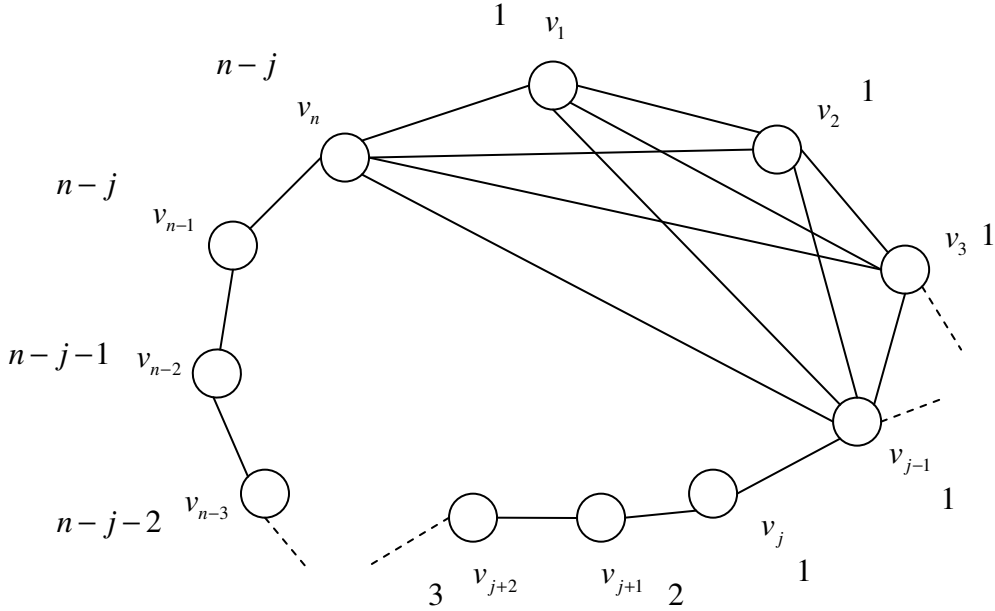
İspat

$C_n : v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ çevresi ve bu çevre üzerinde alınacak $\{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_n\}$ tepeleriyle bir graf elde edelim. Bu graf $G = G(n, j)$ ile gösterilsin.

Eğer $j = 2$ ise $G = G(n, 2) = C_n$ dir. $hc(C_n) = n - 2$ olduğundan $j \geq 3$ olduğunu kabul ediyoruz. Şimdi $V(G)$ nin bir c^* renklendirmesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$c^*(v_i) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq j \text{ ise} \\ p+1 & i = j+p \text{ ve } 1 \leq p \leq n-2-j \text{ ise} \\ n-j & i = n-1, n \text{ ise} \end{cases}$$

Şekil 5.13 de c^* ve G birlikte gösterilmiştir.



Şekil 5.13. G üzerindeki bir c^* Hamilton renklendirmesi

c^* renklendirmesinin bir Hamilton renklendirmesi olduğu açıktır. Buradan $hc(G) \leq hc(c^*) = n - j$ dir.

Şimdi de $hc(G) \geq n - j$ olduğunu gösterelim.

$H = \langle \{v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n\} \rangle = C_{n-j+2}$ olsun. Buradan Teorem 5.2.15 in yardımıyla $hc(H) = n - j$ şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $k = n - j + 2$ için G ve H nin

Yardımcı Teorem 5.3.2 de ifade edilen şartları sağladığını görüyoruz. Böylece $n - j = hc(H) \leq hc(G)$ olur ve ispat tamamlanır.

Önerme 5.3.1 ve Teorem 5.3.3 birlikte düşünülerek aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

5.3.4. Sonuç

$1 \leq k \leq n - 2$ için Hamilton kromatik değeri k olan ve n tane tepesi bulunan bir Hamilton grafi vardır.

Biz $n \geq 3$ tamsayıları için belirli bir Hamilton kromatik değerine sahip n tepeli bir G grafinin varlığını biliyoruz. Ancak şöyle bir soru akla gelebilir; Acaba n tepeli bir grafin Hamilton kromatik değeri ne kadar büyük olabilir? Bu soruya yanıt verebilmek için bir grafin Hamilton kromatik değerinin grafin tepe sayısı ile ilişkisini bir üst sınır ile belirlemeye çalışacağız. Bunu yaparken ilk önce aşağıdaki gözlemi inceleyelim.

5.3.5. Gözlem

$e \in G$ ayrıtı için $G - e$ grafinin bağlantılı olacağı bir G bağlantılı grafini göz önüne alalım. $G - e$ grafindeki farklı u ve v tepeleri için, en uzun $u - v$ yolunun ayrıt sayısı, G grafindeki en uzun $u - v$ yolunun ayrıt sayısından fazla değildir. Buradan $G - e$ grafindeki her Hamilton renklendirmesi aynı zamanda G grafinde da bir Hamilton renklendirmesi olur. Bu gözlem aşağıdaki teoremi doğurmaktadır.

5.3.6. Önteorem

$e \in G$ ayrıtı için $G - e$ grafinin bağlantılı olacağı bir G bağlantılı grafi için, $hc(G) \leq hc(G - e)$ dir (Chartrand ve ark., 2005a).

Şimdi Teorem 5.2.15 ile Önteorem 5.3.6 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki önerme elde edilebilir.

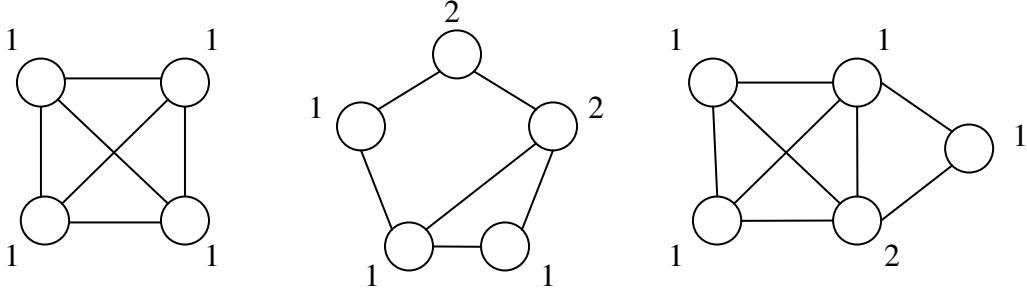
5.3.7. Önerme

$n \geq 3$ tepeli bir G Hamilton grafi için $hc(G) \leq n-2$ dir (Chartrand ve ark., 2005a).

Böylece Hamilton graflarının Hamilton kromatik değerleri için bir üst sınırı ulaşılmış oluyoruz.

5.3.8. Örnek

Şekil 5.14 de bazı Hamilton grafları ve bu grafların minimum Hamilton renklendirmeleri verilmiştir. Bu örnekler incelendiğinde verilen Hamilton grafları için Hamilton kromatik değerlerinin Önerme 5.3.7 da verilen üst sınırı sağladıkları görülmektedir.



Şekil 5.14. Bazı Hamilton graflarının minimum Hamilton renklendirmeleri

5.3.9. Tanım (En Uzun Çevre Uzunluğu)

Bağlantılı bir G grafi içindeki ayırıt sayısı en fazla olan çevrenin ayırıt sayısına, G nin *en uzun çevre uzunluğu* denir ve $cir(G)$ ile gösterilir (Chartrand ve ark., 2005a).

5.3.10. Önerme

$n \geq 4$ tepeli bağlantılı bir G grafında $cir(G) = n-1$ ise $hc(G) \leq n-1$ olur (Chartrand ve ark., 2005a).

İspat

G grafi bağlantılı ve $\text{cir}(G) = n - 1$ olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda G nin öyle bir H geren altgrafi vardır ki, bu H geren altgrafi; uzunluğu $n - 1$ olan bir çevreye bir askı ayrıtının eklenmesiyle elde edilir. Teorem 5.2.8 yardımıyla $\text{hc}(H) = n - 1$ olur. Ardından Önteorem 5.3.6 göz önüne alındığında ise $\text{hc}(G) \leq n - 1$ olur ve ispat tamamlanır.

6. BAZI ÖZEL GRAF SINIFLARINDA HAMILTON RENKLENDİRMESİ

Bu bölümde bazı özel graf sınıfları üzerinde Hamilton renklendirmesi ele alınmıştır. Bu kapsamda teoremlerin ispatları yapılmadan önce gerekli olan bazı tanımlara yer verilmiştir.

6.1. Ağaç Graflarında Hamilton Renklendirmesi

6.1.1. Tanım (Geren Ağaç)

G bağlantılı bir graf olsun. Eğer G nin bütün tepelerini içeren bir T ağaç grafi mevcutsa, T ye G nin bir *geren ağacı* denir (Chartrand ve ark., 2005a).

6.1.2. Önerme

G bağlantılı grafının bir geren ağacı T ise $hc(G) \leq hc(T)$ dir (Chartrand ve ark., 2005a).

6.1.3. Önteorem

T grafi $n \geq 4$ tane tepesi bulunan ve yıldız olmayan bir ağaç grafi olsun. Bu durumda $\bar{T}$ grafi bir Hamilton yolu içerir (Chartrand ve ark., 2005a).

İspat

İspatı n üzerinden tümevarımla yapabiliriz.

$n = 4$ için ağaç grafi olup da yıldız grafi olmayan tek graf P_4 yol grafidir. Öte yandan $\bar{P}_4 = P_4$ olduğundan ve her yol grafi bir Hamilton yolu içereceğinden teoremdeki ifade sağlanır.

Tepe sayısı $k-1 \geq 4$ olup yıldız grafi olmayan ağaç grafları için ifadenin doğruluğunu var sayalım.

Şimdi tepe sayısı k olan ve yıldız grafi olmayan bir T ağaç grafini göz önüne alalım. Bu durumda T grafi bir v son tepesi içerir ki $T-v$ bir yıldız grafi değildir.

Tümevarım hipotezinden $\overline{T-v}$ grafi bir Hamilton yolu içerecektir ve biz bu yolu $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ ile gösterelim. v tepesi T grafının bir son tepesi olduğundan, bu v tepesinin v_1 ve v_{k-1} tepelerinden en fazla birisine komşu olması gerekir. Bu genelleştirmeyi kaybetmeden v ve v_1 tepelerinin T grafında komşu olmadıklarını kabul edelim. Bu durumda v ve v_1 tepeleri $\bar{T}$ grafında komşu olurlar ve böylece $v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ yolu $\bar{T}$ grafında bir Hamilton yolu olur. Böylece ispat tamamlanır.

6.1.4. Teorem

T grafi $n \geq 2$ tane tepesi bulunan bir ağaç grafi olsun. Bu durumda $hc(T) \leq (n-2)^2 + 1$ olur (Chartrand ve ark., 2005a).

İspat

Eğer T bir yıldız grafi ise Teorem 5.2.12 den dolayı $hc(T) = (n-2)^2 + 1$ olur ve ispat biter.

