

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRAFLARDA PARÇALANIŞLI ÜSTÜNLÜK SAYILARI ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: SÜLEYMAN EDİZ
DANIŞMAN: YRD. DOÇ. DR. M. ŞERİF ALDEMİR

VAN-2010

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalında Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR danışmanlığında, Süleyman EDİZ tarafından sunulan “ Graflarda Parçalanışlı Üstünlük Sayıları Üzerine” isimli bu çalışma “Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği” ve “Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi”nin ilgili hükümleri gereğince 22/10/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Prof.Dr.Çiğdem GENCER

İmza: 

Üye:
Doç.Dr.Hakkı DURU

İmza: 

Üye:
Doç.Dr.Zeynel YALÇIN

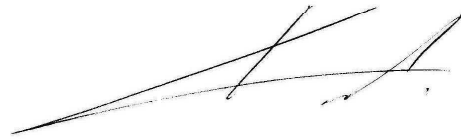
İmza: 

Üye:
Yrd.Doç.Dr.M.Şerif ALDEMİR

İmza: 

Üye:
Yrd.Doç.Dr.Kamil AKBAYIR

İmza:



Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../ 2010 tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.


Doç. Dr. FAHİR AKTAS
Enstitü Müdürü

ÖZET

GRAFLARDA PARÇALANIŞLI ÜSTÜNLÜK SAYILARI ÜZERİNE

EDİZ, Süleyman

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

Ekim 2010, 30 sayfa

Bir G grafinin tepeleri kümesinin iki renk sınıfına parçalanışı varsa, bu G grafi 2-parçalanışlı graftır. Bu tepelerin bir sınıfı kırmızıyla diğer sınıfı da maviyle renklendirilir. F , belirli bir v mavi tepesini kök kabul eden iki parçalanışlı bir graf olsun. Bir G grafinin F üstünlük sayısı, G nin tepelerinin bir kırmızı-mavi renklendirmesinde G nin kırmızı tepelerinin minimum sayısıdır öyle ki G nin her v mavi tepesi, kökü v olan F nin bir nüshasına aittir. $F=\{F_1, \dots, F_k\}$ olsun. Burada F_i , $1 \leq i \leq k$, belirli bir v mavi tepesini kök kabul eden iki parçalanışlı graftır. Bir G grafinin $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayısı, G nin tepelerinin bir kırmızı-mavi renklendirmesinde G nin kırmızı tepelerinin minimum sayısıdır öyle ki G nin her v mavi tepesi kökü v olan F_i nin en az bir nüshasına aittir. Bu çalışmada F , 2-parçalanışlı 6-çevre grafi olmak üzere prizmaların F -üstünlük sayısı incelenerek konuyla ilgili bir genelleştirme teoremi ispat edilmiştir. Aynı zamanda $\mathcal{F}$, 2-parçalanışlı 3-yol graflarının iki tepesi kırmızı olan bir ailesi olmak üzere bir grafin $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayıları ile 2-gökkuşağı üstünlük sayıları arasındaki ilişki belli graf sınıfları ve rastgele seçilmiş bazı graf sınıfları için incelenerek, herhangi bir birleştirilmiş G grafi için 2-gökkuşağı üstünlük sayısının, $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayısına eşit yada $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayısından bir fazla olduğu tahmininde bulunulmuştur. Bunlara ilaveten bir grafin $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayıları ile bu grafin maksimum derecesi ve mertebesi arasındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: 2-Gökkuşağı üstünlük sayısı, 2-Parçalanışlı üstünlük sayısı, Prizma

ABSTRACT

ON STRATIFIED DOMINATION NUMBERS IN GRAPHS

EDİZ, Süleyman

Ph. D. Thesis, Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. M. Şerif ALDEMİR

October 2010, 30 pages

A graph G is 2-stratified if its vertex set is partitioned into two color classes. We color the vertices in one color class red and the other class blue. Let F be a 2-stratified graph rooted at one fixed blue vertex v specified. The F -domination number of a graph G is the minimum number of red vertices of G in a red-blue coloring of the vertices of G such that every blue vertex v of G belongs to a copy of F rooted at v . Let $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$, where F_i , $1 \leq i \leq k$, is a 2-stratified graph rooted at some blue vertex v . The $\mathcal{F}^*$ -domination number of G is defined as the minimum number of red vertices of G in a red-blue coloring of the vertices of G such that every blue vertex v of G belongs to a copy of F_i rooted at v for at least one value of i . In this study we investigate the F -domination number of prisms when F is a 2-stratified 6-cycle rooted at a blue vertex. And one generalization theorem was proven. Also we study the relation between 2-rainbow domination number and $\mathcal{F}^*$ -domination number for some known graph classes and randomly chosen graph classes when $\mathcal{F}$ is the family of 2-stratified paths of length 3 in which two vertices are colored red. We conjectured that 2-rainbow domination number is equal or greater than $\mathcal{F}^*$ -domination number by one for any connected graph G . In addition the relation between $\mathcal{F}^*$ -domination number and maximum degree and order were studied.

Key Words: 2-Rainbow domination number, 2-Stratified domination number, Prism

ÖN SÖZ

Uygulamalı Matematiğin bir dalı olan Graf Teorisi, gün geçtikçe temel, mühendislik ve sosyal bilimlerde daha çok uygulama alanı bulmaktadır. Bunun en temel nedeni grafların, gerçek hayatta, temel bilimlerde ve mühendislikte ortaya çıkan bir çok problemin anlaşılıp çözülebilmesi için model oluşturmaktan geçmektedir.

Karşılaşılan bu problemlerden biride ‘ VLSI (Very Large Scale Integrated Circuit) çiplerinin transistörlerle nasıl dizayn edileceği problemidir’. Bir tipik VLSI çipi milyonlarca transistorün birbiriyle bağlanmasını gerektirir. Son yıllarda VLSI üretim teknolojilerindeki gelişmelerle iki veya üç şeritli rotaların arasındaki iç haberleşme tekniği yaygın olarak kullanılmaktadır. Pentium firması, Apple, IBM ve Motorola gibi kuruluşlar için bu tür çipleri üretmektedir. Çok şeritli rota problemlerinin çözümü için geliştirilen dizayn algoritmalarında parçalanışlı graflar modelleme ve çözümde kullanılır. Bu nedenle parçalanışlı grafların önemi artmış ve konuyla ilgili ileri teorik çalışmalar başlamıştır.

Bir grafin tepelerinin belli bir parçalanışı varsa bu grafa parçalanışlı graf denir. Parçalanışlı graflar, graf teorisinde önemli yeri olan ve mühendislik problemlerinde birçok uygulaması olan üstünlük (hakimiyet, domination) la ilişkisinin bulunmasından sonra teorik graf teorisinin de önemli bir konusu olmuştur.

Bu çalışmada prizmaların parçalanışlı üstünlük sayıları ve graf ailelerinin parçalanışlı üstünlük sayıları ile 2-gökkuşağı üstünlük sayıları arasındaki ilişki incelenmiştir.

Bu tezin hazırlanmasında ve eğitimim süresince yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocalarım Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR ve Prof. Dr. Çiğdem GENCER’e teşekkür ederim.

21. 10. 2010

Süleyman EDİZ

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER DİZİNİ	xi
1.GİRİŞ	1
2.KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	9
3.PRİZMALARDA PARÇALANIŞLI ÜSTÜNLÜK SAYILARI	13
4. $\mathcal{F}$ -PARÇALANIŞLI ÜSTÜNLÜK VE 2-GÖKKUŞAĞI ÜSTÜNLÜK SAYILARI	19
5. SONUÇ	27
KAYNAKLAR	28
ÖZ GEÇMİŞ	30

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Bir $G=(V, E)$ grafının diyagramla gösterilmiş şekli.	1
Şekil 1.2. K_5 tam grafi.	2
Şekil 1.3. Bazı yol ve çevre grafları.	2
Şekil 1.4. Bazı iki bölümlü ve yıldız graflar.	3
Şekil 1.5. Bir 3-yol grafi ile bir 2-tam grafın kartezyen çarpımı.	4
Şekil 2.1. Sekiz farklı 2-parçalı graflar.	9
Şekil 2.2. Beş farklı 2-parçalı C_4 çevre grafları.	10
Şekil 2.3. Dokuz farklı 2-parçalı C_5 çevre grafları.	10
Şekil 2.4. 2-parçalı 3-yol grafları.	11
Şekil 3.1. 2-parçalı C_6 çevre grafları.	13
Şekil 4.1. 2-parçalı 3-yol grafları.	19
Şekil 4.2. $S_{1,7}$ yıldız grafi.	21
Şekil 4.3. $S_{1,7}$ yıldız grafında 2-gökkuşağı üstünlük.	21
Şekil 4.4. K_5 tam grafında 2-gökkuşağı ve $\mathcal{F}^*$ - parçalı üstünlük sayıları.	22
Şekil 4.5. S grafında $\mathcal{F}^*$ - parçalı üstünlük sayıları ve 2-gökkuşağı üstünlük sayıları.	22
Şekil 4.6. M grafında $\mathcal{F}^*$ - parçalı üstünlük sayıları ve 2-gökkuşağı üstünlük sayıları.	23
Şekil 4.7. L grafında $\mathcal{F}^*$ - parçalı üstünlük sayıları ve 2-gökkuşağı üstünlük sayıları.	24
Şekil 4.8. H grafının G grafindan elde edilişi.	25

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

G	Graf
V	Tepeler kümesi
E	Ayrıtlar kümesi
C	Çevre grafi
P	Yol grafi
K	Tam graf
S	Yıldız grafi
$N(v)$	v tepesine komşu olan tepeler kümesi

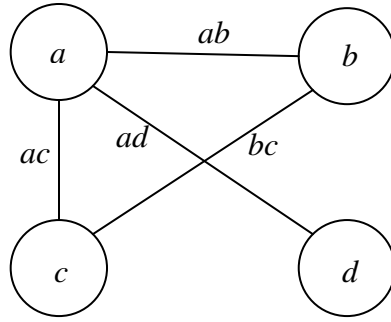
1. GİRİŞ

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde gerekli olan temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 1.1. Elemanları tepe olarak isimlendirilen boş olmayan sonlu bir V kümesi ve elemanları ayrıt olarak isimlendirilen ve yine elemanları bu V kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesinin oluşturduğu $G=(V,E)$ sıralı ikilisine bir *graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Genelde graflar düzlem üzerinde diyagramlar şeklinde gösterilirler.

Örnek 1.2. Tepeleri kümesi $V=\{a, b, c, d\}$ ve ayrıtları kümesi $E=\{\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,d\}\}$ olan $G=(V,E)$ grafi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 1.1. Bir $G=(V, E)$ grafının diyagramla gösterilmiş şekli

Grafların gösterimini kolaylaştırmak için $\{a, b\}$ ayrıtı yerine ab gösterimi kullanılır. Eğer ab , G nin bir ayrıtı ise a ile b tepeleri *komşudur* denir.

