

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**$\mathbb{R}^2$ VE $\mathbb{R}^3$ 'DE ÇEMBER VE KÜRE TABANLI DİZİSEL FRAKTALLARIN
ALAN VE HACİM HESAPLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Elif Nevra ŞAHİN
DANIŞMAN : Prof.Dr.Bülent KARAKAŞ

VAN-2016

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**$\mathbb{R}^2$ VE $\mathbb{R}^3$ 'DE ÇEMBER VE KÜRE TABANLI DİZİSEL FRAKTALLARIN
ALAN VE HACİM HESAPLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Elif Nevra ŞAHİN

VAN-2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof.Dr.Bülent KARAKAŞ danışmanlığında, Elif Nevra ŞAHİN tarafından sunulan “ $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ de Çember ve Küre Tabanlı Dizisel Fraktalların Alan ve Hacim Hesapları” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 09/02/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr.Bülent
KARAKAŞ

İmza:

Üye: Doç.Dr.Şenay BAYDAŞ

İmza:

Üye: Yrd.Doç.Dr.Erdal
KORKMAZ

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Elif Nevra ŞAHİN

ÖZET

$\mathbb{R}^2$ VE $\mathbb{R}^3$ 'DE ÇEMBER VE KÜRE TABANLI DİZİSEL FRAKTALLARIN ALAN VE HACİM HESAPLARI

ŞAHİN, Elif Nevra
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ
Şubat 2016, 78 sayfa

Fraktal; çoğunlukla kendine benzeme özelliğine sahip geometrik yapıların ortak adıdır. Fraktallar düzensiz gibi görünen şekillerin içindeki gizli düzeni kapsar. Düzensiz ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen örneklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelerde sonsuza kadar sürebilir.

Terim olarak fraktal, bir şeklin ölçekle ne kadar küçültülürse küçültülsün temel yapısının bozulmadan gözlemlenebilmesi ve incelenebilmesi anlamına gelir. Multidisipliner bir çalışma alanı olan fraktal, boyutsal incelemelerde yardımcı olmaktadır. Fraktal şekillerde boyut hesabı, bilinen Öklid boyut kavramından farklılık gösterir.

Tezin birinci bölümünde, tezin amacı ve önemi açıklanmış ve çalışmada izlenen yöntemden bahsedilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde, literatür bildirişlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, fraktal geometrinin temel yapıtaşlarından biri olan dinamik sistemlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, yörüngeler kavramı ele alınmış, Julia ve Mandelbrot cümlesindeki yörüngeler incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde fraktal boyut ele alınarak, bazı fraktal şekillerin boyutu hesaplanmıştır. Beşinci bölümde, bazı fraktal şekillerin Matlab kodlarına yer verilmiştir. Altıncı bölümde ise, yeni bir fraktal takdimi yapılmıştır. Bu bölümde, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ de özel bir fraktal olarak çember ve küre tabanlı dizisel fraktallar tanımlanmıştır. Bu fraktalların alan, hacim, çevre ve yarıçap dizileri hesaplanmıştır. Tanımlanan bu fraktallara ait Matlab uygulamaları yapılmıştır. Program m-file dosyaları tez içerisinde verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Dinamik sistemler, Fraktal, Fraktal boyut, Julia cümlesi, Mandelbrot cümlesi, Matlab.



ABSTRACT

ABSTRACT CALCULATION OF AREA AND VOLUME OF CIRCLE AND SPHERE BASED FRACTALS ON $\mathbb{R}^2$ AND $\mathbb{R}^3$

ŞAHİN, Elif Nevra
M. Sc.Thesis, Mathematic Science
Supervisor: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ
February 2016, 78 pages

Fractals are mostly the common name of self-similar geometric shapes. Fractals involve hidden regularity in shapes appearing irregular. Irregular details or pattern are repeated by degrees on decreasing samples and also may proceed forever on completely abstract objects.

As a mathematical term, in brief fractals mean that a figure can be examined and observed with scale without deformation of its base structure, how so ever it is minimized. Fractals, multidisciplinary field of study, enable us on dimensional reviews of figures. Computing dimension on fractal figures is different from Euclid's dimension.