Bu yüzden biz T yi yıldız grafi olmayan ve tepe sayısı $n \geq 4$ olan bir ağaç grafi olarak düşünelim. Önteorem 6.1.3 den dolayı T grafının tümleyeni yani $\bar{T}$ grafi $v_1, v_2, \dots, v_n$ şeklinde bir Hamilton yolu içerir. Bu ise $1 \leq i \leq n$ için v_i ve v_{i+1} tepelerinin T grafında komşu olmamalarını gerektirir. Buradan da $1 \leq i \leq n-1$ için $D(v_i, v_{i+1}) \geq 2$ olur.

Şimdi T grafi üzerinde $1 \leq i \leq n$ için $c(v_i) = (n-2) + (i-2)(n-3)$ olacak şekilde bir c renklendirmesi tanımlayalım ve $1 \leq i < j \leq n$ şeklinde olsun. Bu durumda $|c(v_i) - c(v_j)| = (j-i)(n-3)$ olur.

Böylece $n \geq 4$ için $j = i+1$ ise $|c(v_i) - c(v_j)| + D(v_i, v_j) \geq (n-3) + 2 = n-1$ olurken, eğer $j \geq i+2$ ise $|c(v_i) - c(v_j)| + D(v_i, v_j) \geq 2(n-3) + 1 = 2n-5 \geq n-1$

olur. Böylece c renklendirmesinin T grafi üzerinde bir Hamilton renklendirmesi olduğu sonucu çıkar. Buradan da

$$hc(T) \leq hc(c) = c(v_n) = (n-2)^2 < (n-2)^2 + 1 \text{ olur ve ispat tamamlanır.}$$

Önerme 6.1.2 ve Teorem 6.1.4 birlikte düşünüldüğünde, boş olmayan (yani ayrıtı var olan) bağlantılı bir grafin tepe sayısına bağlı olarak Hamilton kromatik değerinin bir kesin üst sınırını belirleyebiliriz. Bu tespiti aşağıdaki sonuçla ifade edelim.

6.1.5. Sonuç

G grafi n tane tepesi olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda $hc(G) \leq (n-2)^2 + 1$ olur (Chartrand ve ark., 2005a).

Bu sonuç ile $n \geq 2$ tamsayısı için aşağıdaki kümeyi tanımlayabiliriz.

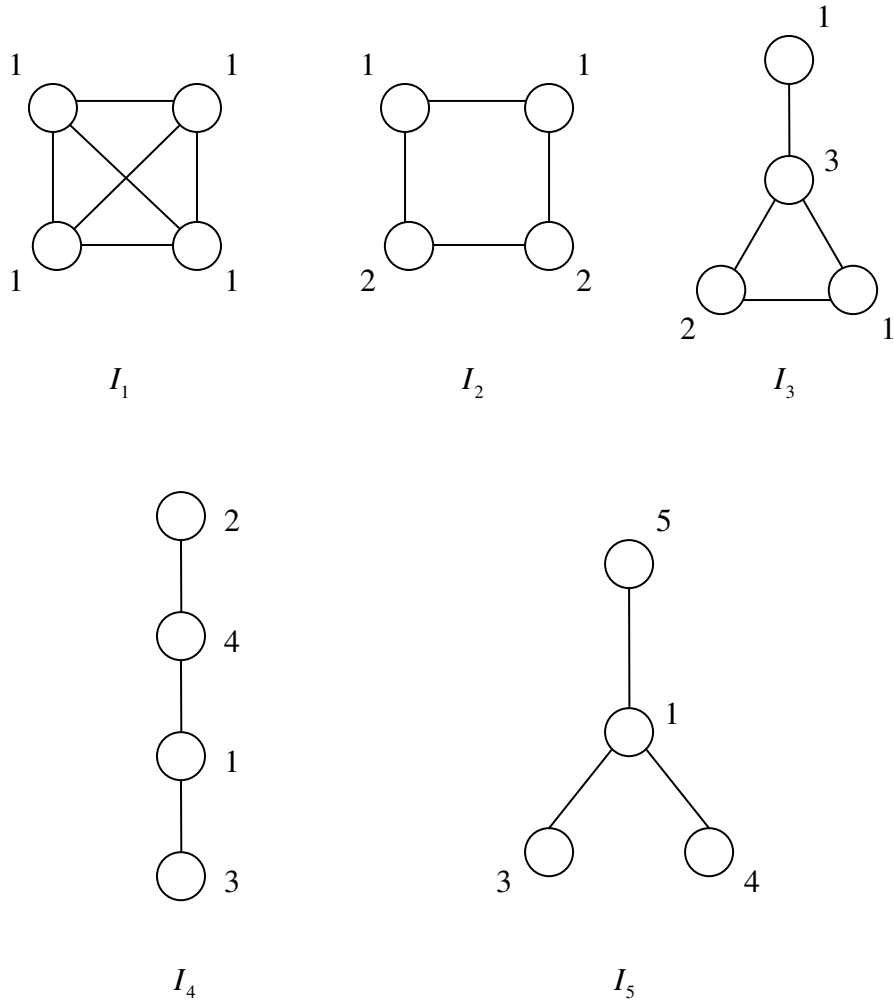
$$HC(n) = \{k : n \text{ tane tepesi olan bir } G \text{ grafi vardır ki } hc(G) = k\}$$

Burada açıktır ki; $\min\{HC(n)\} = 1$ ve $\max\{HC(n)\} = (n-2)^2 + 1$ olur.

Diğer taraftan $hc(n) = \max\{k : 1 \leq p \leq k \text{ için } \forall p \in HC(n)\}$ olur.

Önerme 5.3.10 , Teorem 5.2.12 , Sonuç 5.3.4 ve Sonuç 6.1.5 birlikte düşünüldüğünde $n-1 \leq hc(n) \leq (n-2)^2 + 1$ yazılabilir.

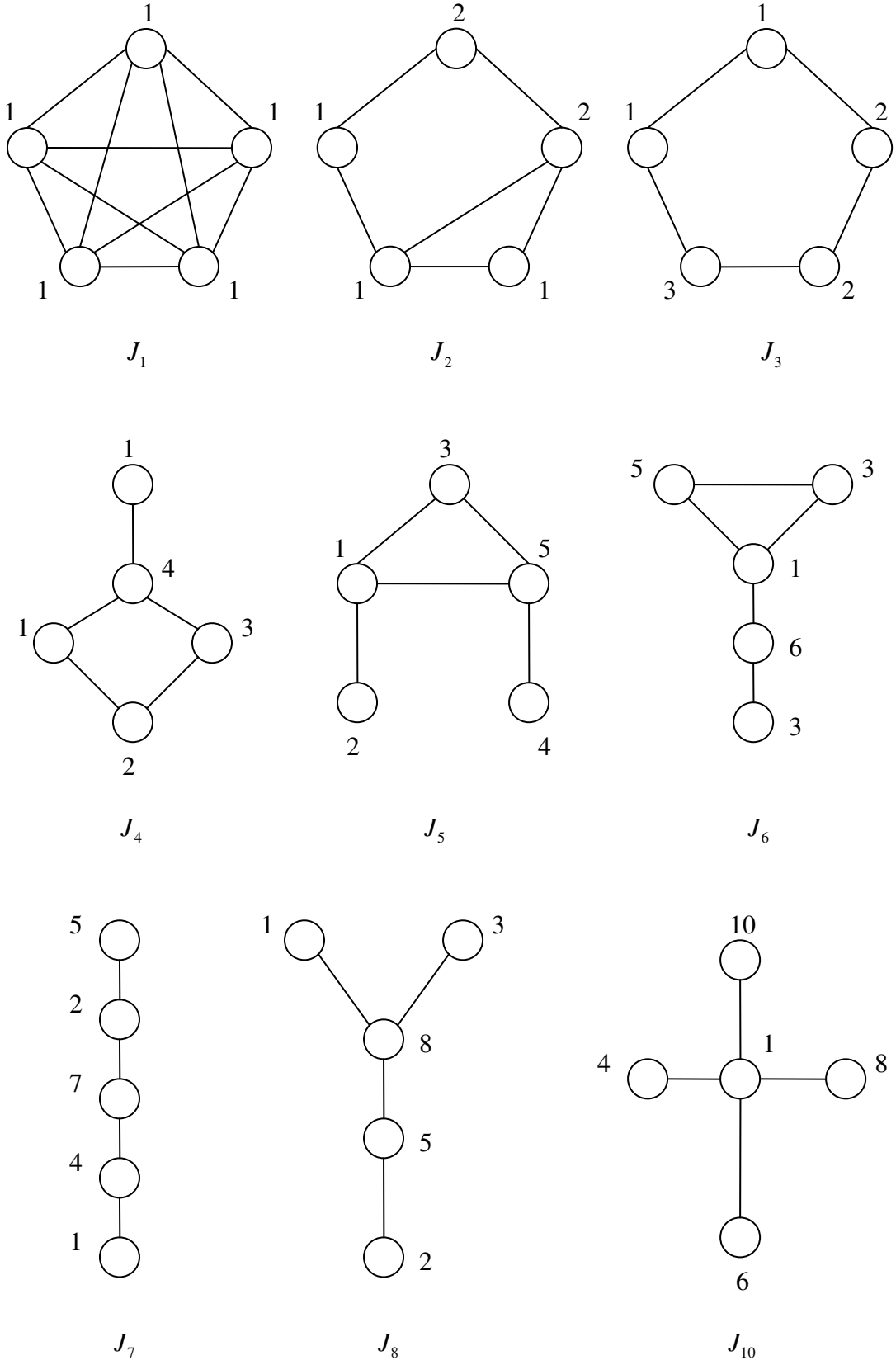
Şekil 6.1 ve Şekil 6.2 de $HC(4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $HC(5) = \{1, 2, \dots, 10\} - \{9\}$ gösterilmiştir. Sonuç olarak $hc(4) = 5$ ve $hc(5) = 10$ dur.



Şekil 6.1. $1 \leq i \leq 5$ için $hc(I_i) = i$ olan 4 tepeli I_i grafları

Şekil 6.1 incelendiğinde tepe sayısı 4 olan I_i ($1 \leq i \leq 5$) grafları için $hc(I_i) = i$ olduğunu görebiliriz.

Şekil 6.2 de ise tepe sayısı 5 olan J_i ($1 \leq i \leq 10$, $i \neq 9$) grafları için $hc(J_i) = i$ olduğunu görüyoruz.



Şekil 6.2. $1 \leq i \leq 10$, $i \neq 9$ için $hc(J_i) = i$ olan 5 tepeli J_i grafları

Teorem 6.1.4 de $n \geq 2$ tane tepesi var olan bir T ağaç grafi için $hc(T) \leq (n-2)^2 + 1$ olduğu gösterilmiştir. Dahası bu üst sınır $n \geq 3$ için $hc(K_{1,n-1}) = (n-2)^2 + 1$ olduğundan kesindir. Şimdi yıldız grafi olmayan bağlantılı graflar için, tepe sayılarına bağlı olarak Hamilton kromatik değerlerinin bir üst sınırını belirlemeye çalışacağız.