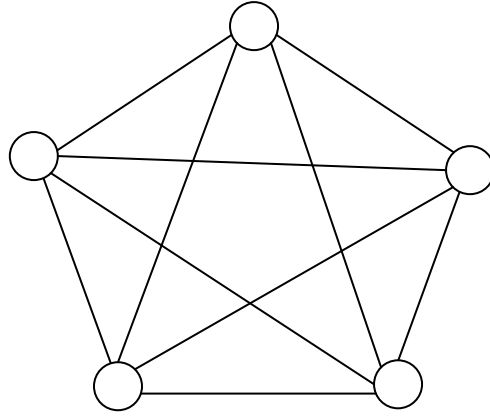
Tanım 1.3. Sadece bir tepeden oluşan grafa *bayağı graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Tanım 1.4. G bir graf ve $v \in V(G)$ olmak üzere $N(v) = \{u \in G \mid uv \in E(G)\}$ kümesine v nin *açık komşuluğu kümesi* denir. $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ kümesine de v nin *kapalı komşuluğu kümesi* denir. Bir v tepesine komşu olan tepelerin sayısına da v nin *derecesi* denir ve $\deg(v) = |N(v)|$ ile gösterilir. Eğer herhangi bir $v \in V(G)$ için $\deg(v) = 0$ ise v ye *izole tepe* ve $\deg(v) = 1$ ise v ye G nin bir *yaprağı* denir. (Meng ve ark., 2007).

Tanım 1.5. G bir graf olmak üzere, $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ ye G nin *minimum derecesi*, $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$ ye de G nin *maksimum derecesi* denir (Meng ve ark., 2007).

Tanım 1.6. Bir G grafının bütün tepeleri birbirleriyle komşu ise G ye *tam graf* denir (Meng ve ark., 2007).

Tepe sayısı n olan bir tam graf K_n ile gösterilir Şekil 1.2. de K_5 tam grafi gösterilmiştir.



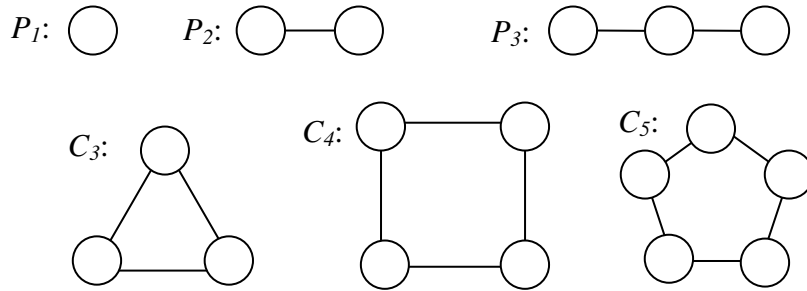
Şekil 1.2. K_5 tam grafi

Tanım 1.7. Bir G grafının bütün tepelerinin dereceleri birbirine eşit ise G ye *düzgün graf* denir. Bu derece r ise G ye *r -düzgün graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Tanım 1.8. Eğer $v_1, v_2, \dots, v_n$ tepeli bir G grafının ayrıtları sadece $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ den oluşuyorsa G ye n tepeli bir *yol grafi* denir ve P_n ile gösterilir (Meng ve ark., 2007).

Tanım 1.9. Eğer $v_1, v_2, \dots, v_n$ tepeli bir G grafının ayrıtları $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ ve v_nv_1 den oluşuyorsa G ye bir *çevre grafi* denir ve C_n ile gösterilir (Meng ve ark., 2007).

Şekil 1.3. te bazı çevre ve yol grafları gösterilmiştir.



Şekil1.3. Bazı yol ve çevre grafları

Tanım 1.10. G bir graf olmak üzere ayrıtları sadece G de komşu olmayan bütün tepelerin birleştirilmesiyle oluşan grafa G nin *tümleyeni* denir ve $\bar{G}$ ile gösterilir. $\bar{K}_n$ grafi n tepeden oluşan ayrıtsız bir graftır. Bu grafa *boş graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Tanım 1.11. G bir graf ve $V(G)=(X,Y)$ tepelerin bir parçalanışı olmak üzere G nin bütün ayrıtları sadece X ve Y tepelerinin karşılıklı birleştirilmesinden oluşuyorsa G ye *iki parçalı graf* denir (Harju, 2007).

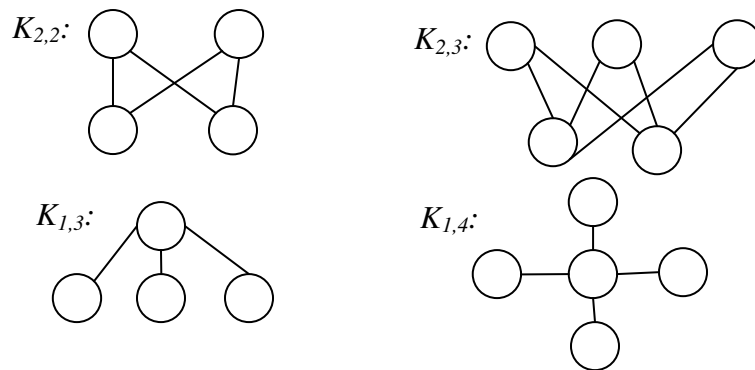
Tanım 1.12. G bir graf olmak üzere G nin bütün tepeleri, bir yol grafi ile bağlanabiliyorsa G ye *birleştirilmiş graf* denir (Diestel, 2000).

Tanım 1.13. G bir birleştirilmiş graf olmak üzere, herhangi bir $e \in E(G)$ için $G-e$ grafi bağlantısız oluyorsa e ayrıtına bir *köprü* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Tanım 1.14. G içinde herhangi bir çevre grafi barındırmıyorsa G ye *çevresiz graf* denir (Meng ve ark., 2007).

Tanım 1.15. G bir birleştirilmiş graf olmak üzere G çevresiz ise G ye bir *ağaç* denir (Meng ve ark., 2007).

Tanım 1.16. G bir iki parçalı graf ve $V(G)=(X,Y)$ olmak üzere X in bütün tepeleri Y nin bütün tepeleriyle komşu ise G ye *tam iki parçalı graf* denir ve $|X|=s$ ve $|Y|=t$ olmak üzere $K_{s,t}$ ile gösterilir. Eğer $s=1$ veya $t=1$ ise $G=K_{s,t}$ ye bir *yıldız grafi* denir (Chartrand ve Zhang, 2005). Şekil 1.4. te bazı tam iki parçalı graflar ve bu grafların özel bir şekli olan bazı yıldız grafları gösterilmiştir.



Şekil 1.4. Bazı iki parçalı ve yıldız graflar

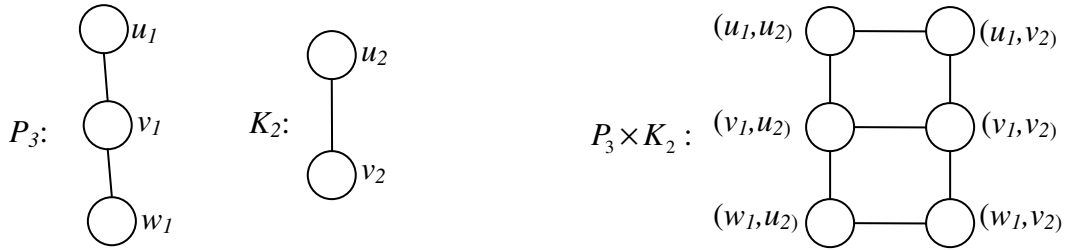
Tanım 1.17. G ve H herhangi iki graf olmak üzere bu iki grafın *kartezyen çarpımı* $G \times H$ nin tepeleri $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ tır. Ayrıtlar kümesi $E(G \times H)$ için, iki

farklı (u, v) ve (x, y) tepelerinin birleşiminden oluşan bir ayrıtın var olabilmesi için aşağıdaki iki şarttan birinin sağlanması gerekir.

i. $u = x$ ve $vy \in E(H)$,

ii. $v = y$ ve $ux \in E(G)$ (Chartrand ve Zhang, 2005).

Şekil 1.5. te bir 3-yol grafi ile bir 2-tam grafin kartezyen çarpımı gösterilmiştir.



Şekil 1.5. Bir 3-yol grafi ile bir 2-tam grafin kartezyen çarpımı

Tanım 1.18. G bir graf ve $u, v \in V(G)$ olmak üzere en kısa uzunluklu bir $u - v$ yol grafindaki ayrıtların sayısına u ile v arasındaki *uzaklık* denir ve $d(u, v)$ ile gösterilir (Harju, 2007).

Tanım 1.19. $G = (V, E)$ bir graf ve $S \subseteq V$ olmak üzere $V - S$ deki her tepe S deki en az bir tepeye komşu ise S ye G nin bir *üstün kümesidir* denir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.20. G bir graf olmak üzere minimum kardinaliteye sahip bir üstünlük kümesinin eleman sayısına G nin *üstünlük sayısı* denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.21. G bir graf olmak üzere $\gamma(G)$ kardinalitesine sahip bir üstünlük kümesine $\gamma(G)$ -*kümesi* denir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.22. $G = (V, E)$ bir graf ve $S \subseteq V$ olmak üzere V deki her tepe S deki en az bir tepeye komşu ise S ye G nin bir *toplam üstün kümesidir* denir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.23. G bir graf olmak üzere minimum kardinaliteye sahip bir toplam üstünlük kümesinin eleman sayısına G nin *toplam üstünlük sayısı* denir ve $\gamma_t(G)$ ile gösterilir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.24. $G = (V, E)$ bir graf ve $S \subseteq V$ olmak üzere S de olmayan her tepe S deki bir tepeye ve $V - S$ deki bir tepeye komşu ise S ye G nin *kısıtlı üstünlük kümesi* denir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.25. G bir graf olmak üzere minimum kardinaliteye sahip bir kısıtlı üstünlük kümesinin eleman sayısına G nin kısıtlı üstünlük sayısı denir ve $\gamma_r(G)$ ile gösterilir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.26. $G=(V,E)$ bir graf ve $S \subseteq V$ olmak üzere S , aynı zamanda toplam üstünlük ve kısıtlı üstünlük kümesi ise S ye toplam kısıtlı üstünlük kümesi denir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.27. G bir graf olmak üzere minimum kardinaliteye sahip bir toplam kısıtlı üstünlük kümesinin eleman sayısına G nin toplam kısıtlı üstünlük sayısı denir ve $\gamma_{tr}(G)$ ile gösterilir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.28. $G=(V,E)$ bir graf ve $S \subseteq V$ olmak üzere $V-S$ deki her tepe S deki en az k tepeye komşu ise S ye k -üstünlük kümesi denir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.29. G bir graf olmak üzere minimum kardinaliteye sahip bir k -üstünlük kümesinin eleman sayısına G nin k -üstünlük sayısı denir ve $\gamma_k(G)$ ile gösterilir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.30. G bir graf , $[k]=\{1,2,...,k\}$ ve $2^{[k]}$, $[k]$ nin kuvvet kümesini göstermek üzere aynı zamanda $f:V(G) \mapsto 2^{[k]}$ bir fonksiyon olmak üzere, her $v \in V(G)$ için ya $f(v) \neq \emptyset$ ya da $f(N(v))=[k]$ sağlanıyorsa f ye k -gökkuşağı üstünlük fonksiyonu denir (Chang ve ark. , 2010).