In the first section of the thesis, the purpose and significance of the thesis is mentioned and explained the method used in the study. In the second section of the study it is given to literature communicative. The third section is devoted to dynamic systems is one of the basic building blocks of fractal geometry. In the fourth section, discussed the concept of orbits, orbits are studied in the Julia and Mandelbrot sets. Also in this section fractal dimension by taking some calculated the size of the fractal shapes. In the fifth chapter is devoted to the matlab code of some fractal shapes. In section six, a particular circle and sequential fractals based on sphere are defined on $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. Then areas, volumes, circle and radius sequences are computed. Matlab is applied on these fractals described and m-files also included in thesis.

Keywords: Dynamical systems, Fractal, Fractal shape, Julia set, Mandelbrot set, Matlab.



ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ'a teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmamda yardımlarını hiç esirgemeyen Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ'a ve sürekli yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

2016

Elif Nevra ŞAHİN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	xii
SİMGELER	xiv
1. TEZİN AMACI VE ÖNEMİ	1
2. LİTERATÜR BİLDİRİŞİ	4
3. TEMEL KAVRAMLAR	6
3.1. Dinamik Sistemler	6
3.2. Sabit ve Periyodik Noktalar	8
3.3. Grafik Analiz	9
3.4. Attracting-Repelling Sabit Noktalar	11
3.5. Attraction Basin (cazibe havzası)	13
3.6. Stable (durağanlık) özelliği	14
4. YÖRÜNGELER	17
4.1. Julia Cümlesi	17
4.2. Mandelbrot Cümlesi	22
4.2.1. Misiurewicz noktası	26
4.2.2. Mandelbrot cümlesinin derinlikleri	29
4.3. Mandelbrot – Julia Cümlesi Arasındaki ilişki	30
4.4. Fraktal Boyut	32
4.4.1. Dolambaçlılığın derecesi	32
4.4.2. Kesirsel boyut	33
4.5. Koch Eğrisi ve Boyutunun Hesaplanması	36

4.6. Hausdorff Boyutu	39
4.7. Kutu Sayma Metodu	39
4.8. Moran Denklemi	45
5. BAZI FRAKTAL ŞEKİLLERİN MATLAB KODLARI	47
5.1. Hilbert Uzay Dolduran Eğri	47
5.2. Pisagor Ağacı	48
6. YENİ BİR FRAKTAL TAKDİMİ	55
6.1. $S^{1/4}$ Çembersel Fraktal	55
6.1.1. $S^{1/4}$ ün fraktal boyutu	63
6.1.2. Yarıçaplar dizisi	64
6.1.3. Çevre dizisi	65
6.1.4. Alan dizisi	65
6.1.5. Çember formunun yarıçaplarının toplamı	66
6.1.6. Çember formunun çevrelerinin toplamı	66
6.1.7. Daire formunun alanlarının toplamı	67
6.1.8. $S^{1/4}$ çembersel fraktalın Matlab programı	68
6.2. $S^{2/4}$ Küresel Fraktal	69
6.2.1. $S^{2/4}$ ün fraktal boyutu	70
6.2.2. Yarıçap hesabı	71
6.2.3. Hacim hesabı	72
6.2.4. Yüzey alanı hesabı	73
6.2.5. $S^{2/4}$ küresel fraktalın Matlab programı	73
KAYNAKLAR	75
ARAŞTIRMA OLANAKLARI	78
ÖZGEÇMİŞ	79