6.1.6. Tanım (Tamamlayıcı Hamilton Dizisi)

G grafi $n \geq 4$ tane tepesi bulunan bağlantılı bir graf olsun. G nin tepelerinden oluşan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dizisi, $1 \leq i < n$ için $D(v_i, v_{i+1}) \geq 2$ iken $1 \leq j < n$ olacak şekilde $\exists j$ için $D(v_j, v_{j+1}) \geq 3$ şartlarını sağlıyorsa, bu dizi G grafının bir *tamamlayıcı Hamilton dizisi* veya basitçe bir *ch-dizisi* olarak adlandırılır. (Chartrand ve ark., 2005b).

Bir ağaç grafının barındırdığı bir ch-dizisinin, bu ağaç grafının tümleyeninde bir Hamilton yolu olduğunu gözlemleyebiliriz.

6.1.7. Tanım (Çevresel Tepe)

G bağlantılı bir graf olsun. Eğer $u \in G$ tepesi için $d(u, v) = diam(G)$ olacak şekilde $\exists v \in G$ tepesi varsa, u tepesine G grafının *çevresel tepesi* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

6.1.8. Önteorem

T grafi tepe sayısı $n \geq 4$ olan ve yıldız grafi olmayan bir ağaç grafi olsun. Bu durumda T grafi bir ch-dizisi içerir (Chartrand ve ark., 2005b).

İspat

İspatı T grafının tepe sayısı üzerinden tümevarımla yapalım.

$n = 4$ için T grafi bir yol grafi olur. Bu yol v_1, v_2, v_3, v_4 şeklinde olsun. Bu

durumda v_2, v_4, v_1, v_3 dizisinin T nin bir ch-dizisi olduğunu görürüz.

Şimdi $n \geq 5$ için T grafında bir u çevresel tepesini göz önüne alalım. Burada iki durum söz konusudur.

Durum 1: $T - u$ bir yıldız grafı olsun. v tepesi bu grafın merkez tepesi, $u_1, u_2, \dots, u_{n-2}$ tepeleri ise yine bu grafın derecesi 1 olan tepeleri olsunlar. Bu genelleştirmeyi kaybetmeden u ve u_{n-2} tepelerinin T grafında komşu olduklarını varsayabiliriz. Buradan $v, u, u_1, u_2, \dots, u_{n-2}$ dizisi T grafında bir ch-dizisi olur.

Durum 2: $T - u$ bir yıldız grafı olmasın. Tümevarım hipotezinden $T - u$ grafında $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ şeklinde bir ch-dizisinin bulunduğunu görürüz. Eğer u ve v_1 tepeleri T grafında komşu iseler $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, u$ dizisi T grafında bir ch-dizisi olur. Aksi durumda $u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ dizisi T grafının bir ch-dizisi olur.

6.1.9. Teorem

T grafı tepe sayısı $n \geq 5$ olan ve yıldız grafı olmayan bir ağaç grafı olsun. Bu durumda $hc(T) \leq (n-2)^2 - 1$ olur ve bu sınır kesindir (Chartrand ve ark., 2005b).

İspat

Önteorem 6.1.8 den dolayı T grafı, öyle bir $1 \leq t < n$ için $D(v_t, v_{t+1}) \geq 3$ şartını sağlayacak $v_1, v_2, \dots, v_n$ şeklindeki bir ch-dizisini içerecektir. Şimdi T üzerinde bir c renklendirmesini

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 + (i-1)(n-3) & , \quad 1 \leq i \leq t \quad \text{ise} \\ (i-1)(n-3) & , \quad t+1 \leq i \leq n \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Biz c renklendirmesinin G grafı üzerinde bir Hamilton renklendirmesi olduğunu göstereceğiz.

G grafının $1 \leq i < j \leq n$ için birbirinden farklı v_i ve v_j tepelerini göz önüne aldığımızda $|c(v_i) - c(v_j)| \geq (j-i)(n-3) - 1$ olduğunu görebiliriz.

Eğer $j-i \geq 2$ ise $\forall n \geq 5$ için $|c(v_i) - c(v_j)| \geq 2n-7 \geq n-2$ olur.

Eğer $j=i+1$ ve $i \neq t$ ise $D(v_i, v_{i+1}) \geq 2$ ve $|c(v_i) - c(v_j)| = n-3$ olur.

Eğer $j=i+1$ ve $i=t$ ise $D(v_i, v_{i+1}) \geq 3$ ve $|c(v_i) - c(v_j)| = n-4$ olur.

Bu durumların tamamında $D(v_i, v_j) + |c(v_i) - c(v_j)| \geq n-1$ olur ve buradan c renklendirmesi G grafi üzerinde bir Hamilton renklendirmesi olacaktır. Böylece, $hc(c) = c(v_n) = (n-1)(n-3) = (n-2)^2 - 1$ olur ki, bu ifadeyi de $hc(T) \leq (n-2)^2 - 1$ olması takip eder.

Şimdi de bu üst sınırın kesinliğini gösterelim. T' grafi $n \geq 5$ tane tepesi olan ve $K_{1,n-2}$ yıldız grafının bir ayırıtının yeniden bölünmesiyle elde edilen bir ağaç grafi olsun. Biz $hc(T') = (n-2)^2 - 1$ olduğunu iddia ediyoruz. Şimdi $V(T') = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve c renklendirmesi T' üzerinde bir Hamilton renklendirmesi olsun. Burada $n \geq 5$ olmasını T' nin bir yol grafi olmaması ve böylece T' deki hiçbir tepe çiftinin bir Hamilton renklendirmesine göre aynı renge sahip olmaması takip eder. Buna dayanarak $1 = c(v_1) < c(v_2) < \dots < c(v_n)$ olduğunu varsayalım.

$$\text{Öncelikle } \sum_{i=2}^n D(v_i, v_{i-1}) \leq 2n-1 \quad (*)$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\mathcal{D} = \{D(v_i, v_{i-1}) : 2 \leq i \leq n\}$ tekrarlı kümesini tanımlayalım. Bu kümenin elemanlarından en fazla iki tanesinin 3 olduğunu, diğerlerinin 1 ya da 2 olduğunu görebiliriz. Şimdi $u, v \in V(T')$ alalım, öyle ki u tepesi T' yıldızının bir merkezi, v tepesi de T' yıldızının askı tepesi iken, T' grafında $D(u, v) = 2$ olsun. Şimdi $v_1 = u$, $v_2 = v$ ya da $v_n = u$, $v_{n-1} = v$ olup olmamasına göre iki durumu göz önünde bulunduracağız.

Durum 1 : $v_1 = u$ ve $v_2 = v$ olsun. Bu durumda $\mathcal{D}$ kümesindeki elemanlardan en fazla bir tanesinin 3 olduğunu, diğerlerinin 1 ya da 2 olduğunu görebiliriz. Buradan $\sum_{i=2}^n D(v_i, v_{i-1}) \leq 3 + 2(n-2) = 2n-1$ yazılabilir.

Durum 2 : $v_1 \neq u$ veya $v_2 \neq v$ olsun. Bu durumda $2 \leq j \leq n$ olmak üzere $\exists j \in \mathbb{Z}$ için $\{v_j, v_{j-1}\} = \{u, w\}$ olur ve $w \in V(T') - \{u, v\}$ dir. Böylece $D(v_j, v_{j-1}) = 1$ olur. $\mathcal{D} - \{d(v_j, v_{j-1})\}$ kümesindeki elemanlardan en fazla iki tanesinin 3 olduğunu, diğerlerinin 1 ya da 2 olduğunu görebiliriz. Buradan da $\sum_{i=2}^n D(v_i, v_{i-1}) \leq 1 + 2.3 + 2(n-4) = 2n-1$ olduğu açıktır. Böylece (*) eşitsizliğinin sağlandığı görülür. $2 \leq i \leq n$ şartını sağlayan $\forall i \in \mathbb{Z}$ için $c(v_i) - c(v_{i-1}) \geq (n-1) - D(v_i, v_{i-1})$ olacaktır. Bu ifade kullanılarak (*) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} c(v_n) &\geq (n-1)^2 - \sum_{i=2}^n D(v_i, v_{i-1}) + c(v_1) \\ &\geq (n-1)^2 - (2n-1) + 1 = (n-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

elde edilir ve ardından $hc(T') \geq (n-2)^2 - 1$ şeklinde yazılabilir. Buradan $n \geq 5$ tane tepesi bulunan ve yıldız olmayan T ağaç grafi için $hc(T) \leq (n-2)^2 - 1$ ve $hc(T') = (n-2)^2 - 1$ olur. Böylece ispat biter.

Önerme 6.1.2 de, bağlantılı bir G grafının, bir T geren ağacı için $hc(G) \leq hc(T)$ olduğu ifade edilmiştir. Açıktır ki, eğer G bağlantılı grafi $n \geq 4$ tepeli ve yıldız grafi değilse, G grafını geren bir ağaç grafi, yıldız grafi olamaz. Bunun için Teorem 6.1.9 u aşağıdaki sonuç takip eder.

6.1.10. Sonuç

Tepe sayısı $n \geq 5$ olan ve $hc(G) = (n-2)^2$ şartını sağlayan bir bağlantılı G grafi yoktur. Dahası eğer G grafi tepe sayısı $n \geq 5$ olan ve yıldız grafi olmayan bir bağlantılı graf ise $hc(G) \leq (n-2)^2 - 1$ olur (Chartrand ve ark., 2005b).

Sonuç 6.1.5 de boş olmayan bağlantılı bir G grafi için $hc(G) \leq (n-2)^2 + 1$ olduğu ifade edilmişti. Ayrıca $n=5$ tane tepesi bulunan bağlantılı bir G grafi için $hc(G) = (n-2)^2$ olamaz. Sonuç 6.1.10 deki ifade $n \geq 5$ için bu gerçeklerin bir uzantısıdır.

6.2. Maksimum De-tour Uzaklığı $\frac{n}{2}$ Olan Graflarda Hamilton Renklendirmesi

Tepe sayısı $n \geq 5$ olan bağlantılı bir G grafi ve bu grafin tepelerinden oluşan $\sigma: v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralaması için $\mathcal{D}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} D(v_i, v_{i+1})$ ve $\mathcal{D}(G) = \max\{\mathcal{D}(\sigma)\}$ şeklinde tanımlayalım.

Aşağıdaki teorem ile bir G grafinin tepe sayısına ve $\mathcal{D}(G)$ ye bağlı olarak Hamilton kromatik değeri için bir alt sınır belirlenmiştir.

6.2.1. Teorem

G grafi tepe sayısı $n \geq 5$ olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda $hc(G) \geq (n-1)^2 + 1 - \mathcal{D}(G)$ olur (Chartrand ve ark., 2002).

6.2.2. Tanım $(DB\left(\frac{n}{2}\right) \text{ grafi})$

Tepe sayısı n olan bağlantılı bir G grafi için tepeler arasındaki maksimum detour uzaklığı $\max\{D(u, v) : u, v \in V(G) \text{ ve } u \neq v\} \leq \frac{n}{2}$ şeklinde olsun. Basitçe böyle bir G grafi, *maksimum detour uzaklığı $\frac{n}{2}$ olan bir graf* veya kısaca $DB\left(\frac{n}{2}\right)$ grafi olarak adlandırılır.