Tanım 1.31. f bir k -gökkuşağı üstünlük fonksiyonu olmak üzere $w(f) = \sum_{v \in V(G)} |f(v)|$ değerine f nin ağırlığı denir. (Bresar ve Sumenjak, 2007).

Tanım 1.32. G bir graf olmak üzere minimum ağırlıklı bir f k -gökkuşağı üstünlük fonksiyonunun değerine G nin k -gökkuşağı üstünlük sayısı denir ve $\gamma_{rk}(G)$ ile gösterilir (Bresar ve Sumenjak, 2007).

Tanım 1.33. $G=(V,E)$ bir graf olmak üzere tepeler kümesi V nin belli bir parçalanışı varsa G ye parçalanışlı graf denir . Eğer bu parçalanma $V=\{V_1, V_2\}$ ise G ye 2-parçalanışlı graf ve V_1 ve V_2 ye de G nin tabakaları(stratum) denir (Rashidi , 1994).

Tanım 1.34. G , 2-parçalanışlı graf ise G nin tepelerinin bir kısmının kırmızı, bir kısmının da mavi renkle renklendirildiği kabul edilir. Kırmızı tepeler siyah renkle, mavi tepeler ise beyaz renkle gösterilir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Tanım 1.35. Bir G grafinin tepelerinin bir kısmının mavi, diğer kısmının kırmızı renkle renklendirilmesine G nin kırmızı-mavi renklendirilmesi denir. Tepelerin hepsi mavi ya da kırmızı olabilir. Bu renklendirmeye de yine G nin kırmızı-mavi renklendirmesi denir. Eğer G nin en az bir tepesi bile farklı renkte (kırmızı veya mavi) olursa bu renklendirme, G nin bir 2-parçalınlı grafini gösterir (Chartrand ve Zhang, 2005).

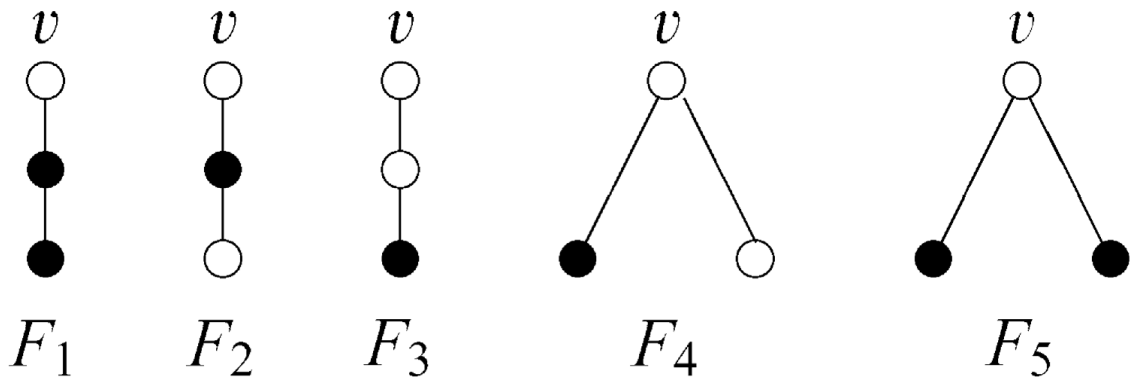
Tanım 1.36. F belli bir v mavi tepesi kök olarak seçilen bir 2-parçalınlı graf ise F ye v köklü F grafi denir (Chartrand ve ark. , 2003).

Tanım 1.37. G bir graf ve F , v köklü F grafi olmak üzere, G nin bir kırmızı-mavi renklendirmesinde G deki her mavi tepe, F grafinin G deki bir kopyasındaki v mavi tepesine karşılık geliyorsa bu renklendirmeye G nin F -renklendirmesi denir (Chartrand ve ark. , 2003).

Tanım 1.37. G bir graf olmak üzere G nin bir F -renklendirmesindeki minimum sayıdaki kırmızı tepelerin sayısına G nin F -üstünlük sayısı denir ve $\gamma_F(G)$ ile gösterilir (Chartrand ve ark. , 2003).

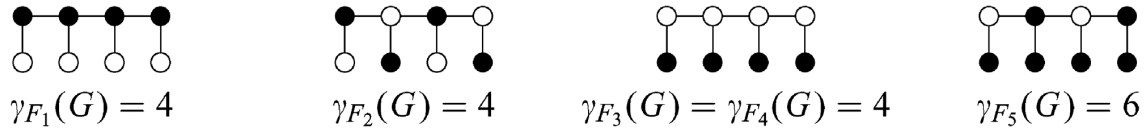
Tanım 1.38. G bir graf olmak üzere G nin $\gamma_F(G)$ adet tepesini kırmızıya boyayan G nin bir F -renklendirmesine G nin bir γ_F -renklendirmesi denir (Chartrand ve ark. , 2003).

Tanım 1.39. G bir graf olmak üzere G nin bir γ_F -renklendirmesindeki kırmızı tepelerin kümesine G nin γ_F -kümesi denir. Eğer G , F nin bir kopyasını içermiyorsa G nin bütün tepeleri kırmızıya boyanır ve böylece $\gamma_F(G) = n$ olur (Chartrand ve ark. , 2003).



Şekil 1.6. 2-parçalınlı farklı yol grafları

Şimdi parçalanışlı üstünlük sayılarıyla ilgili temel teoremler ve önermeler verilecektir. (Chartrand ve ark., 2003) te ilk kez üstünlük kavramının, parçalanışlı graflarla ilişkisi kuruldu. Bu çalışmalarında kullandıkları parçalanışlı graflar Şekil 1.6. da gösterilmiştir. Yine Şekil 1.6. da ki her bir graf için Şekil 1.7. de gösterilen G grafın da ki parçalanışlı üstünlük sayılarının değerleri gösterilmiştir.



Şekil 1.7. G grafında 2-parçalanışlı üstünlük sayıları

Teorem 1.40. G , mertebesi en az üç olan herhangi bir birleştirilmiş graf olmak üzere,

- (a) $\gamma_{F_1}(G) = \gamma_t(G)$.
- (b) $\gamma_{F_2}(G) = \gamma(G)$.
- (c) $\gamma_{F_4}(G) = \gamma_r(G)$.
- (d) $\gamma_{F_5}(G) = \gamma_2(G)$ (Chartrand ve ark., 2003).

Önerme 1.41. $n \geq 3$ olmak üzere, $\gamma_{F_3}(P_n) = \left\lfloor \frac{n+7}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ (Henning ve Maritz, 2004)

Önerme 1.42. T , mertebesi en az üç olan bir ağaç ise, $\gamma_{F_3}(G) \leq \frac{2n}{3}$ olur (Henning ve Maritz, 2004)



Şekil 1.8. 2-parçalanışlı K_3 tam grafları

Teorem 1.43. G , her tepesi bir C_3 çevresinde yer alan bir graf olmak üzere,
 $\gamma_{F_6}(G) \leq \frac{2n}{3}$ (Chartrand ve ark. , 2003).

Teorem 1.44. G , her tepesi bir C_3 çevresinde yer alan bir graf olmak üzere, $\gamma_{F_7}(G) < \frac{n}{2}$
(Chartrand ve ark. , 2003).

Parçalanışlı üstünlük sayılarıyla ilgili ayrıntılı bilgi için (Haynes ve ark., 2009) ve referanslarına bakılabilir.

Tanım 1.45. G ve H birer graf olmak üzere, $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ise H ye G nin bir *alt grafi* denir (Meng ve ark. , 2007).

Tanım 1.46. $K_{1,3}$ yıldız grafına *pençe(claw) grafi* denir (Chartrand ve ark. , 2000).

Tanım 1.47. $G=(V,E)$ bir graf ve $S \subseteq V$ olmak üzere, S deki farklı her iki tepe arasındaki uzaklık en az 3 ise S ye G nin bir *paket kümesi(packing set)* denir. S , G nin maksimum kardinaliteye sahip bir paket kümesi ise S nin kardinalitesine G nin *paket sayısı(packing number)* denir ve $g(G)$ ile gösterilir (Haynes ve ark. , 2009).

Tanım 1.48. C_n bir çevre grafi, K_2 bir tam graf olmak üzere $G = C_n \times K_2$ grafına *prizma* denir (Chartrand ve ark., 2000).

Tanım 1.49. F_i ($1 \leq i \leq n$) ler belli bir mavi tepeleri kök olarak seçilen 2-parçalanışlı grafların bir ailesi olmak üzere $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ olsun. G nin bir kırmızı-mavi renklendirmesindeki her mavi tepe tüm F_i ler için bir kök oluyorsa bu renklendirmeye G nin $\mathcal{F}$ -renklendirmesi denir. G nin bir $\mathcal{F}$ -renklendirmesindeki minimum sayıdaki kırmızı tepelerin sayısına G nin $\mathcal{F}$ -üstünlük sayısı denir ve $\gamma_{\mathcal{F}}(G)$ ile gösterilir (Chartrand ve ark. , 2003).

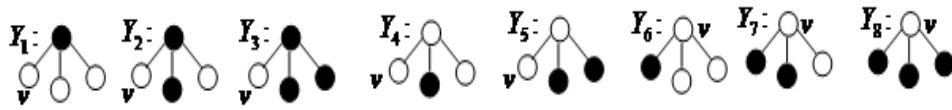
Tanım 1.50. F_i ($1 \leq i \leq n$) ler belli bir mavi tepeleri kök olarak seçilen 2-parçalanışlı grafların bir ailesi olmak üzere $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ olsun. G nin bir kırmızı-mavi renklendirmesindeki her mavi tepe en az bir F_i için bir kök oluyorsa bu renklendirmeye G nin $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesi denir. G nin bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesindeki minimum sayıdaki kırmızı tepelerin sayısına G nin $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayısı denir ve $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G)$ ile gösterilir (Haynes ve ark. , 2009).

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Berge (1958), graflarda üstünlük ile ilgili ilk bilgileri vermiştir. Haynes ve ark. (1998), konuyla ilgili ilk kitapları yayınladılar. Literatürde konuyla ilgili iki binden fazla orijinal makale yayınlandı.