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. $S^1/4$ Çembersel Fraktal.	2
Şekil 1.2. $S^2/4$ Küresel Fraktal.....	2
Şekil 3.1. Sıfır noktası etrafında, 45^0 lik dönme.....	9
Şekil 3.2. $f(x) = \sqrt{x}$ grafiği	10
Şekil 3.3. $f(x) = x^2$ grafiği	10
Şekil 3.4. $f(x) = 4x(1 - x)$ grafiği	10
Şekil 3.5. $y = 4x(1 - x)$	11
Şekil 3.6. Periyodik Noktalar	11
Şekil 3.7. $F(x) = \frac{1}{2}x$ grafiği	12
Şekil 3.8. $G(x) = 2x$ grafiği	12
Şekil 3.9. $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ grafiği	13
Şekil 3.10. $ z + w \geq z + w $ grafiği	14
Şekil 4.1. Farklı c sayıları için oluşan Julia cümleleri	18
Şekil 4.2. İrtibatsız Julia cümlesi (Cantor cümlesi).....	19
Şekil 4.3. $ z < 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için $f^{(n)}(z) \rightarrow 0$	20
Şekil 4.4. $ z > 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için $f^{(n)}(z) \rightarrow \infty$	20
Şekil 4.5. $ z = 1$ ise $f^{(n)}(z) = 1$	21
Şekil 4.6. $f(z) = z^2$ için Julia cümlesi yeşil bölge ile mor renkli bölge arasındaki sınır....	21
Şekil 4.7. $c = i$ için Julia Cümlesi	22
Şekil 4.8. $c = -1$ için Julia cümlesi	22
Şekil 4.9. Mandelbrot Cümlesi	23
Şekil 4.10. Reel eksene göre simetrik Mandelbrot cümlesi	26
Şekil 4.11. Mandelbrot cümlesinin sınırındaki Misiurewicz noktaları	27
Şekil 4.12. $c \approx -0,1011 + 0,9563i$ Misiurewicz noktası etrafında kendine benzerlik	27
Şekil 4.13. Mandelbrot cümlesinin küçük kopyaları.....	28
Şekil 4.14. Mandelbrot Cümlesi 4	28

Şekil 4.15. Fil vadisi ve denizati vadisi	29
Şekil 4.16. Denizati vadisi	29
Şekil 4.17. Fil vadisi	30
Şekil 4.18. Mandelbrot cümlesindeki Julia cümleleri	30
Şekil 4.19. Julia cümleleri	31
Şekil 4.20. Sierpinski üçgeni	33
Şekil 4.21. Doğru parçası	34
Şekil 4.22. Kare	34
Şekil 4.23. Küp	34
Şekil 4.24. Koch eğrisi	37
Şekil 4.25 Minkowski fraktalı	38
Şekil 4.26 Minkowski fraktalı	38
Şekil 4.27 Doğrunun karelerle örtülmesi	40
Şekil 4.28. Julia Cümlesi'nin karelerle örtülmesi	40
Şekil 4.29 Eğriyi gittikçe küçülen doğru parçaları yardımıyla yaklaşık uzunluğunu hesapla ..	41
Şekil 4.30 Koch Eğrisi 1. Adım	41
Şekil 4.31 Koch Eğrisi 2. Adım	42
Şekil 4.32 Koch Eğrisi 3. Adım	42
Şekil 4.33. Koch Eğrisi'nin üçgen ile örtülmesi	43
Şekil 4.34. Koch Eğrisi	43
Şekil 4.35. Koch Eğrisi'nin kutu sayma boyutu	44
Şekil 5.1. Hilbert Uzay Dolduran Eğri	47
Şekil 5.2. Pisagor ağacı	48
Şekil 6.1 Çember formu	55
Şekil 6.2. Çember formun ilk beş adımına ve birinci bölgelere ait Matlab çizimi	69
Şekil 6.3. $S^2/4$ Küresel Fraktal	69



ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. Geometrik şekillerin boyut-kopya sayısı hesabı 1	35
Çizelge 4.2. Geometrik şekillerin boyut-kopya sayısı hesabı 2	35
Çizelge 4.3. Fraktal ve geometrik şekillerin boyut-kopya sayısı hesabı	36
Çizelge 4.4. Fraktal şekillerin boyut-kopya sayısı hesabı	39
Çizelge 6.1. Çember sayısı	63
Çizelge 6.2. Küre sayısı	70



SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$A_f(\infty)$	∞ çekim havzası (basin of attractive)
K_f	Doldurulmuş Julia cümlesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
g	Yerçekim kuvveti
p	Yıllık faiz
h	Yükseklik
V	Hız
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
N	Tekrar sayısı
Ω_f	Polinomunun kritik noktalarının cümlesi
D	Fraktal boyut
r	Küçültme çarpanı
M	Kütle
k	Yoğunluk
L	Uzunluk
r	Yarıçap

1. TEZİN AMACI VE ÖNEMİ

Fraktal kelimesi Latince “kırıklı” anlamına gelen fractus kelimesinden türetilmiştir. İlk matematiksel fraktal 1861’de Karl Weierstrass tarafından keşfedilmiştir.