Dahası G nin tepelerinin bir $\sigma: v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralaması için, c_σ bağıntısını $V(G)$ kümesine pozitif tamsayıların, $1 \leq i \leq n-1$ iken $\forall i \in \mathbb{Z}$ için $c_\sigma(v_1) = 1$ ve

$c_\sigma(v_{i+1}) - c_\sigma(v_i) = (n-1) - D(v_i, v_{i+1})$ şeklindeki bir ataması olarak tanımlayalım (Shen ve ark., 2008).

Şimdi yukarıdaki tanımın da yardımıyla $DB\left(\frac{n}{2}\right)$ grafi olan bir G grafi için aşağıdaki teoremleri ifade edelim.

6.2.3. Teorem

G grafi tepe sayısı $n \geq 4$ olan bir $DB\left(\frac{n}{2}\right)$ grafi olsun. Bu durumda, herhangi bir σ sıralaması için c_σ renklendirmesi G grafinin bir Hamilton renklendirmesidir ve $hc(c_\sigma) = (n-1)^2 + 1 - \mathcal{W}(\sigma)$ dir (Shen ve ark., 2008).

İspat

$\sigma: v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralaması G grafinin tepelerinin bir sıralanışı olsun. c_σ renklendirmesinin tanımından açıktır ki, $1 \leq i \leq n-1$ şeklindeki $\forall i \in \mathbb{Z}$ ve $j = i+1$ için $|c_\sigma(v_j) - c_\sigma(v_i)| + D(v_i, v_j) \geq (n-1)$ olacaktır.

$j-i \geq 2$ olduğunu varsayalım. G grafi bir $DB\left(\frac{n}{2}\right)$ grafi olduğundan,

$$\begin{aligned} c_\sigma(v_j) - c_\sigma(v_i) &= \sum_{l=i}^{j-1} (c_\sigma(v_{l+1}) - c_\sigma(v_l)) = \sum_{l=i}^{j-1} (n-1 - D(v_l, v_{l+1})) \\ &\geq \sum_{l=i}^{j-1} (n-1 - \frac{n}{2}) = (j-i) \frac{n-2}{2} \geq n-2 \end{aligned} \quad \text{yazabiliriz.}$$

$D(v_i, v_j) \geq 1$ olmasını $|c_\sigma(v_j) - c_\sigma(v_i)| + D(v_i, v_j) \geq n-1$ şeklinde olmasının takip edeceğine dikkat edelim. Böylece c_σ renklendirmesi G üzerinde bir Hamilton renklendirmesi olur. Buradan da,

$$hc(c_\sigma) = c_\sigma(v_n) = c_\sigma(v_1) + (n-1)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} D(v_i, v_{i+1}) = (n-1)^2 + 1 - \mathcal{W}(\sigma) \quad \text{olur.}$$

6.2.4. Teorem

G grafi tepe sayısı $n \geq 5$ olan bir $DB\left(\frac{n}{2}\right)$ grafi olsun.

$hc(G) = (n-1)^2 + 1 - \mathcal{W}(G)$ ve $\mathcal{W}(\sigma) = \mathcal{W}(G)$ şartını sağlayan herhangi bir σ sıralaması için $hc(c_\sigma) = hc(G)$ dir. Yani c_σ renklendirmesi G üzerinde bir minimum Hamilton renklendirmesidir (Shen ve ark., 2008).

İspat

$\sigma: v_1, v_2, \dots, v_n$ tepeler dizisi için $\mathcal{W}(\sigma) = \mathcal{W}(G)$ olsun. G nin herhangi bir c Hamilton renklendirmesi için $hc(G) \leq hc(c)$ olduğuna dikkat edilirse, $hc(G) \leq hc(c_\sigma) = (n-1)^2 + 1 - \mathcal{W}(\sigma) = (n-1)^2 + 1 - \mathcal{W}(G)$ olacağına Teorem 6.2.3 den ulaşılabilir.

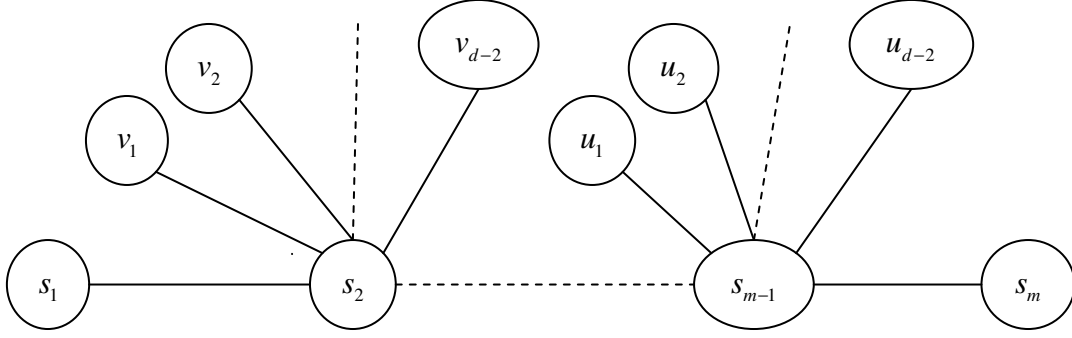
Diğer yandan Teorem 6.2.1 yardımıyla $(n-1)^2 + 1 - \mathcal{W}(G) \leq hc(G)$ yazılabilir. Böylece $hc(G) = (n-1)^2 + 1 - \mathcal{W}(G)$ ve $hc(c_\sigma) = hc(G)$ olur.

6.3. Tırtıl ve Çift Merkezli Yıldız Graflarında Hamilton Renklendirmesi

6.3.1. Tanım (Tırtıl Grafi)

Bir ağaç grafi aşağıdaki özellikleri taşıması durumunda C tırtıl grafi olarak adlandırılır.

C tırtıl grafi $s_1, s_2, \dots, s_m$ yolunu içerir. Bu yola C tırtıl grafinin omurgası denir. Grafin omurgasındaki iç tepelerle komşu olan tepelerin oluşturdukları ayırtlara C tırtıl grafinin bacakları denir. Eğer $i = 2, 3, \dots, m-1$ için $\deg(s_i) = d$ ise bu tırtıl grafi $C(m, d)$ ile gösterilir. Şekil 6.3 de $C(m, d)$ grafi gösterilmiştir. (Shen ve ark., 2008).

Şekil 6.3. $C(m, d)$ tırtıl grafi

Aşağıdaki teorem $m \geq 3$ ve $d \geq 3$ için $hc(C(m, d))$ yi belirlemektedir.

6.3.2. Teorem

$n, d \in \mathbb{Z}^+$ için $n \geq 3$ ve $d \geq 3$ olmak üzere,

$$hc(C(m, d)) = \begin{cases} \frac{2d-3}{2d-2} (n-2)^2 + \frac{d+1}{2} & m \text{ tek ise} \\ \frac{2d-3}{2d-2} (n-2)^2 + 1 & m \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur. Ayrıca burada $n = |V(C(m, d))| = m + (m-2)(d-2)$ değeri $C(m, d)$ grafinin tepe sayısını gösterir (Shen ve ark., 2008).

İspat

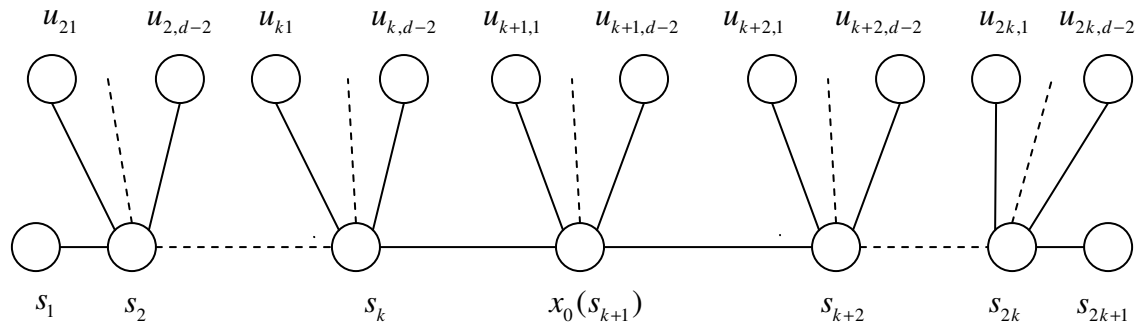
$C(m, d)$ için $m = 3$ ve $d = 3$ ise $n = 4$ ve $C(m, d) = K_{1,3}$ olur. $n \geq 3$ için $hc(K_{1,n-1}) = (n-2)^2 + 1$ sonucundan $hc(K_{1,3}) = 5$ olur. Diğer taraftan $d = 3$ ve $n = 4$ için $\left(\frac{2d-3}{2d-2} (n-2)^2 + \frac{d+1}{2} \right) = 5$ olur. Burada teoremin sağlandığı görülmektedir.

Kabul edelim ki $m > 3$ veya $d > 3$ olsun. Bu durumda $n = |V(C(m, d))| \geq 5$ olur. $C(m, d)$ nin tanımından $\max\{D(u, v) : u, v \in V(C(m, d)) \text{ ve } u \neq v\} \leq \frac{n}{2}$ olduğu kolayca görülebilir. Yani $C(m, d)$ bir $DB\left(\frac{n}{2}\right)$ grafıdır. Teorem 6.2.4 den dolayı bizim sadece $\mathcal{W}(C(m, d))$ değerini belirlemeye ihtiyacımız vardır.

$i = 1, 2, \dots, n-1$ için $C(m, d)$ grafinin tepelerinin herhangi bir $\sigma: v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışı; v_i tepesinden v_{i+1} tepesine $P_{i,i+1}$ yolunu gösterir. Burada iki durum söz konusudur.

Durum 1 : m tek olsun.

$m = 2k + 1$ ve x_0 tepesi $C(m, d)$ grafinin omurgasının merkez tepesi olsun. Bu durumda iki iddia vardır (Şekil 6.4 incelenebilir).



Şekil 6.4. $m = 2k + 1$ için $C(m, d)$ tırtıl grafi

İddia 1 :

$C(m, d)$ grafinın tepelerinin herhangi bir $\sigma: v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralaması için

$$\mathcal{D}(\sigma) \leq 2(d-1)k(k+1) - 2d + 4 - (D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0)) \quad \text{olur.} \quad \text{Dahası eğer}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 \in V(P_{i, i+1})$ ise eşitlik sağlanır.

Gerçekten herhangi bir $i = 1, 2, \dots, n-1$ için eğer $x_0 \in V(P_{i,i+1})$ ise $D(v_i, v_{i+1}) = D(v_i, x_0) + D(x_0, v_{i+1})$ olur. Diğer taraftan $D(v_i, v_{i+1}) < D(v_i, x_0) + D(x_0, v_{i+1})$ dir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(\sigma) &= \sum_{i=1}^{n-1} D(v_i, v_{i+1}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^{n-1} (D(v_i, x_0) + D(x_0, v_{i+1})) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n D(v_i, x_0) - (D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0)) \\
 &= 2(2(d-1)k + 2(d-1)(k-1) + \dots + 2(d-1)2 + d) - (D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0)) \\
 &= 2(d-1)k(k+1) - 2d + 4 - (D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0))
 \end{aligned}$$

ve eğer $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 \in V(P_{i,i+1})$ ise eşitlik sağlanır.