Transistörlerin devre çiplerine montajında ortaya çıkan çok şeritli rota problemlerinin çözümü, ancak parçalanışlı graflar kullanılarak bulundu (Rashidi, 1994). Chartrand ve ark. (2003) te parçalanışlı graflar ve üstünlük kavramlarını bir araya getirerek literatüre parçalanışlı üstünlük sayılarını kazandırdılar. Bu çalışmalarında gerekli tanımlar verildikten sonra, parçalanışlı üstünlük parametresinin diğer üstünlük parametreleriyle olan ilişkilerini ortaya çıkardılar. Gera ve Zhang (2004) te parçalanışlı üstünlük sayılarının üst ve alt sınırları incelediler. Henning ve Maritz (2004) de yol graflarının parçalanışlı üstünlük sayılarını buldular. Gera ve Zhang (2005) te konu yönlendirilmiş graflarda çalışıldı. Henning ve Maritz (2005) te grafin tepelerinin derecelerinin en az iki olması koşuluna göre bu sayıları araştırdılar.

Bu çalışmanın ana konularından biri prizmalarda parçalanışlı üstünlük sayıları ile ilgili olduğundan literatür sonuçları ayrıntılı olarak verilecektir. Parçalanışlı üstünlük prizmalarda ilk kez Chartrand ve ark. (2000) da pençe grafları kullanılarak çalışıldı. Sekiz farklı 2-parçalanışlı pençe grafları Şekil 2.1. de gösterilmiştir.



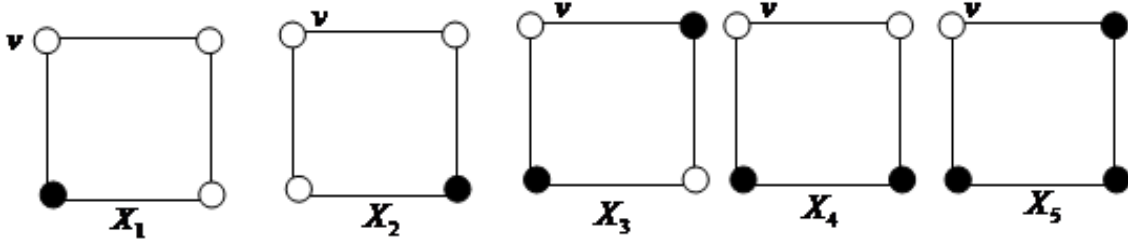
Şekil 2.1. Sekiz farklı 2-parçalanışlı pençe grafları

Teorem 2.1. (Chartrand ve ark. , 2000) $n \geq 3$ ve $G = C_n \times K_2$ bir prizma olmak üzere;

- (a) $\gamma_{Y_1}(G) = 2\lceil n/4 \rceil$.
- (b) $\gamma_{Y_2}(G) = 2\lceil n/3 \rceil$.
- (c) $\gamma_{Y_3}(G) = n$.
- (d) $\gamma_{Y_4}(G) = 2\lceil n/5 \rceil$ sayet $n \equiv 0, 3, 4 \pmod{5}$ veya $n \equiv 2, 6 \pmod{10}$,
 $\gamma_{Y_4}(G) = 2\lceil n/5 \rceil - 1$ $n \equiv 1, 7 \pmod{10}$.
- (e) $\gamma_{Y_5}(G) = 2\lceil n/2 \rceil$.

- (f) $\gamma_{Y_6} = 2$ şayet $n = 3$ veya $n \equiv 2, 6 \pmod{10}$,
 $\gamma_{Y_6} = 2 \lfloor n/4 \rfloor + i$ şayet $n \geq 4$ ve $n \equiv i \pmod{4}$.
 (g) $\gamma_{Y_7}(G) = 2 \lceil n/2 \rceil$.

X , 2-parçalanışlı C_4 çevre graflarını göstermek üzere, beş farklı 2-parçalanışlı C_4 çevre grafları Şekil .2.2. de gösterilmiştir.



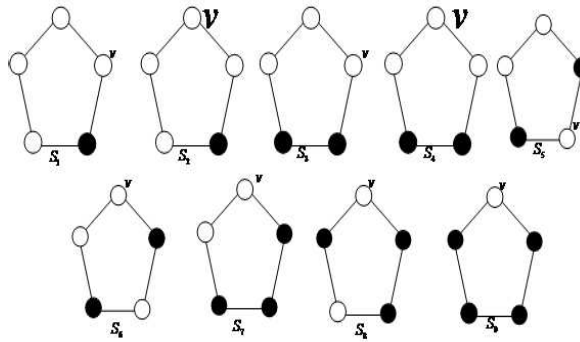
Şekil 2.2. Beş farklı 2-parçalanışlı C_4 çevre grafları

Henning ve Maritz (2006) da prizmalar için X -üstünlük sayılarını incelediler.

Teorem 2.2.(Henning ve Maritz, 2006) $n \geq 3$ ve $G = C_n \times K_2$ bir prizma olmak üzere;

- (a) $\gamma_{X_1}(G) = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/4 \rceil - \lfloor n/4 \rfloor$.
 (b) $\gamma_{X_2}(G) = 2n$, $n = 4$ hariç $n = 4$ ise $\gamma_{X_2}(G) = 2$.
 (c) $\gamma_{X_3}(G) = n$.
 (d) $\gamma_{X_4}(G) = 2 \lceil n/3 \rceil$.
 (e) $\gamma_{X_5}(G) = \lceil 4n/3 \rceil$.

S , 2-parçalanışlı C_5 çevre graflarını göstermek üzere, Şekil 2.3. te dokuz farklı 2-parçalanışlı C_5 çevre grafları gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Dokuz farklı 2-parçalanışlı C_5 çevre grafları

Prizmalarda S -üstünlük sayıları Ediz (2009) da çalışıldı.

Önerme 2.3. (Ediz, 2009) $n \geq 3$ ve $G = C_3 \times K_2$ prizması olmak üzere;

(a) $\gamma_{S_1}(G) = \gamma_{S_2}(G) = \gamma_{S_3}(G) = \gamma_{S_6}(G) = \gamma(G) = \gamma_t(G) = \gamma_{tr} = 2.$

(b) $\gamma_{S_4}(G) = \gamma_{S_5} = 6.$

(c) $\gamma_{S_7}(G) = \gamma_{S_8}(G) = \gamma_{S_9}(G) = \gamma_2(G) = \gamma_3(G) = 4.$

Önerme 2.4. (Ediz, 2009) $n \geq 3$ ve $G = C_n \times K_2$ prizması olmak üzere;

(a) $\gamma_{S_1}(G) = \gamma_{S_2}(G) = \gamma_{S_3}(G) = \gamma_{S_4}(G) = \gamma_{S_5}(G) = \gamma_{S_6}(G) = 10.$

(b) $\gamma_{S_7}(G) = \gamma_{S_8}(G) = \gamma_t(G) = \gamma_{tr}(G) = 6.$

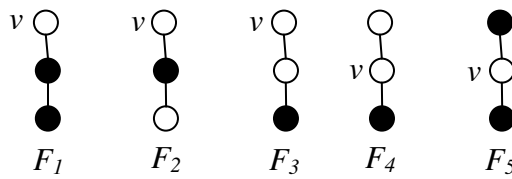
(c) $\gamma_{S_9}(G) = 8.$

Aynı zamanda Önerme 2.4 ışığında Ediz (2009) tarafından prizmalarda 2-parçalanışlı C_{2k+1} üstünlük sayılarının bulunmasıyla ilgili bir teorem ispatlanmıştır.

Teorem 2.5. (Ediz, 2009) $n \geq 3$, $G = C_n \times K_2$ ($n \neq 2k-1, n \neq 2k+1$) bir prizma ve S , herhangi bir 2-parçalanışlı C_{2k+1} çevre grafini göstermek üzere, $\gamma_S(G) = 2n$ olur.

Bu çalışmanın 3.bölümünde prizmalarda 2-parçalanışlı C_6 -üstünlük sayıları bulunmuştur.

2-parçalanışlı graflarda graf ailelerinin kullanılabileceği ile ilgili ilk tanımlar Chartrand ve ark., (2003) tarafından verildi. Haynes ve ark., (2009), konuya başka bir bakış açısı getirerek Chartrand ve ark., (2003) e göre daha esnek bir tanım getirdiler. Literatürde Haynes ve ark., (2009) da ortaya attıkları bu yeni bakış açısıyla ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanmadı. Bu çalışmanın 4. bölümünde bu ilişkiler incelendi. Şekil 2.4. de tüm 2-parçalı 3-yol grafları gösterilmiştir.



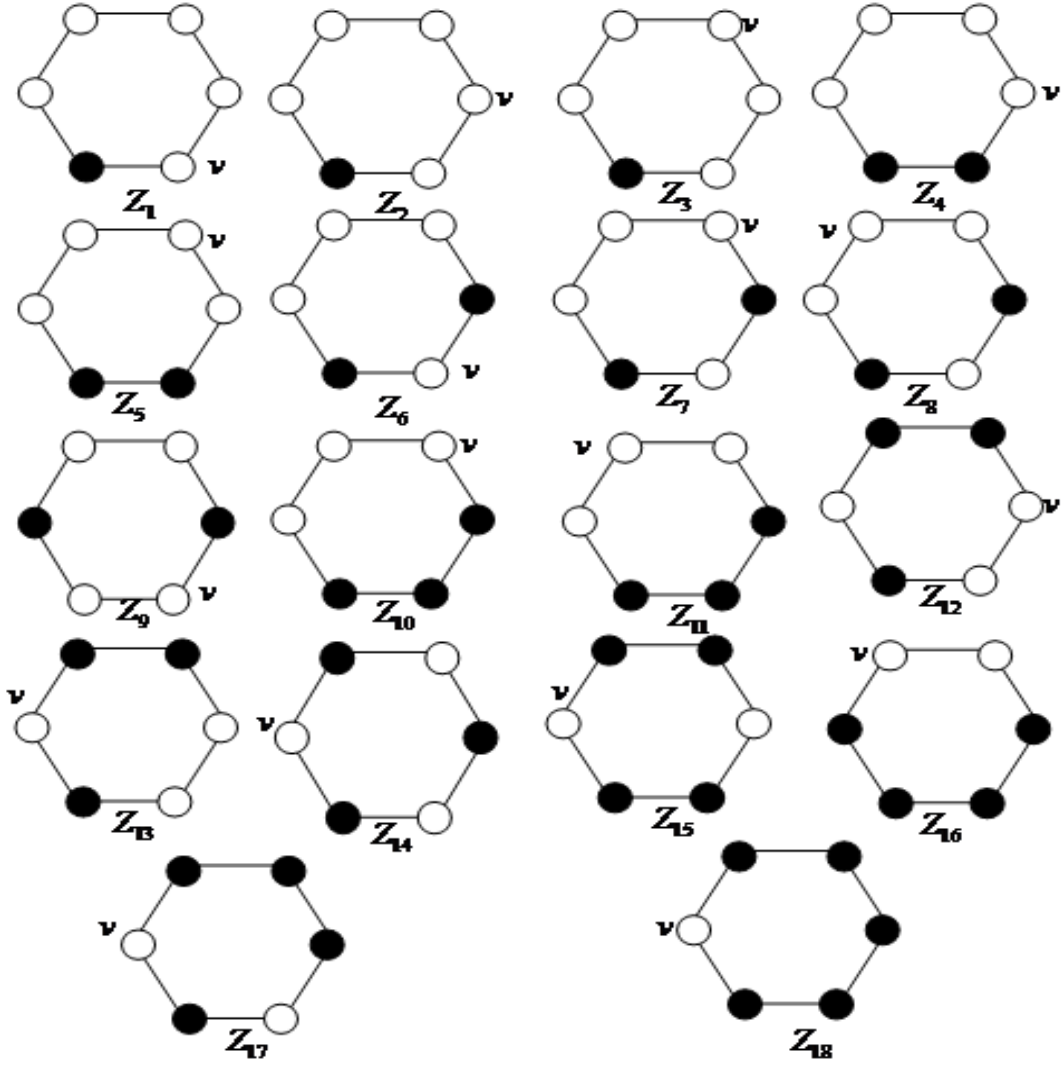
Şekil 2.4. 2-parçalanışlı 3-yol grafları