Fraktallar çoğunlukla kendine benzeme özelliği gösteren karmaşık, geometrik şekillerin ortak adıdır. Fraktallar düzensiz gibi görünen yapıların içindeki gizli düzeni kapsarlar. Düzensiz ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen örneklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelerde sonsuza kadar sürebilir. Her bir parça büyütüldüğünde, yine cismin bütününe benzerlik gösterir.

Fraktal teorisinin gelişmesiyle birlikte tartışılan boyut kavramı yeni bir yön kazanmıştır: Bu fraktal boyuttur ve Öklid boyuttan farklıdır.

Öklid boyutun tersine fraktal boyut, genellikle bir tam sayı değildir. Kabul edelim ki a ölçütü N defa kullanılmış olsun, yani total ölçü $N.a$ olsun. O zaman Mandelbrot’un tanımına göre fraktal boyut:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{r^D} \\
 Nr^D &= 1 \\
 \log r^D &= \log \frac{1}{N} \\
 D &= \frac{\log(\frac{1}{N})}{\log r} \\
 D &= \frac{\log N^{-1}}{\log r} \\
 D &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(\frac{1}{r})}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

ile verilir. Burada D ye a ölçütünün fraktal boyutu denir. Bu uygulamada $\frac{\log N}{\log(\frac{1}{r})}$ kesri sabit bir değer alan D limitine yaklaşır. Bazı hallerde kesrin değeri her adımda aynı olur. O zaman (1.1) formülü

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} \quad (1.2)$$

biçiminde basit olarak yazılabilir.

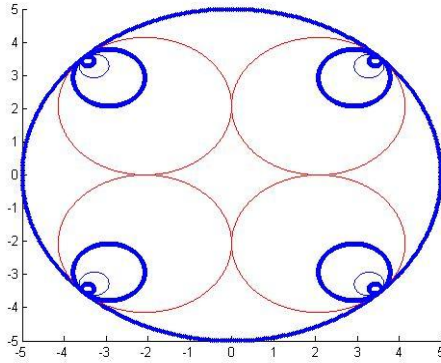
Ölçülen total uzunluk $N.a$ ise

$$N.a = \left(\frac{1}{r}\right)^{D-1}$$

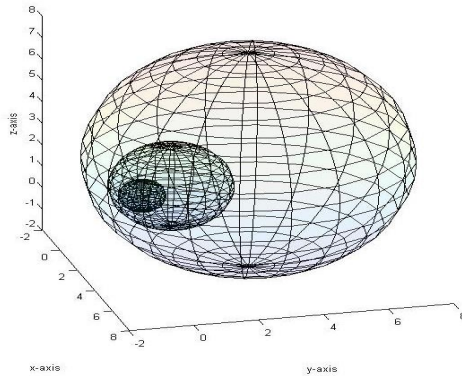
olur. Bu da ölçü birimi olan r nin azalması halinde, ölçülen $N.a$ uzunluğunun nasıl arttığını göstermektedir.

Literatür incelemesi yaptığımızda, fraktal yüzeylerde alan-hacim ilişkileri ile ilgili yapılan çalışmaların az olduğunu görmekteyiz. Yapacağımız bu çalışma, bu alandaki eksikliğin biraz olsun kapatılması bakımından önem arz etmektedir.

Bu tez çalışması kapsamında, üç boyutlu uzayda fraktal yüzeylerin alan ve hacim hesaplamaları ile ilgili çalışmalara ve Matlab uygulamalarına yer verilecektir.