İddia 2 :

$C(m, d)$ nin tepelerinin öyle bir $\sigma^* : v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışı vardır ki, $v_1 = x_0$, $v_n \in N(x_0)$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 \in V(P_{i,i+1})$ şartları sağlandığında $\mathcal{W}(\sigma^*) = \mathcal{W}(C(m, d)) = 2(d-1)k(k+1) - 2d + 3$ olur.

Aslında eğer $\sigma : v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışı, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 \in V(P_{i,i+1})$ ve $D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0)$ değerini minimum yapan bir sıralanışı ise $\mathcal{W}(\sigma) = \mathcal{W}(C(m, d))$ olur. Açık ki herhangi bir $\sigma : v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışı için $D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0) \geq 1$ olur. Ayrıca $v_1 = x_0$, $v_n \in N(x_0)$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 \in V(P_{i,i+1})$ şartlarını sağlayan herhangi bir $\sigma : v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışı, $D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0) \geq 1$ şartını da sağlar.

$C(m, d)$ nin yapısından dolayı, $v_1 = x_0$, $v_n \in N(x_0)$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 \in V(P_{i,i+1})$ şartlarını sağlayan bir $\sigma^* : x_0 = s_{k+1}; s_{2k+1}, s_1, u_{2k,1}, u_{21}, \dots, u_{2k,d-2}, u_{2,d-2}; s_{2k}, s_2, u_{2k-1,1}, u_{31}, \dots, u_{2k-1,d-2}, u_{3,d-2}; \dots; s_{k+2}, s_k, u_{k+1,1}, u_{k+1,2}, \dots, u_{k+1,d-2} (\in N(x_0))$ sıralanışı

vardır. Buradan yukarıdaki σ^* için $D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0) = 1$ ve $\mathcal{W}(\sigma^*) = \mathcal{W}(C(m, d)) = 2(d-1)k(k+1) - 2d + 3$ olur.

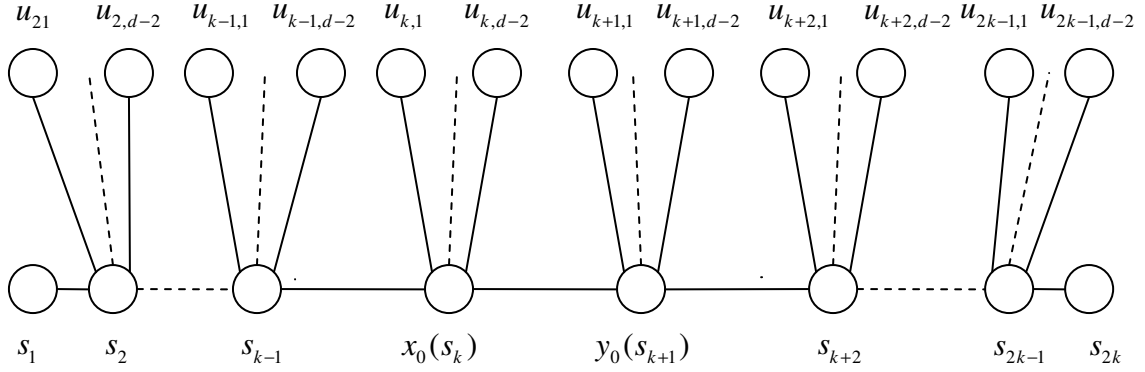
$n = 2k + 1 + (2k - 1)(d - 2) = 2(d - 1)k - d + 3$ olduğundan Teorem 6.2.4 ile,

$$\begin{aligned} \text{hc}(C(m, d)) &= \text{hc}(c_{\sigma^*}) = (n-1)^2 + 1 - D(C(m, d)) \\ &= (n-1)^2 + 1 - (2(d-1)k(k+1) - 2d + 3) \\ &= (n-1)^2 + 1 - \left((n+d-3) \left(\frac{n+d-3}{2(d-1)} + 1 \right) - 2d + 3 \right) \\ &= \frac{2d-3}{2d-2} (n-2)^2 + \frac{d+1}{2} \end{aligned}$$

yazılabilir ve böylece 1.durum için ispat tamamlanmış olur.

Durum 2 : m çift olsun.

$m = 2k$ ve x_0 ile y_0 tepeleri $C(m, d)$ grafının omurgasının merkez tepeleri olsunlar (Şekil 6.5 incelenebilir). Bu durumda da iki iddia vardır.



Şekil 6.5. $m = 2k$ için $C(m, d)$ tırtıl grafi

İddia 3 :

$C(m, d)$ grafının tepelerinin herhangi bir $\sigma: v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralaması için $\mathcal{W}(\sigma) \leq 2(d-1)k^2 - 2d + 4 - (D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0))$ olur. Dahası eğer $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 y_0 \in E(P_{i,i+1})$ ise eşitlik sağlanır.

Gerçekten $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için eğer $x_0 y_0 \in E(P_{i,i+1})$ ise $D(v_i, v_{i+1}) = D(v_i, x_0) + D(x_0, v_{i+1})$ olur. Diğer taraftan $D(v_i, v_{i+1}) \leq D(v_i, x_0) + D(x_0, v_{i+1})$ dir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(\sigma) &= \sum_{i=1}^{n-1} D(v_i, v_{i+1}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^{n-1} (D(v_i, x_0) + D(x_0, v_{i+1})) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n D(v_i, x_0) - (D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0)) \\
 &= 2((d-1)(k-1) + (d-1)(k-2) + (d-1)(k-3) + \dots + (d-1).1 + \\
 &\quad + (d-1)k + (d-1)(k-1) + \dots + (d-1).2 + 1) - (D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0)) \\
 &= 2(d-1)k^2 - 2d + 4 - (D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0))
 \end{aligned}$$

ve eğer $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 y_0 \in E(P_{i,i+1})$ ise eşitlik sağlanır.

İddia 4 :

$C(m, d)$ nin tepelerinin öyle bir $\sigma^* : v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışı vardır ki, $v_1 = x_0$, $v_n = y_0$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 y_0 \in E(P_{i,i+1})$ şartları sağlandığında $\mathcal{W}(\sigma^*) = \mathcal{W}(C(m, d)) = 2(d-1)k^2 - 2d + 3$ olur.

Gerçekten eğer $\sigma : v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışı, $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 y_0 \in E(P_{i,i+1})$ ve $D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0)$ değerini minimum yapan bir sıralanış ise $\mathcal{W}(\sigma) = \mathcal{W}(C(m, d))$ olur. Açık ki herhangi bir $\sigma : v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışı için $D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0) \geq 1$ olur. Ayrıca $v_1 = x_0$, $v_n = y_0$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 y_0 \in E(P_{i,i+1})$ şartlarını sağlayan herhangi bir $\sigma : v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışı, $D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0) = 1$ şartını da sağlar.

$C(m, d)$ nin yapısından dolayı, $v_1 = x_0$, $v_n = y_0$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_0 y_0 \in E(P_{i,i+1})$ şartlarını sağlayan bir $\sigma^* : x_0 = s_k; s_{2k}, s_1, u_{2k-1,1}, u_{21}, \dots, u_{2k-1,d-2}, u_{2,d-2}; \dots; s_{2k-1}, s_2, u_{2k-2,1}, u_{31}, \dots, u_{2k-2,d-2}, u_{3,d-2}; \dots; s_{k+2}, s_{k-1}, u_{k+1,1}, u_{k,1}, \dots, u_{k+1,d-2}, u_{k,d-2}, s_{k+1} = y_0$

sıralanışı vardır. Buradan yukarıdaki σ^* için $D(v_1, x_0) + D(v_n, x_0) = 1$ ve $\mathcal{W}(\sigma^*) = \mathcal{W}(C(m, d)) = 2(d-1)k^2 - 2d + 3$ olur.

$$\begin{aligned}
 n &= 2k + (2k-2)(d-2) = 2(d-1)k - 2d + 4 \text{ olduğundan Teorem 6.2.4 ile,} \\
 \text{hc}(C(m, d)) &= \text{hc}(c_{\sigma^*}) = (n-1)^2 + 1 - D(C(m, d)) \\
 &= (n-1)^2 + 1 - (2(d-1)k^2 - 2d + 3) \\
 &= (n-1)^2 + 1 - \left((n+2d-4) \left(\frac{n+2d-4}{2(d-1)} \right) - 2d + 3 \right) \\
 &= \frac{2d-3}{2d-2} (n-2)^2 + 1
 \end{aligned}$$

yazılabilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

6.3.3. Gözlem

Teorem 5.2.12 de yıldız grafları için $K_{r,s}$ nin özel bir durumu olan $K_{1,n-1}$ için $\text{hc}(K_{1,n-1}) = (n-2)^2 + 1$ olduğu gösterilmiştir. Bu sonuca Teorem 6.3.2 yardımıyla da ulaşılabilir. Gerçekten de $K_{1,n-1} = C(3, n-1)$ olduğundan;

$$\text{hc}(K_{1,n-1}) = \frac{2(n-1)-3}{2(n-1)-2} (n-2)^2 + \frac{n-1+1}{2} = (n-2)^2 + 1 \quad \text{olur (Shen ve ark., 2008).}$$

6.3.4. Örnek

$C(7, 5)$ tırtıl grafi için bir c minimum Hamilton renklendirmesini bulalım.

Çözüm

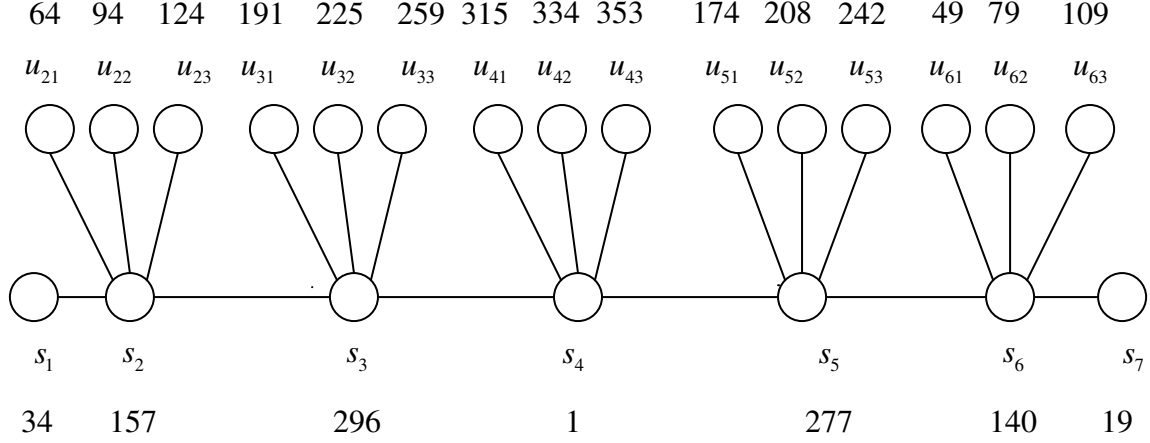
Burada $m = 7$ ve $d = 5$ olduğundan, $n = m + (m-2)(d-2) = 22$ ve

$$\text{hc}(c) = \text{hc}(C(7, 5)) = \frac{2d-3}{2d-2} (n-2)^2 + \frac{d+1}{2} = \frac{7}{8} 20^2 + \frac{6}{2} = 353 \quad (\text{Şekil 6.6 incelenebilir})$$