Graflarda 2-gökkuşağı üstünlük sayıları Bresar ve Sumenjak (2007) tarafından literatüre kazandırıldı. Chungling ve ark. (2009) ve Xu (2009) da bu sayıları genelleştirilmiş Petersen grafları için çalıştılar. Chang ve ark. (2010) da gökkuşağı üstünlük sayılarını ağaç grafları için incelediler. Yu ve Xing (2010) da 2-gökkuşağı üstünlük sayıları ile Roman üstünlük sayılarını karşılaştırdılar. Literatürde 2-gökkuşağı

üstünlük sayıları ile parçalanışlı üstünlük sayıları arasındaki ilişki henüz çalışılmamıştır. Bu çalışmanın 4. bölümünde bu iki kavram arasındaki ilişki incelenmiştir.

3. PRİZMALARDA PARÇALANIŞLI ÜSTÜNLÜK SAYILARI

Bu bölümde Z , 2-parçalanışlı C_6 çevre graflarını göstermek üzere prizmalarda Z -üstünlük sayıları incelendi. Toplam on sekiz adet 2-parçalanışlı C_6 çevre grafi vardır ve bunlar Şekil 3.1. de gösterilmiştir. Bu bölüm boyunca G , $G = C_n \times K_2$, ($n \geq 3$), prizması olarak düşünülecektir ve G prizmasının içerdiği iki n -çevre grafinin $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ ve $u_1, u_2, \dots, u_n, u_1$ ($i = 1, 2, \dots, n$ için $u_i v_i \in E(G)$) olduğu kabul edilmiştir.



Şekil 3.1. 2-parçalanışlı C_6 çevre grafları

Önerme 3.1. $i \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 17, 18\}$ olmak üzere , $\gamma_{Z_i}(G) = 2n$.

İspat. G nin herhangi bir tepesini mavi renkle renklendirecek herhangi bir Z_i – renklendirmesi yoktur. Bu nedenle $\gamma_{Z_i}(G) = 2n$ olur.

Teorem 3.2. (a) $\gamma_{Z_4}(G) = 2n/3 + 4$, $n \equiv 0 \pmod{3}$.

$$(b) \gamma_{Z_4}(G) = \lceil 2n/3 \rceil + 1, \quad n \equiv 1 \pmod{6}.$$

$$(c) \gamma_{Z_4}(G) = 2\lceil n/3 \rceil + 2, \quad n \equiv 2 \pmod{3}.$$

$$(d) \gamma_{Z_4}(G) = 2\lceil n/3 \rceil, \quad n \equiv 4 \pmod{6}.$$

İspat. (a) $n \equiv 0 \pmod{3}$ için, G , $n/3$ ayrık 6-çevre grafi içerdiğinden en az $2n/3$ tepe kırmızı renklidir. Böylece $\gamma_{Z_4}(G) \geq 2n/3$. Farz edelim ki tam $2n/3$ tepe kırmızı renkli olsun. O halde G deki her 6-çevre grafi tam olarak iki kırmızı renkli tepe içerir. Daha açık olarak, sadece v_1 ve u_1 , $u_1v_1v_2v_3u_2u_1$ çevresindeki kırmızı renkli tepelerdir. u_3 ve v_3 , Z_4 ün kökleri olduğundan dolayı, u_4 ve v_4 tepeleri kırmızı olur ve böylece sadece u_4 ve v_4 , $u_4v_4v_5v_6u_5u_4$ çevresindeki kırmızı tepeler olurlar. u_6 ve v_6 , Z_4 ün kökleri olduğundan dolayı, u_7 ve v_7 tepeleri kırmızı olur. Böylece sadece u_7 ve v_7 , $u_7v_7v_8v_9u_8u_7$ çevresindeki kırmızı tepeler olurlar. Bu şekilde devam edilirse, sadece u_{n-2} ve v_{n-2} , $u_{n-2}v_{n-2}v_{n-1}v_nu_nu_{n-1}u_{n-2}$ çevresindeki kırmızı tepeler olurlar. Fakat bu durumda u_n ve v_n , Z_4 ün kökleri olamazlar ve dolayısıyla kırmızı olurlar. Bu durumda u_{n-1} ve v_{n-1} tepeleri de Z_4 ün kökleri olamazlar ve dolayısıyla kırmızı olurlar. Bu bir çelişkidir. Buradan şayet $n \equiv 0 \pmod{3}$ ise, o halde en az $2n/3 + 4$ tepe kırmızı olur. Böylece $\gamma_{Z_4}(G) \geq 2n/3 + 4$ yazılır.

$$n \equiv 0 \pmod{3} \text{ için } , \quad S = \bigcup_{i=0}^{n/3-1} \{v_{3i+1}, u_{3i+1}\} \text{ ve } D = S \cup \{v_{n-1}, v_n, u_{n-1}, u_n\} \text{ olsun. } D$$

kümesindeki bütün tepelerin kırmızıya, geriye kalan G nin bütün tepelerinin maviye boyandığı tüm durumlar, G nin Z_4 -renklendirmesini verir. Buradan $\gamma_{Z_4}(G) \leq 2n/3 + 4$ olur.

(b) G nin verilen herhangi bir Z_4 -renklendirmesini düşünelim. Şayet G nin bütün tepeleri kırmızıya boyanırsa gerekli alt sınır sağlanır. $G - \{u_n, v_n\}$, en az iki kırmızı tepe içeren $(n-1)/3$ ayrık 6-çevre grafına parçalanabilir. Böylece G nin verilen bir

Z_4 -renklendirmesi en az $2 + 2(n-1)/3 = \lceil 2n/3 \rceil + 1$ tepeyi kırmızı yapar. Buradan, $\gamma_{Z_4}(G) \geq \lceil 2n/3 \rceil + 1$ yazılır.

Şimdi $\gamma_{Z_4}(G) \leq \lceil 2n/3 \rceil + 1$ olduğu gösterilecektir. $S = \bigcup_{i=0}^{(n-1)/3} \{v_{3i+1}, u_{3i+1}\}$ olmak üzere S nin bütün tepeleri kırmızıya ve G nin geriye kalan tepeleri maviye boyanırsa, bu renklendirme G nin bir Z_4 -renklendirmesini oluşturur. Buradan $\gamma_{Z_4}(G) \leq |S| = \lceil 2n/3 \rceil + 1$ yazılır.

(c) $G - \{v_{n-1}, v_n, u_{n-1}, u_n\}$, her biri en az iki kırmızı tepe içeren $(n-2)/3$ farklı 6-çevre grafına sahiptir. Bu G nin bir Z_4 -renklendirmesini verir ki bu renklendirme en az $4 + 2(n-2)/3 = 2\lceil n/3 \rceil + 2$ tepeyi kırmızıya boyar. Buradan $\gamma_{Z_4}(G) \geq 2\lceil n/3 \rceil + 2$ yazılır.

Şimdi, $\gamma_{Z_4}(G) \leq 2\lceil n/3 \rceil + 2$ olduğu gösterilecektir. $S = \bigcup_{i=0}^{(n-2)/3} \{v_{3i+1}, u_{3i+1}\}$ ve $D = \{u_n, v_n\}$ olmak üzere $S \cup D$ nin bütün tepeleri kırmızıya ve G nin geriye kalan tüm tepeleri maviye boyanırsa G nin bir Z_4 -renklendirmesini verir. Buradan $\gamma_{Z_4}(G) \leq |S \cup D| = 2\lceil n/3 \rceil + 2$ yazılır.

(d) $G - \{u_1, v_1\}$, her biri en az iki kırmızı tepe içeren $(n-1)/3$ ayrık 6-çevre grafına parçalanabilir ki G nin verilen Z_4 -renklendirmesi en az $2 + 2(n-1)/3 = 2\lceil n/3 \rceil$ tepeyi kırmızı yapar. Buradan $\gamma_{Z_4} \geq 2\lceil n/3 \rceil$ yazılır.

Şimdi de $\gamma_{Z_4} \leq 2\lceil n/3 \rceil$ olduğunu gösterelim. $S = \bigcup_{i=0}^{(n-1)/3} \{v_{3i+1}, u_{3i+1}\}$ olmak üzere S nin tüm tepeleri kırmızıya, G nin geriye kalan tepeleri de maviye boyanırsa G nin bir Z_4 -renklendirmesi elde edilir. Böylece $\gamma_{Z_4}(G) \leq |S| = 2\lceil n/3 \rceil$ olur.

Teorem 3.3. (a) $\gamma_{Z_5}(G) = 2n/3 + 4$, $n \equiv 0(\text{mod } 3)$.

(b) $\gamma_{Z_5}(G) = 2\lfloor n/3 \rfloor + 2$, $n \equiv 1(\text{mod } 6)$.

(c) $\gamma_{Z_5}(G) = 2\lceil n/3 \rceil + 2$, $n \equiv 2(\text{mod } 3)$.

(d) $\gamma_{Z_5}(G) = 2\lceil n/3 \rceil + 1$, $n \equiv 4(\text{mod } 6)$.

İspat. (b) $G - \{u_n, v_n\}$, her biri en az iki kırmızı tepe içeren $(n-1)/3$ ayrık 6-çevre grafına sahiptir. Ve böylece verilen G nin Z_5 -renklendirmesi en az $2 + 2(n-1)/3 = 2\lfloor n/3 \rfloor + 2$ tepelyi kırmızı yapar. Böylece; $\gamma_{Z_5}(G) \geq 2\lfloor n/3 \rfloor + 2$ olur.

$S = \bigcup_{i=0}^{(n-1)/3} \{u_{3i+1}, v_{3i+1}\}$ olmak üzere, S nin tüm tepeleri kırmızıya ve geriye kalan tüm tepeler maviye boyanırsa G nin bir Z_5 -renklendirmesi elde edilir. Böylece $\gamma_5(G) \leq 2\lfloor n/3 \rfloor + 2$ elde edilir. Diğer şıkların ispatı benzer yollarla yapılır.