$C(7,5)$ tırtıl grafının tepelerinin $\mathcal{W}(\sigma^*) = \mathcal{W}(C(7,5))$ koşulunu sağlayan bir

$\sigma^* : s_4; s_7, s_1, u_{61}, u_{21}, u_{62}, u_{22}, u_{63}, u_{23}; s_6, s_2, u_{51}, u_{31}, u_{52}, u_{32}, u_{53}, u_{33}; s_5, s_3, u_{41}, u_{42}, u_{43}$

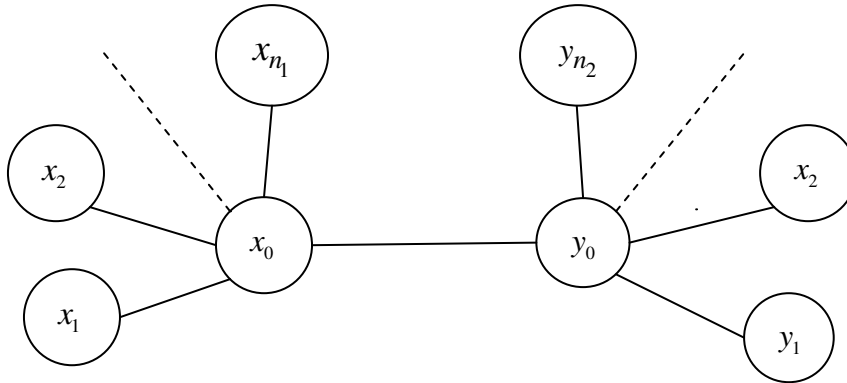
sıralanışı vardır ve $c = c_{\sigma^*}$ dır.



Şekil 6.6. $C(7,5)$ grafının bir minimum c Hamilton renklendirmesi

6.3.5. Tanım (Çift Merkezli Yıldız Grafı)

Bir çift merkezli yıldız grafı $K_2(n_1, n_2)$ ile gösterilir ki; bu graf K_2 tam grafına n_1 ve n_2 gibi askı ayrıtlarının eklenmesiyle elde edilir. Şekil 6.7 de $K_2(n_1, n_2)$ grafı gösterilmiştir (Shen ve ark., 2008).



Şekil 6.7. $K_2(n_1, n_2)$ grafı

6.3.6. Teorem

$K_2(n_1, n_2)$ grafi çift merkezli bir yıldız grafi olsun. Eğer $2 \leq n_1 \leq n_2$ ise $hc(K_2(n_1, n_2)) = (n_1 + n_2)^2 - 2n_1 + 1$ olur (Shen ve ark., 2008).

İspat

Durum 1: $n_2 = n_1 \geq 2$ olsun. Bu durumda $K_2(n_1, n_2) = C(4, n_1 + 1)$ dir. Yani $m = 4$, $d = n_1 + 1 \geq 3$ ve $n = |V(K_2(n_1, n_2))| = 2n_1 + 2 \geq 5$ olur. Böylece Teorem 6.3.2 den $hc(K_2(n_1, n_2)) = \frac{2n_1 - 1}{2n_1} (2n_1)^2 + 1 = 4n_1^2 - 2n_1 + 1 = (n_1 + n_2)^2 - 2n_1 + 1$ ifadesi elde edilir.

Durum 2: $n_2 > n_1 \geq 2$ olsun. Bu durumda $K_2(n_1, n_2)$ nin yapısından dolayı $n = |V(K_2(n_1, n_2))| = n_1 + n_2 + 2 \geq 7$ ve $\max\{D(u, v) : u, v \in V(K_2(n_1, n_2)), u \neq v\} \leq \frac{n}{2}$ olduğunu açıkça görebiliriz. Yani $K_2(n_1, n_2)$ bir $DB\left(\frac{n}{2}\right)$ grafıdır.

Teorem 6.2.4 den dolayı bizim sadece $\mathcal{W}(K_2(n_1, n_2))$ nin değerini belirlemeye ihtiyacımız vardır. $K_2(n_1, n_2)$ nin tepelerinin herhangi bir $\sigma : v_1, v_2, \dots, v_n$ sıralanışında; $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$ için $1 \leq D(v_i, v_{i+1}) \leq 3$ olduğu görülebilir.

Şimdi $T_3 = \{(v_i, v_{i+1}) : D(v_i, v_{i+1}) = 3, i = 1, 2, \dots, n-1\}$ kümesini tanımlayalım.

$K_2(n_1, n_2)$ grafının yapısından dolayı $|T_3| \leq 2n_1$ eşitsizliği sağlanır.

Eğer $|T_3| = 2n_1$ ise,

$$\begin{aligned} \max_{|T_3|=2n_1} \{ \mathcal{W}(\sigma) : \sigma, V(K_2(n_1, n_2)) \text{ nin bir sıralanışdır} \} &= 3.2n_1 + 2(n_2 - n_1) + 1 \\ &= 4n_1 + 2n_2 + 1 \end{aligned}$$

olur ve $\sigma^* : y_1, x_1, y_2, x_2, \dots, y_{n_1}, x_{n_1}, y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_2}, x_0, y_0$ öyle bir sıralanıştır ki;

$$|T_3| = 2n_1 \text{ ve } \mathcal{W}(\sigma^*) = \sum_{i=1}^{n-1} D(v_i, v_{i+1}) = 4n_1 + 2n_2 + 1 \text{ şartlarını sağlar.}$$

Eğer $|T_3| < 2n_1$ ise,

$$\begin{aligned} \text{maks}_{|T_3| < 2n_1} \{ \mathcal{W}(\sigma) : \sigma, V(K_2(n_1, n_2)) \text{ nin bir sıralanışıdır} \} &= 2 + 3(2n_1 - 1) + 2(n_2 - n_1 + 1) \\ &= 4n_1 + 2n_2 + 1 \end{aligned}$$

olur ve $\sigma^{**} : y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n_1}, y_{n_1}, y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_2}, x_0$ öyle bir sıralanıştır ki;

$$|T_3| < 2n_1 \text{ ve } \mathcal{W}(\sigma^{**}) = \sum_{i=1}^{n-1} D(v_i, v_{i+1}) = 4n_1 + 2n_2 + 1 \text{ şartlarını sağlar.}$$

Böylece;

$$\mathcal{W}(K_2(n_1, n_2)) = \text{maks} \{ \mathcal{W}(\sigma) : \sigma, V(K_2(n_1, n_2)) \text{ nin bir sıralanışıdır} \} = 4n_1 + 2n_2 + 1$$

şeklinde yazabiliriz ve Teorem 6.2.4 yardımıyla,

$$\begin{aligned} \text{hc}(K_2(n_1, n_2)) &= ((n_1 + n_2 + 2) - 1)^2 + 1 - D(K_2(n_1, n_2)) \\ &= (n_1 + n_2 + 1)^2 + 1 - (4n_1 + 2n_2 + 1) \\ &= (n_1 + n_2)^2 + 2n_1 + 1 \end{aligned} \quad \text{sonucuna ulaşırız ve ispat biter.}$$

6.3.7. Örnek

$K_2(3, 5)$ çift merkezli yıldız grafi için bir c minimum Hamilton renklendirmesini bulalım.

Çözüm

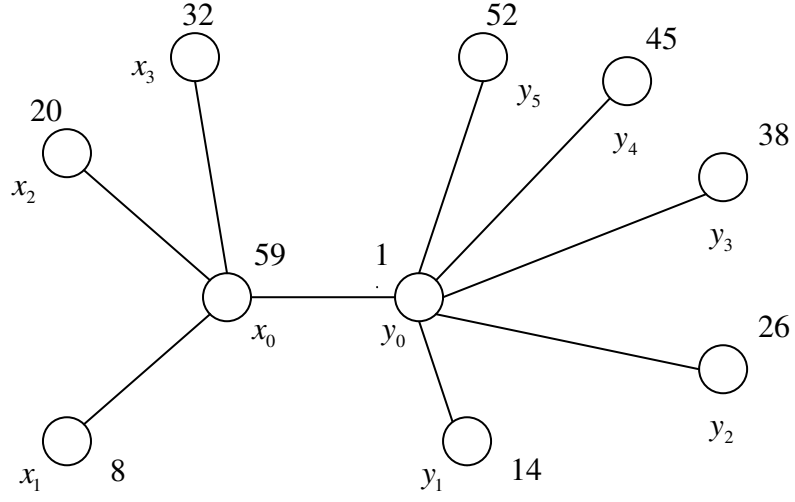
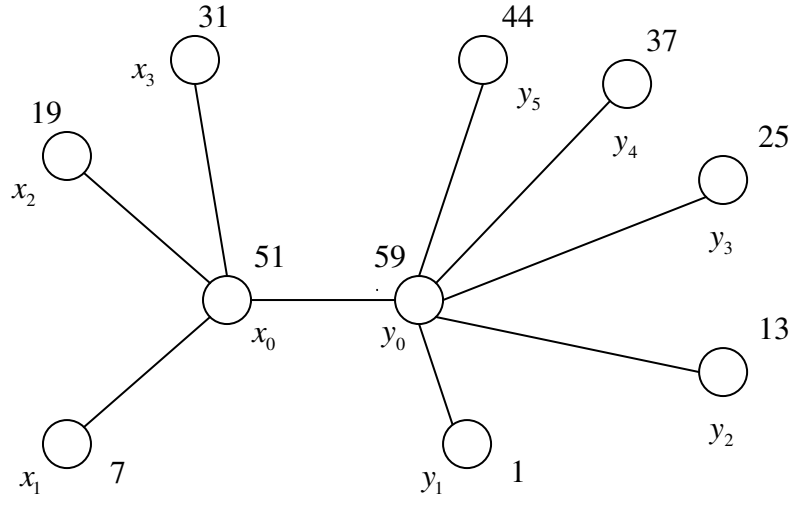
Burada $n_1 = 3$ ve $n_2 = 5$ olduğundan, $n = n_1 + n_2 + 2 = 10$ ve

$$\text{hc}(c) = \text{hc}(K_2(3, 5)) = (n_1 + n_2)^2 - 2n_1 + 1 = 8^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 59 \quad (\text{Şekil 6.8 incelenebilir})$$

$K_2(3, 5)$ grafinin tepelerinin $\mathcal{W}(\sigma^*) = \mathcal{W}(K_2(3, 5))$ koşulunu sağlayan bir

$\sigma^* : y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, y_4, y_5, y_0$ veya $\sigma^* : y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, y_4, y_5, x_0$ sıralanışı

vardır ve $c = c_{\sigma^*}$ dır.