Teorem 3.4. (a) $\gamma_{Z_9}(G) = 2n/3, n \equiv 0(\text{mod } 3)$.

$$(b) \gamma_{Z_9}(G) = 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, n \equiv 1(\text{mod } 3).$$

$$(c) \gamma_{Z_9}(G) = 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 4, n \equiv 2(\text{mod } 6).$$

$$(d) \gamma_{Z_9}(G) = 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2, n \equiv 5(\text{mod } 6)$$

İspat. $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ olsun. G , her biri en az iki kırmızı tepe içeren $n/3$ ayrık 6-çevre grafına sahiptir. Ve böylece verilen G nin bir Z_9 -renklendirmesi en az $\frac{2n}{3}$ tepelyi

kırmızı yapar. Böylece; $\gamma_{Z_9}(G) \geq \frac{2n}{3}$ olur. $S = \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{3}-1} \{u_{3i+2}, v_{3i+2}\}$ olmak üzere, S nin tüm

tepeleri kırmızıya ve geriye kalan tüm tepeler maviye boyanırsa G nin bir Z_9 -renklendirmesi elde edilir. Böylece $\gamma_{Z_9}(G) \leq \frac{2n}{3}$ elde edilir. Diğer şıkların ispatları

benzer yolla yapılır.

Teorem 3.5. $\gamma_{Z_{14}}(G) = n$.

İspat. G nin, en az 3 tepesi kırmızı olan $n/3$ ayrık 6-çevre grafına bir parçalanışı vardır ki G nin verilen Z_{14} -renklendirmesi en az $3 \times n/3 = n$ tepelyi kırmızı yapar.

Buradan $\gamma_{Z_{14}}(G) \geq n$ yazılır.

$D = \bigcup_{i=1}^{n/2} \{u_{2i-1}, v_{2i}\}$ olmak üzere, D nin tepelerinin kırmızıya ve G nin geriye kalan tüm tepelerinin maviye boyanması G nin bir Z_{14} -renklendirmesini verir ki buradan , $\gamma_{Z_{14}}(G) \leq n$ yazılır.

Teorem 3.6. (a) $\gamma_{Z_{15}}(G) = n + 1$, n tek ise.

(b) $\gamma_{Z_{15}}(G) = n + 2$, n çift ise.

İspat. n tek olsun. $S = \bigcup_{i=0}^{\frac{(n-1)}{2}} \{u_{2i+1}, v_{2i+1}\}$ olmak üzere, S nin tepelerinin kırmızıya ve G nin geriye kalan tüm tepelerinin maviye boyanması G nin bir Z_{15} -renklendirmesini verir ki buradan , $\gamma_{Z_{15}}(G) \leq n + 1$ yazılır. Diğer taraftan $\gamma_{Z_{15}}(G) = n$ olduğunu kabul edelim. Dikkat edilirse G nin herhangi bir Z_{15} -renklendirmesinde her mavi tepenin iki kırmızı tepenin arasında olması gerekir. Fakat bu durumda iki mavi tepe yan yana gelir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma_{Z_{15}}(G) \geq n + 1$ olmak zorundadır. Böylece ispat biter. (b) şıkkındaki ifade de aynı yolla ispatlanır.

Teorem 3.7. (a) $\gamma_{Z_{16}}(G) = n$ şayet $n \neq 6$ ve n çift ise .

(b) $\gamma_{Z_{16}}(G) = n + 1$ şayet n tek ise .

İspat. n çift olsun. $n = 6$ ise $\gamma_{Z_{16}}(G) = 8$ olduğu açıktır. $n \neq 6$ ise

$S = \bigcup_{i=0}^{\frac{(n-4)}{2}} \{u_{2i+2}, v_{2i+2}, u_{2i+3}, v_{2i+3}\}$ olmak üzere, S nin tepelerinin kırmızıya ve G nin geriye kalan tüm tepelerinin maviye boyanması G nin bir Z_{16} -renklendirmesini verir ki buradan , $\gamma_{Z_{16}}(G) \leq n$ yazılır. Diğer taraftan $\gamma_{Z_{16}}(G) = n - 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda G nin herhangi bir Z_{16} -renklendirmesinde üç mavi tepe yan yana gelir ki ortadaki tepeyi kök kabul eden bir çevre yoktur. Buradan $\gamma_{Z_{16}}(G) \geq n$ olmak zorundadır. Böylece ispat biter. (b) şıkkındaki ifade aynı yolla ispatlanır.

Bu bölümü ‘ Hangi prizmaların 2-parçalanışlı üstünlük sayıları n e eşittir? ‘ genelleştirmesini veren bir teoremle sonlandırıyoruz.

Teorem 3.8. $G = C_n \times K_2$ bir prizma ($n \geq 4$ ve n çift) ve Z , $A = \{u_1, u_3, \dots, u_{n-1}\}$ ve $B = \{v_2, v_4, \dots, v_n\}$ tepeleri kümeleri kırmızı olan 2-parçalanılışlı C_{2k} çevre graflarından biri olmak üzere, $\gamma_Z(G) = n$ olur.

İspat. G nin, en az k tepesi kırmızı olan n/k ayrık $2k$ çevre grafına bir parçalanışı vardır ki G nin verilen Z -renklendirmesi en az $k \times n/k = n$ tepeyi kırmızı yapar.

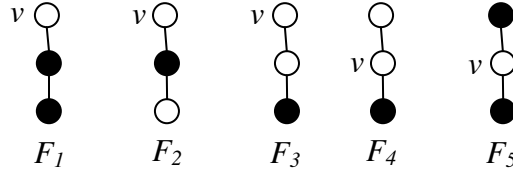
Buradan $\gamma_Z(G) \geq n$ yazılır.

$D = \bigcup_{i=1}^{n/2} \{u_{2i-1}, v_{2i}\}$ olmak üzere, D nin tepelerinin kırmızıya ve G nin geriye kalan tüm

tepelerinin maviye boyanması G nin bir Z -renklendirmesini verir ki buradan, $\gamma_Z(G) \leq n$ yazılır.

4. $\mathcal{F}$ -PARÇALANIŞLI ÜSTÜNLÜK VE 2-GÖKKUŞAĞI ÜSTÜNLÜK SAYILARI

Bu bölümde $\mathcal{F}$, 2-parçalı 3-yol graflarının bir ailesi olmak üzere bir grafin $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayıları bulunarak, bu sayılar ile 2-gökkuşağı üstünlük sayıları ve bazı graf parametreleriyle arasındaki ilişkiler incelendi. Şekil 4.1. de tüm 2-parçalı 3-yol grafları gösterilmiştir. 2-parçalı 3-yol graflarda graf ailelerinin kullanılabileceği ile ilgili ilk tanımlar Chartrand ve ark., (2003) tarafından verildi. Haynes ve ark., (2009), konuya başka bir bakış açısı getirerek Chartrand ve ark., (2003) e göre daha esnek bir tanım getirdiler. Literatürde bir grafin $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayıları ile 2-gökkuşağı üstünlük sayıları arasındaki ilişkiyle ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanmadı. Bu bölümde Haynes ve ark. ,(2009) da verilen tanım kullanılarak 2-parçalı 3-yol graflarının çeşitli kombinasyonları kullanılarak 2-parçalı 3-yol graflarının, 2-gökkuşağı üstünlük sayıları ve çeşitli graf parametreleriyle olan ilişkileri incelendi.



Şekil 4.1. 2-parçalı 3-yol grafları

Önerme 4.1. $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere

(a) $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1 (n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}),$

(b) $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor (n \equiv 0 \pmod{4}).$

İspat. (a) Tepeleri $v_1, v_2, \dots, v_n$ olan bir P_n yol grafini düşünelim. n tek ise $v_1, v_3, \dots, v_{n-2}, v_n$ tepelerinin kırmızıya boyanması P_n nin bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesini verir. $n \equiv 2 \pmod{4}$ olmak üzere $v_1, v_3, \dots, v_{n-1}$ ve v_n tepelerinin kırmızıya boyanması P_n nin bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesini verir. Dolayısıyla $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ olur. Şimdi

$\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ olsun. Bu durumda n tek ise mavi tepelerin sayısı kırmızı tepelerin sayısından 1 fazla olur ki bu bir çelişkidir. $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise eşit sayıda kırmızı ve mavi tepe olur. Bu durumda $k \geq 0$ ve tamsayı olmak üzere $n = 4k + 2$ olsun. Bu durumda $v_1, v_3, \dots, v_{4k+1}$ tepeleri kırmızı $v_2, v_4, \dots, v_{4k+2}$ tepeleri de mavi olur. Fakat v_{4k+2} tepesini kök kabul eden herhangi bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesi için v_{4k+1} ve v_{4k} tepelerinin de kırmızı olması gerekir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ olur.

(b) $n \equiv 0 \pmod{4}$ olsun. $v_2, v_3, v_6, v_7, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}$ tepelerinin kırmızıya boyanması P_n nin bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesini verir. Dolayısıyla $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) \leq \lfloor n/2 \rfloor$ olur. Kabul edelim ki $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ olsun. Bu durumda C_n nin herhangi bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesi, birbirine komşu iki mavi tepe içerir ki bu mavi tepeleri kök kabul eden bir F_1 ve F_5 grafi yoktur. Böylece ispat biter.

Sonuç 4.2. $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere,

- (a) $\gamma_{r_2}(P_n) = \gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n)$, $(n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4})$,
- (b) $\gamma_{r_2}(P_n) = \gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) + 1$, $(n \equiv 0 \pmod{4})$.

İspat. (Bresar ve Sumenjak, 2007) yol grafları için 2-gökkuşağı üstünlük sayılarının $\gamma_{r_2}(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ olduğunu ispatladılar. Önerme 4.1 e dikkat edilirse ifade doğrudan yazılabilir.

Önerme 4.3. $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere,

- (a) $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$, n tek ise,
- (b) $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$, n çift ise.

İspat. (a) n tek olmak üzere tepeleri $v_1, v_2, \dots, v_n$ olan bir C_n çevre grafini düşünelim. $v_1, v_3, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}$ tepelerinin kırmızıya boyanması C_n nin bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesini verir. Dolayısıyla $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ olur. Kabul edelim ki $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ olsun. Bu durumda mavi tepelerin sayısı kırmızı tepelerin sayısından fazla olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ olur.

(b) n çift olmak üzere tepeleri $v_1, v_2, \dots, v_n$ olan bir C_n çevre grafinin $v_1, v_3, \dots, v_{n-1}$ tepelerinin kırmızıya boyanması C_n nin bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesini verir. Dolayısıyla $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) \leq \lfloor n/2 \rfloor$ olur. Şimdi $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) \geq \lfloor n/2 \rfloor$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ olsun. Bu durumda C_n nin herhangi bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesi, birbirine komşu en az üç mavi tepe içerir ki bu mavi tepeleri kök kabul eden bir F_1 ve F_5 grafi yoktur. Dolayısıyla $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) \geq \lfloor n/2 \rfloor$ olur.

Sonuç 4.4. $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere,

(a) $\gamma_{r_2}(C_n) = \gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n)$, $n \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$,

(b) $\gamma_{r_2}(C_n) = \gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) + 1$, $n \equiv 2 \pmod{4}$.

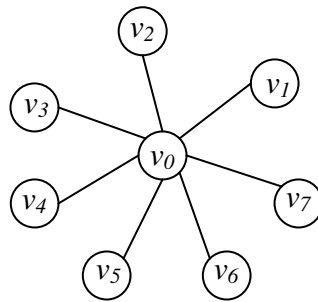
İspat. (Bresar ve Sumenjak, 2007) çevre grafları için 2-gökkuşağı üstünlük sayılarının $\gamma_{r_2}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/4 \rceil - \lfloor n/4 \rfloor$ sonucunu buldular. Bu ifadeyi farklı olarak;

(a) $\gamma_{r_2}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$, $(n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4})$,

(b) $\gamma_{r_2}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$, $(n \equiv 0 \pmod{4})$ yazılabilir. Önerme 4.3 e bakılırsa sonuç doğrudan yazılır.

Önerme 4.5. $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere, $S_{1,n-1}$ bir yıldız grafini göstermek üzere $\gamma_{\mathcal{F}^*}(S_{1,n-1}) = 2$.

İspat. $S_{1,n-1}$ nin merkez tepesi v_0 ve diğer tepeleri $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ olsun. Şekil 4.2 de $S_{1,7}$



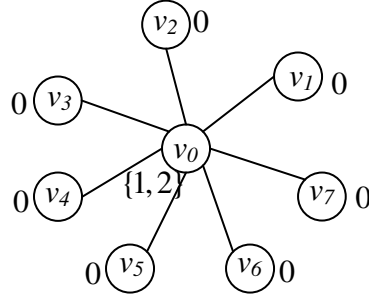
Şekil 4.2. $S_{1,7}$ yıldız grafi

gösterilmiştir.

$S_{1,n-1}$ yıldız grafinin v_0 merkez tepesinin ve diğer herhangi bir tepesinin kırmızıya boyanması $S_{1,n-1}$ in bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesini verir. Dolayısıyla $\gamma_{\mathcal{F}^*}(S_{1,n-1}) \leq 2$ olur.

Kabul edelim ki $\gamma_{\mathcal{F}^*}(S_{1,n-1})=1$ olsun. Herhangi bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesi en az iki tepenin kırmızı olmasını gerektirdiğinden bu bir çelişkidir. Buradan $\gamma_{\mathcal{F}^*}(S_{1,n-1}) \geq 2$ yazılır ve böylece ispat biter.

$S_{1,n-1}$ yıldız grafi için $\gamma_{r_2}(S_{1,n-1})=2$ olacağı aşikârdır. Bunun için Şekil 4.3 e bakılabilir.



Şekil 4.3. $S_{1,7}$ yıldız grafi içinde 2-gökkuşağı üstünlük

Sonuç 4.6. $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere, $\gamma_{r_2}(S_{1,n-1}) = \gamma_{\mathcal{F}^*}(S_{1,n-1})$.

İspat. Önerme 4.5 ten doğrudan yazılır.

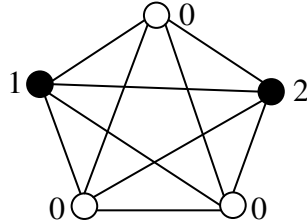
Benzer bir yaklaşım tam graflar için de verilebilir. Önerme 4.7 nin ispatı Önerme 4.5 in kine benzer olduğundan ispatı yapılmayacaktır.

Önerme 4.7. $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere, $\gamma_{\mathcal{F}^*}(K_n) = 2$.

Yine $\gamma_{r_2}(K_n) = 2$ olduğunu biliyoruz. Bunu Şekil 4.4 de açıkça görebiliriz. Dolayısıyla Sonuç 4.8'i ifade edebiliriz.

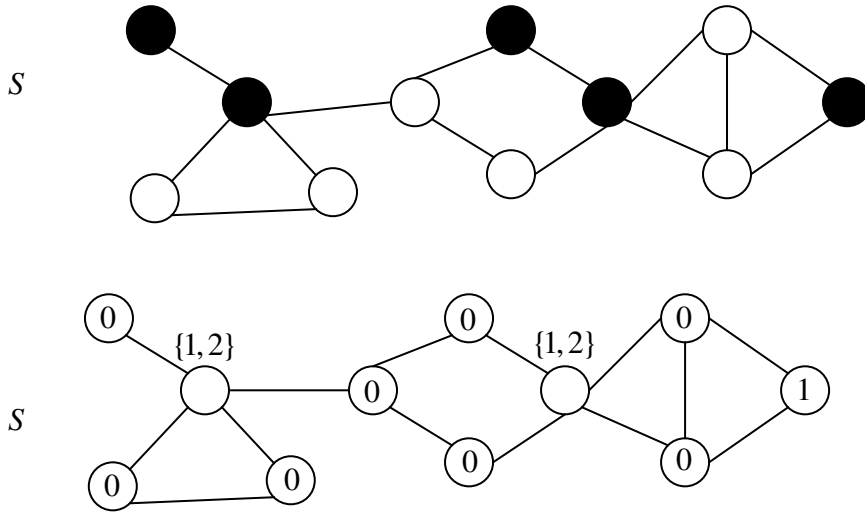
Sonuç 4.8. $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere, $\gamma_{r_2}(K_n) = \gamma_{\mathcal{F}^*}(K_n)$.

İspat. Önerme 4.7 den doğrudan yazılır.



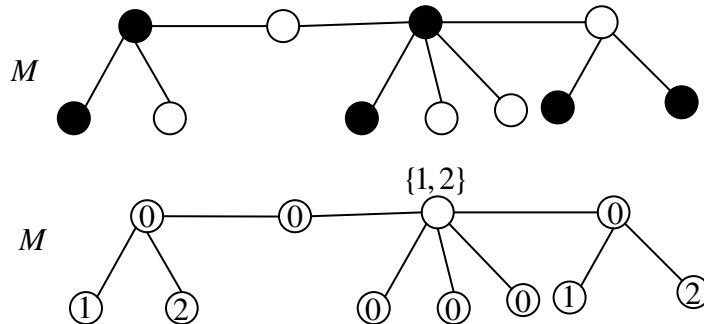
Şekil 4.4 K_5 tam grafi içinde 2-gökkuşağı ve $\mathcal{F}^*$ - parçalanışlı üstünlük sayıları

Yine Şekil 4.5, 4.6 ve 4.7 de rastgele alınmış üç farklı graf için $\mathcal{F}^*$ - parçalanışlı üstünlük sayıları ve 2-gökkuşağı üstünlük sayıları gösterilmiştir. Dikkat edilirse bu şekiller için bu iki karamın değeri ya eşit ya da 2-gökkuşağı üstünlük sayıları, $\mathcal{F}^*$ - parçalanışlı üstünlük sayılarından bir fazladır.

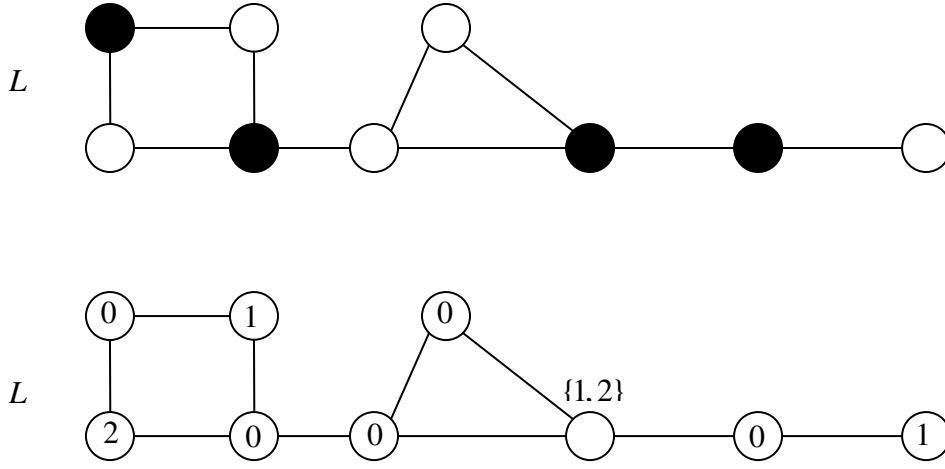


Şekil 4.5. S grafında $\mathcal{F}^*$ - parçalanışlı üstünlük sayıları ve 2-gökkuşağı üstünlük sayıları

Şekil 4.5'e bakılırsa S grafı için $\gamma_{r_2}(S) = \gamma_{\mathcal{F}^*}(S) = 5$ olduğu görülmektedir. Buraya kadar bulduğumuz sonuçlar 2-gökkuşağı üstünlük sayıları ile, $\mathcal{F}^*$ - parçalanışlı üstünlük sayılarının ya eşit ya da 2-gökkuşağı üstünlük sayılarının, $\mathcal{F}^*$ - parçalanışlı üstünlük sayılarından bir fazla olduğu görülmektedir. Bu varsayımımızın doğruluğunu rastgele alınmış graflardan oluşan Şekil 4.6. ve Şekil 4.7. de görebiliriz.



Şekil 4.6. M grafında $\mathcal{F}^*$ - parçalanışlı üstünlük sayıları ve 2-gökkuşağı üstünlük sayıları



Şekil 4.7. L grafında $\mathcal{F}^*$ - parçalanışlı üstünlük sayıları ve 2-gökkuşağı üstünlük sayıları

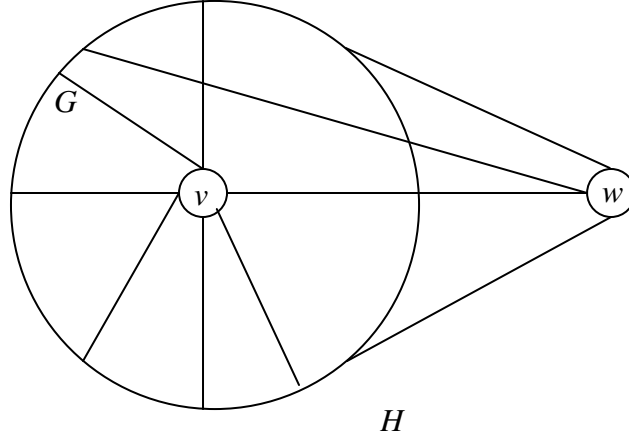
Yukarıdaki gözlemler ışığında aşağıdaki tahmini ileriki çalışmalar için ifade ediyoruz.

Tahmin 4.9. $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere, herhangi bir G grafı için, $\gamma_{r_2}(G) = \gamma_{\mathcal{F}^*}(G)$ veya $\gamma_{r_2}(G) = \gamma_{\mathcal{F}^*}(G) + 1$ eşitlikleri geçerlidir.