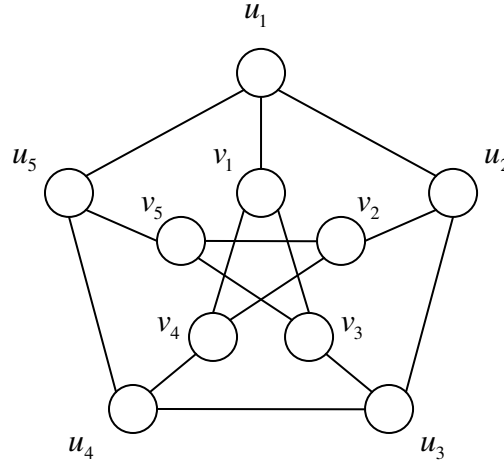
Şekil 6.8. $K_2(3,5)$ grafının minimum c Hamilton renklendirmeleri

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Hamilton Renklendirmesini başka graf sınıflarına da uygulamak mümkündür ve bu uygulamalarda bazı özel sonuçlara da ulaşılabilir. Örneğin özel bir graf sınıfı olan genelleştirilmiş Petersen grafları üzerinde Hamilton renklendirmesi ele alınabilir.

7.1. Tanım (Petersen Grafi)

Petersen grafi, tepe sayısı 10 olan 3-düzenli bir graftır (Chartrand ve Zhang, 2005). Ayrıca tepeleri kümesi $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ve ayrıtları kümesi de $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1, u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5\}$ dir. Şekil 7.1 de Petersen grafi gösterilmiştir.



Şekil 7.1. Petersen Grafi

7.2. Tanım (Dış Çevre, İç Çevre)

Şekil 7.1 de gösterilen Petersen grafında $C' : u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_1$ çevresine Petersen grafının *dış çevresi*, $C'' : v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1$ çevresine ise Petersen grafının *iç çevresi* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Petersen grafi içerisinde birçok çevre barındırır. Ancak bu çevrelerden hiç birisi bütün tepeleri içeren bir çevre (Hamilton çevresi) değildir. Böylece Petersen grafinin bir Hamilton grafi olmadığını söyleyebiliriz.

7.3. Teorem

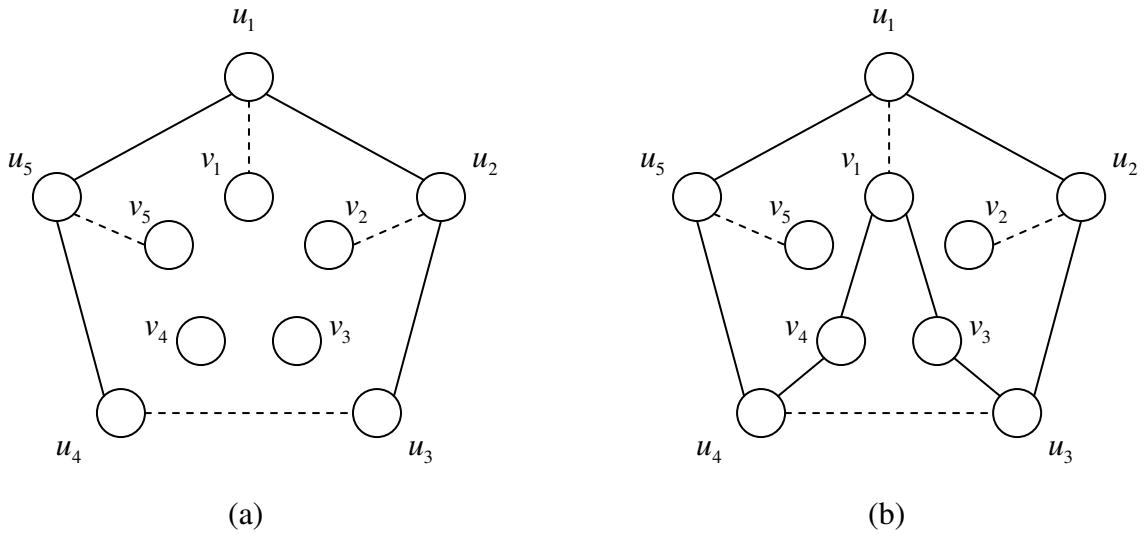
Petersen grafi bir Hamilton grafi değildir (Chartrand ve Zhang, 2005).

İspat

Petersen grafına kısaca PG diyelim ve bir Hamilton grafi olduğunu varsayalım. Bu durumda PG tam olarak 10 tane ayrıtı bulunan bir Hamilton çevresi içerecektir ve bu çevre de C olsun.

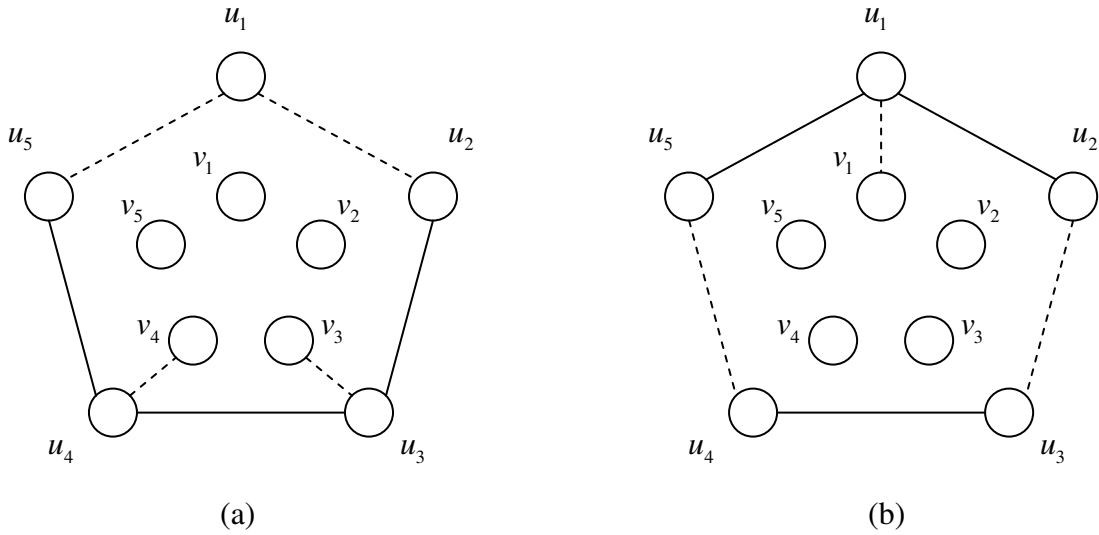
PG nin her bir tepesi ile komşu olan üç ayrıtıdan ikisinin C çevresine ait olması gerekir. C çevresi $1 \leq i \leq 5$ için $u_i v_i$ ayrıtılarının beş tanesini de içerebilir, bazılarını içerebilir veya hiçbirisini içermeyebilir. Bu nedenle C çevresinin en az beş ayrıtı C' ya da C'' çevrelerinden birisine aittir. Böylece C' çevresi ya da C'' çevresi, C çevresindeki en az üç ayrıtı içerir. Bu genelleştirmeyi bozmadan C' çevresinin C çevresindeki üç ayrıtı içerdiğini kabul edelim.

Hiçbir çevre grafinin alt grafi olacak şekilde bir çevre grafi bulunamayacağından, C' çevresinin beş ayrıtının da C çevresinde bulunamayacağı açıktır. Kabul edelim ki, C çevresi C' çevresinin $u_4 u_5, u_5 u_1, u_1 u_2, u_2 u_3$ şeklindeki dört ayrıtını içersin (Şekil 7.2 (a) incelenebilir. Burada PG nin kesik çizgili ayrıtılarının C çevresine ait olamayacağına dikkat edelim). Ancak bu durumda C çevresi $u_4 v_4, u_3 v_3$ ayrıtılarının yanında $v_1 v_3, v_1 v_4$ ayrıtılarını da içermek zorundadır (Şekil 7.2 (b) incelenebilir). Fakat bu durum C çevresinin sekiz ayrıttan oluşan bir çevre içermesini gerektirir ki, bu imkansızdır.



Şekil 7.2. C' çevresinin tam dört ayrıtını içeren C çevresi

Geriye C çevresinin C' çevresine ait tam olarak üç ayrıtı içerdiğini göstermek kalıyor. Bu durumda iki olasılık vardır. Bunlardan birincisi, C' çevresinin C çevresine ait üç ayrıtının, C' çevresinde birbiri ardınca sıralanmasıdır. İkincisi ise, C' çevresinin C çevresine ait üç ayrıtının, C' çevresinde birbiri ardınca sıralanmamasıdır. Bu iki durum Şekil 7.3 (a) ve Şekil 7.3 (b) de gösterilmiştir.



Şekil 7.3. C' çevresinin tam üç ayrıtını içeren C çevresi

Şekil 7.3 (a) daki durum, C çevresi üzerinde yer alan u_1 tepesine komşu olan yegane ayrıtın u_1v_1 olmasını gerektirdiğinden imkansızdır. Benzer şekilde Şekil 7.3 (b) deki durum, C çevresinin daha küçük bir çevre olan $u_4, v_4, v_1, v_3, u_3, u_4$ çevresini içermesini gerektirir ki, bu durum da imkansızdır.

Dolayısıyla iddia edildiğinin aksine Petersen grafi bir Hamilton grafi değildir.

7.4. Tanım (Genelleştirilmiş Petersen Grafi)

$n \geq 3$ için $1 \leq k \leq n-1$ olmak üzere, $2n$ tane tepesi olan bir genelleştirilmiş Petersen grafi $P(n, k)$ ile gösterilir.

$P(n, k)$ grafinin tepeler kümesi $V(P(n, k)) = \{u_i, v_i : 0 \leq i \leq n-1\}$ ve ayrıtlar kümesi $E(P(n, k)) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} : 0 \leq i \leq n-1\}$ şeklindedir (Chunling ve ark., 2009).

7.5. Örnek

$P(5, 1)$ ve $P(5, 2)$ graflarının tepelerinin ve ayrıtlarının kümeleri aşağıda verilmiştir.

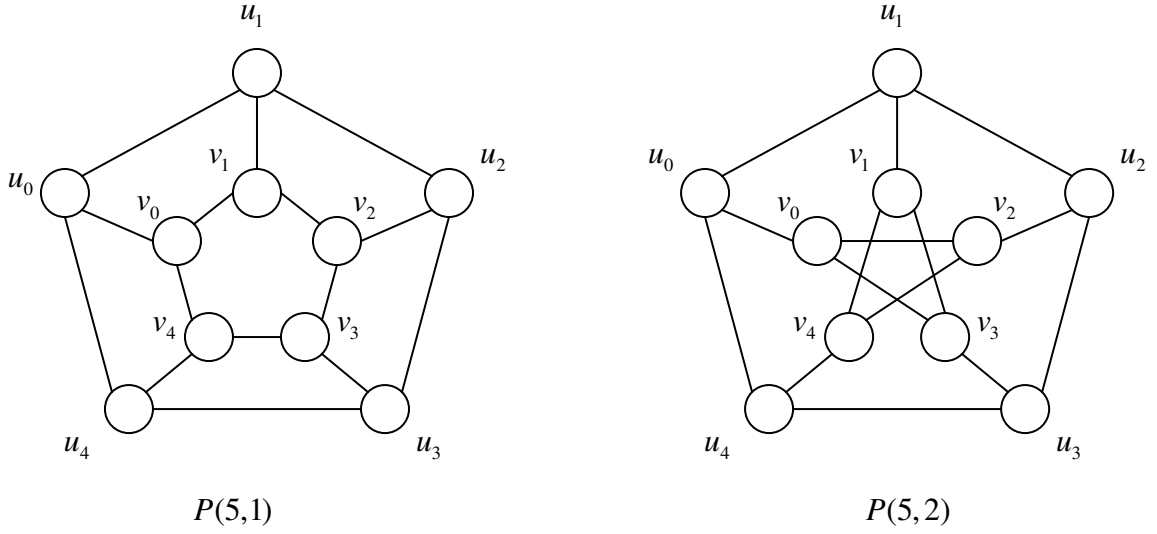
$$V(P(5, 1)) = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(P(5, 1)) = \{u_0 u_1, u_1 u_2, u_2 u_3, u_3 u_4, u_4 u_0, v_0 v_1, v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_0, u_0 v_0, u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3, u_4 v_4\}$$

$$V(P(5, 2)) = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(P(5, 2)) = \{u_0 u_1, u_1 u_2, u_2 u_3, u_3 u_4, u_4 u_0, v_0 v_2, v_1 v_3, v_2 v_4, v_3 v_0, v_4 v_1, u_0 v_0, u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3, u_4 v_4\}$$

Ayrıt ve tepelerinin kümeleri verilen bu graflar Şekil 7.4 de gösterilmiştir.