Şimdi $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere, herhangi bir G grafı için, $\mathcal{F}^*$ - parçalanışlı üstünlük sayıları ile grafın mertebesi ve maksimum derecesi arasındaki ilişkileri ifade eden iki teorem ifade ve ispat edilecek.

Teorem 4.10. G , mertebesi $n \geq 3$ olan herhangi bir birleştirilmiş graf ve $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere, $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G) \leq n - \Delta + 1$.

İspat. İspatı Δ üzerinden tümevarımla yapacağız. $\Delta = 2$ ise G , sadece bir yol grafı veya bir çevre grafı olur ki eşitsizlik sağlanır. $\Delta = k \leq n - 2$ için eşitsizliğin sağlandığını kabul ederek $\Delta = k + 1$ için doğru olacağını gösterelim. G , $\Delta = k$ olan bir graf olmak üzere H , $\Delta = k + 1$ olan grafı G den elde edelim. Bunun için G grafına yeni bir w tepesi ekleyelim. Bu w tepesini G nin maksimum derecesini oluşturan v tepesiyle ve bundan sonra en fazla $\Delta - 1$ kadar tepeyle birleştirerek $\Delta = k + 1$ olan H grafını elde edelim. Şekil 4.9. bunu göstermektedir.



Şekil 4.8. H grafının G grafından elde edilişi

$\mathcal{F}^*$ -renklendirmesindeki amaç en az sayıda kırmızı tepe kullanmak olduğundan yukarıdaki örneklerde de dikkat edileceği gibi maksimum derecenin elde edildiği tepenin kırmızıya boyanması gerekir. Dolayısıyla v tepesinin rengi kırmızı olmak zorundadır. Yine v nin komşularının içinde yine kırmızı tepelerin var olacağı da aşikârdır. Bu yüzden H grafındaki w tepesinin renginin de mavi olacağı aşikârdır. Böylece H ve G graflarındaki kırmızı tepelerin sayısı eşit olur. Buradan G grafi için yazdığımız $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G) \leq n - k + 1$ eşitsizliği yerine $\gamma_{\mathcal{F}^*}(H) \leq n - k + 1$ eşitsizliği yazılabilir. Burada H için $\Delta = k + 1$ olduğu göz önüne alınırsa $\gamma_{\mathcal{F}^*}(H) \leq n - k + 1 = (n + 1) - (k + 1) + 1 = (n + 1) - \Delta + 1$ yazılır. Böylece ispat biter.

Teorem 4.11. G , mertebesi $n \geq 3$ olan herhangi bir bağlantılı graf ve $\mathcal{F} = \{F_1, F_5\}$ olmak üzere, $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G) \leq 2n/3$.

İspat. G herhangi bir tam graf, tam iki parçalı graf, yol grafi veya çevre grafi ise Önerme 4.1. ve Önerme 4.3. ışığında eşitsizliğin sağlandığı kolayca görülür. Teorem 4.10 da ispatlanan $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G) \leq n - \Delta + 1$ ifadesi de birlikte düşünülerek $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G) > 2n/3$ olduğunu kabul edelim. Buradan $2n/3 < \gamma_{\mathcal{F}^*}(G) \leq n - \Delta + 1$ yazılabilir. Ve yine bu eşitsizliklerden $2n/3 < n - \Delta + 1$ yazılır. Böylece $\Delta < n/3 + 1$ eşitsizliği elde edilir. $n = 3$ için $\Delta = 1$ olur ki bu şartı sağlayan tek graf $n = 2$ mertebeli K_2 grafıdır ki bu bir

çelişkidir. $n=6$ için $\Delta=2$ olur ki bu durumda G ya bir yol grafi yada bir çevre grafidir. G bir yol grafi ise Önerme 4.1 ışığında $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G)=4 > 2n/3 = 2.6/3 = 4$ elde edilir ki buda bir çelişkidir. G bir çevre grafi ise Önerme 4.3 ışığında $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G)=3 > 2.6/3 = 4$ eşitsizliği elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. Buradan $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G) \leq 2n/3$ elde edilir. Böylece ispat biter.

Şimdi Tanım 1.47 de verilen bir grafin paket sayısıyla, $\mathcal{F} = \{F_2, F_3\}$ olmak şartıyla $\mathcal{F}^*$ -parçalanışlı üstünlük sayıları arasındaki ilişki incelenecektir.

Önerme 4.12. $\mathcal{F} = \{F_2, F_3\}$ olmak üzere $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) = g(P_n) = \lceil n/3 \rceil$.

İspat. P_n nin tepeleri $v_1, v_2, \dots, v_n$ olsun. Bu tepeler için $v_1, v_4, v_7, \dots, v_k$ ($k \leq n$) tepelerinin kırmızıya boyanmasının P_n nin bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesini vereceği açıktır. Her farklı üç tepenin bir grup olduğu düşünülürse istenilen elde edilir. $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) \leq \lceil n/3 \rceil$. Şimdi $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) \geq \lceil n/3 \rceil$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) = \lceil n/3 \rceil - 1$ olsun. Bu durumda herhangi bir üçlü parçalanıştan birinde hiçbir kırmızı tepe olmaz. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma_{\mathcal{F}^*}(P_n) \geq \lceil n/3 \rceil$ olur.

Önerme 4.13. $\mathcal{F} = \{F_2, F_3\}$ olmak üzere $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) = \lceil n/5 \rceil$.

İspat. C_n nin tepeleri $v_1, v_2, \dots, v_n$ olsun. Bu tepeler için $v_1, v_6, v_{11}, \dots, v_k$ ($k \leq n$) tepelerinin boyanmasının C_n nin bir $\mathcal{F}^*$ -renklendirmesini vereceği açıktır. Her farklı birbiri ardına gelen beş tepenin bir grup olduğu düşünülürse istenilen elde edilir. $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) \leq \lceil n/5 \rceil$. Şimdi $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) \geq \lceil n/5 \rceil$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) = \lceil n/5 \rceil - 1$ olsun. Bu durumda herhangi bir sıralı beşli parçalanıştan birinde hiçbir kırmızı tepe olamaz bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma_{\mathcal{F}^*}(C_n) \geq \lceil n/5 \rceil$ olur. Böylece ispat eder.

$g(C_n) = \lfloor n-1/3 \rfloor$ olduğu göz önüne alınırsa G , P_n veya C_n den biri olmak üzere $\gamma_{\mathcal{F}^*}(G) \leq g(G)$ yazılır.

5. SONUÇ

Bu çalışma iki ana kısımdan oluşmaktadır. Bu kısımlardan ilki olan üçüncü bölümde F , 2-parçalı 6-çevre grafi olmak üzere prizmaların F -üstünlük sayısı incelenerek konuyla ilgili bir genelleştirme teoremi ispat edilmiştir. İkinci kısım olan dördüncü bölümde ise $\mathcal{F}$, 2-parçalı 3-yol graflarının iki tepesi kırmızı olan bir ailesi olmak üzere bir grafin $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayısı ile 2-gökkuşağı üstünlük sayısı arasındaki ilişki belli graf sınıfları ve rastgele seçilmiş bazı graf sınıfları için incelenerek, herhangi bir birleştirilmiş G grafi için 2-gökkuşağı üstünlük sayısının, $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayısına eşit yada $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayısından bir fazla olduğu tahmininde bulunulmuştur. Bunlara ilaveten bir grafin $\mathcal{F}^*$ -üstünlük sayısı ile bu grafin maksimum derecesi ve mertebesi arasındaki ilişki incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Berge, C. , 1962. *Theory of Graphs and its applications*. Methuen, London.234.
- Bresar, B. , Sumenjak, T.K. , 2007. Note On the 2-rainbow domination in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 155: 2394-2400.
- Chang, G.J. , Wu, J. , Zhu, X. , 2010. Rainbow domination on trees. *Discrete Applied Mathematics*, 158: 8-12.
- Chartrand, G. , Haynes, T.W. , Henning, M.A. , Zhang, P. , 2000. Stratified claw domination in prisms. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 33: 81-96.
- Chartrand, G. , Haynes, T.W. , Henning, M.A. , Zhang, P. , 2003. Stratification and domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 272: 171-185.
- Chartrand, G., Zhang, P., 2005. *Introduction to Graph Theory*. McGraw-Hill, USA. 386.
- Chungling, T. , Xiaohui, L. , Yuansheng, Y. , Meiqin, L. , 2009. 2-rainbow domination of generalized Petersen graphs $P(n,2)$. *Discrete Applied Mathematics*, 152: 1932-1937.
- Cockayne, E.J. , Dreyer, P.A. , Hedetniemi, S.M. , Hedetniemi, S.T., 2004. Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 278: 11-22.
- Diestel, R. , 2000. *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York. 313.
- Ediz, S. , 2009. On stratified domination in prisms. *Int. Math. Forum*, 48: 2355-2362.
- Gera, R. , Zhang, P. , 2004. Bounds for the F-domination number of a graph. *Congr. Numer.* 166 : 131-144.
- Gera, R. , Zhang, P. , 2005. On stratified domination in oriented graphs. *Congr. Numer.* 173: 175-192
- Harju, T. , 2007. *Lectures Notes On Graph Theory*. University of Turku , Finland. 99.
- Haynes, T.W. , Hedetniemi, S.T. , Slater P.J. , 1998. *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, New York.
- Haynes, T.W. , Hedetniemi, S.T. , Slater P.J. , 1998. *Domination in Graphs:Advanced Topics*. Marcel Dekker, New York.
- Haynes, T.W. , Henning M.A. , Zhang, P., 2009. A survey of stratified domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 309: 5806-5819.
- Henning, M.A. , Maritz, J.E. , 2004. Stratification and domination in graphs II. *Discrete*

Mathematics, 286: 203-211.

Henning, M.A. , Maritz, J.E. , 2005. Stratification and domination in graphs with minimum degree two. *Discrete Mathematics*, 301: 175-194.

Henning, M.A. , Maritz, J.E. , 2006. Stratification and domination in prisms. *Ars Combin.*, 81: 343-358.

Meng, K.H. , Fengming, D. , Guan, T.E. , 2007. *Introduction to Graph Theory*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. , Singapore. 228.

Rashidi, R. , 1994. *The Theory and Applications of Stratified Graphs* (Ph.D. Dissertation, Unpublished). Western Michigan University, Michigian.

Xu, G. , 2009. 2-rainbow domination in generalized Petersen graphs $P(n,3)$. *Discrete Applied Mathematics*, 157: 2570-2573.

ÖZ GEÇMİŞ

Süleyman EDİZ, 1980 yılında Van'da dünyaya geldi. Lise öğrenimini 1997 yılında tamamlayarak YYÜ Matematik Öğretmenliği Bölümünde lisans öğrenimine başladı. 2001 yılında mezun olarak Milli Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2002-2005 yılları arasında YYÜ Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2007 yılında aynı bölümde doktora eğitimine başladı. Mayıs 2009 da YYÜ İİBF İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler Anabilim Dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen aynı görevi sürdürmekte olan yazar evli ve bir çocuk babasıdır.