Şekil 7.4. $P(5,1)$ ve $P(5,2)$ grafları

7.6. Gözlem

Tanım 7.1 de ifade edilen Petersen grafının $P(5,2)$ grafi ile eş olduğunu görebiliriz. Ayrıca $P(5,1)$ ile $P(5,4)$ grafları ve benzer şekilde $P(5,2)$ ile $P(5,3)$ grafları da eş graflardır.

Bunun yanında $P(5,1)$ ve $P(5,4)$ grafları ile $P(5,2)$ ve $P(5,3)$ grafları izomorf graflardır. Yani bu grafların ayrıt sayıları, tepe sayıları, çevre sayıları ve dereceleri aynı olan tepelerinin sayıları eşittir.

7.7. Önerme

n tek sayı olmak üzere, $n \geq 3$ için $hc(P(n,1))=1$ dir.

İspat

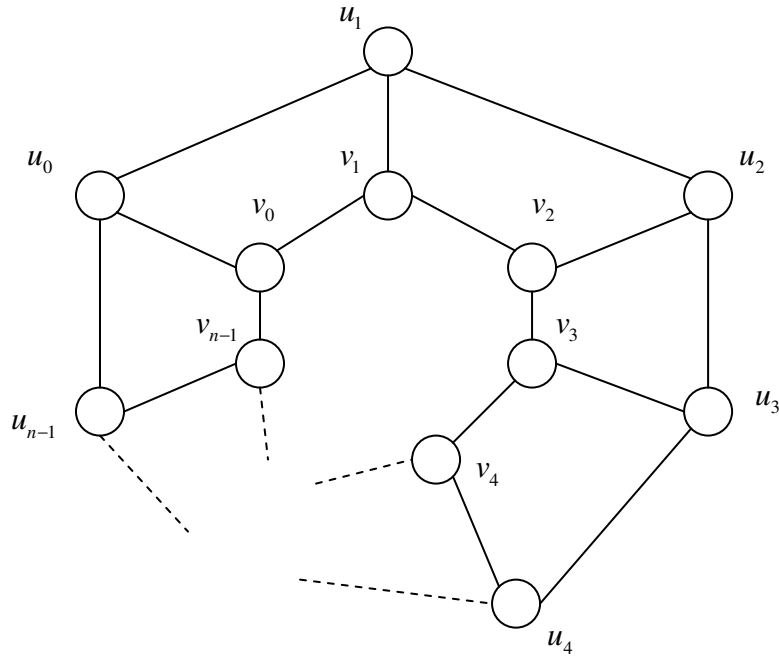
Gözlem 5.2.9 da bağlantılı bir grafın Hamilton kromatik değerinin 1 olabilmesi için grafın Hamilton bağlantılı olması gerektiği ifade edilmiştir. Böylece önermedeki ifadenin doğruluğunu göstermek için $n \geq 3$ tek sayısı için $P(n,1)$ grafının Hamilton

bağlantılı olduğunu göstermek gerekmektedir. $P(n,1)$ grafının tepe ve ayrıtlarının kümesini;

$$V(P(n,1)) = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$$

$$E(P(n,1)) = \{u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{n-2}u_{n-1}, u_{n-1}u_0, v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_0, u_0v_0, u_1v_1, \dots, u_{n-1}v_{n-1}\}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şekil 7.5 de $P(n,1)$ grafi gösterilmiştir.



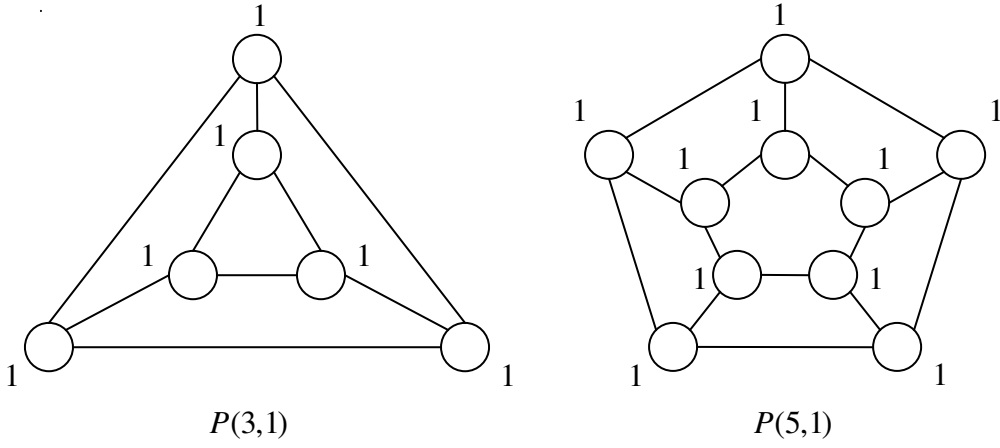
Şekil 7.5. $P(n,1)$ grafi

Şimdi $V(P(n,1))$ kümesinden seçilecek herhangi iki tepe arasında $E(P(n,1))$ kümesinden uygun şekilde seçilecek ayrıtlar ile bir Hamilton yolu (grafın bütün tepelerini içeren bir yol) bulunduğu görülebilir. Örneğin komşu olmayan v_1 ile u_2 tepeleri arasındaki Hamilton yolu $v_1, u_1, u_0, v_0, v_{n-1}, u_{n-1}, u_{n-2}, v_{n-2}, \dots, u_3, v_3, v_2, u_2$ şeklindedir. Diğer taraftan komşu olan v_1 ile u_1 tepeleri arasındaki Hamilton yolunu da $v_1, v_0, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_3, v_2, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1$ şeklinde belirleyebiliriz. Böylece $n \geq 3$

tek sayısı için $P(n,1)$ grafinin Hamilton bağlantılı olduğu ve buradan Gözlem 5.2.9 yardımıyla teoremdaki koşullar altında $hc(P(n,1))=1$ olduğu görülmektedir.

7.8. Örnek

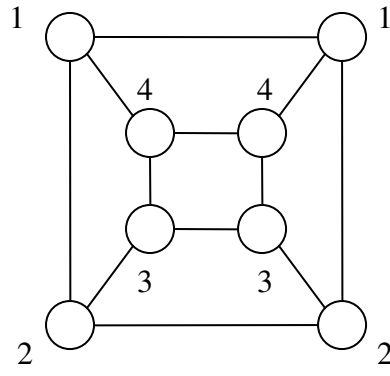
Şekil 7.6 da $P(3,1)$, $P(5,1)$ grafları ve bu grafların minimum Hamilton renklendirmeleri verilmiştir.



Şekil 7.6. $P(3,1)$, $P(5,1)$ graflarının minimum Hamilton renklendirmeleri

7.9. Sonuç

n çift sayı olmak üzere, $n \geq 3$ için $hc(P(n,1))$ değerini araştırmak kuşkusuz daha uzun bir çalışma yapmayı gerektirecektir. Çünkü bu durumda $P(n,1)$ grafi Hamilton bağlantılı bir graf olmayacaktır ve bütün tepelere aynı rengin atanması mümkün değildir. Bir örnek oluşturması açısından Şekil 7.7 deki $P(4,1)$ grafinin minimum Hamilton renklendirmesi incelenebilir. Burada $hc(P(4,1))=4$ olduğu görülmektedir.



Şekil 7.7. $P(4,1)$ grafının minimum Hamilton renklendirmesi

KAYNAKLAR

- Ceyhun, Y., 1976. *Çizge Kuramı*. Elektrik Müh. Böl. Müh. Fak. ODTÜ, 54, Ank. 265s.
- Chartrand, G., Nebeský, L., Zhang, P., 2002. Bounds for the Hamiltonian chromatic number of graph, *Congr. Numer.* 157: 113-125
- Chartrand, G., Zhang, P., 2005. *Introduction to Graph Theory*. McGraw-Hill, USA. 386.
- Chartrand, G., Nebeský, L., Zhang, P., 2005a. Hamiltonian colorings of graphs. *Discrete Appl. Math.* 146 : 257-272
- Chartrand, G., Nebeský, L., Zhang, P., 2005b. On Hamiltonian colorings of graphs. *Discrete Math.* 290 : 133-143
- Chunling, T., Xiaohui, L., Yuansheng Y., Meiqin L., 2009. 2-rainbow domination of generalized Petersen graphs $P(n,2)$. *Discrete Appl. Math.* 157 : 1932-1937
- Diestel, R., 2000. *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York. 313.
- Harju, T., 2007. *Lectures Notes On Graph Theory*. University of Turku , Finland. 99.
- Meng, K.H., Fengming, D., Guan, T.E., 2007. *Introduction to Graph Theory*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. , Singapore. 228.
- Nesim, A., Alpay, Ş., Saka, M., 2003. *Matematik Dünyası 2003 Güz (3)*. 9-46
- Sessu, S., Reed, M.B., 1961. *Linear Graphs and Electrical Net Works*, Addison- Wesley Publishing Company, Inc 1961.
- Shen, Y., He, W., Li, X., He, D., Yang, X., 2008. On Hamiltonian colorings for some graphs. *Discrete Appl. Math.* 156 : 3028-3034

ÖZ GEÇMİŞ

Ahmet Hatip GÜZEL, 1981 yılında Mardin’de dünyaya geldi. Lise öğrenimini 1999 yılında tamamlayarak, 2000 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve Mayıs 2005 de mezun oldu. Eylül 2005 de aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Matematik Öğretmenliği alanında Tezsiz Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve eş zamanlı olarak özel bir dershanede Matematik öğretmeni olarak çalıştı. Şubat 2007 de Tezsiz Yüksek Lisans öğrenimini tamamlamasının ardından Ağustos 2007 de TÜİK Van Bölge Müdürlüğü’ne Matematikçi olarak atandı. Mart 2009 da Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans öğrenimi görmeye başladı. Halen TÜİK Van Bölge Müdürlüğü’nde Matematikçi olarak görev yapmayı sürdüren yazar evlidir.