Şekil 1.1. $S^{1/4}$ Çembersel Fraktal.



Şekil 1.2. $S^{2/4}$ Küresel Fraktal.

$S^1/4$ Çembersel Fraktal ve $S^2/4$ Küresel Fraktal adıyla yeni bir fraktal şekil ele alınacaktır. Bu şeklin detaylarına girmeden önce temel tanım ve teoremler verilecektir.



2. LİTERATÜR BİLDİRİŞİ

Matematik anlamda ilk çalışılan fraktal, Cantor cümlesidir (Cantor Set). Cantor tarafından ortaya atılmış, 1875 yılında geometri profesörü Henry Smith tarafından tanıtılmıştır (Oxford Üniversitesi). 1877 yılında, Georg Cantor, ilk başta bir kare ele aldı. Bu kareyi doğrularla parçalayarak bir fraktal şekil elde etti (Sullivan, 1988). Cantor cümlesi ile ilgili ilk çalışma 1883 de basılmış [G. Cantor, Über Unendliche, lineare punktmannigfaltigkeiten V, Mathematische Annalen 21 (1883) 545-591] ve bazı özel cümleler için örnek olarak gösterilmiştir (Sullivan, 1988). 1890'da Giuseppe Peano, birim kare üzerinde $[0,1]$ aralığında sürekli olan, düzlemde boşluk dolduran bir eğri tanımladı. David Hilbert de 1891'de benzer şekilde geometrik bir yapı kullandı ve bu tanımlar yardımıyla, E. H. Moore 1900 yılında Peano Eğrisi'ni tanımladı (Aydın, 2015). 1904 yılında Helge Von Koch hiçbir noktada teğeti olmayan bir eğri tanımladı. Bolzano da bu eğriyi baz alarak, sürekli fonksiyon türevi ile ilgili Koch'a benzer bir örnek verdi (Kenneth, 1982).

1913'de tanımlanan Brownian hareketi, yörüngeleri rastgele olan eğrilerdir (Grattan,1994).

1919'da Felix Hausdorff bunları birleştirerek başka bir kavram öne sürdü; uzayda bir objenin hacmini ölçmek için bir küme kullandı ve daha sonra Hausdorff boyutu adında yeni bir kavram ileri sürdü (Grattan,1994).

$$0 \leq \text{Topolojik boyut} \leq \text{Hausdorff boyutu} \leq 3$$

1920'den önce boyut kavramı ve dinamik sistemler ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Goodson, 2015).

Fraktalların tarihi gelişiminde Cantor, Sierpinski, Von Koch, Peano gibi matematikçiler tarafından oluşturulan fraktallar, matematiksel canavarlar olarak adlandırılır. İlk fraktal şekillerin ortaya çıktığı zamanlarda Cantor cümlesi görünüş açısından diğerlerinden farklıydı. Diğer fraktal şekiller gibi gösterişli ve karmaşık değildi. Cantor cümlesinin, matematiğin pek çok alanında özellikle Kaotik Dinamik Sistemlerde önemli rol oynadığı ve pek çok fraktallar (Julia cümleleri gibi) için de gerekli bir model olduğu görülmektedir.

$z_{n+1} = z_n^2 + c$ iterasyonu altında periyodik olmayan yörüngeye sahip c -değerine karşılık gelen noktaya Misiurewicz noktası denir. Yani $z_0 = 0$ sabit nokta iken iterasyonlar sonucu oluşan diğer noktalar da sabittir. Tüm Misiurewicz noktaları Mandelbrot cümlesinin sınırında yer alır (Brincks, 2005). Bu noktalar dalların ucu, spirallerin merkezi ve dalların birleşme noktalarıdır (Büyükyılmaz, 2009).

Dinamik sistemde yer alan Julia cümlelerinin oluşması için tek yapılması gereken bir c -değerinin belirlenmesi ve iterasyon işlemine devam edilmesidir. Bir başka deyişle, her bir c -değeri $z_{n+1} = z_n^2 + c$ iterasyon kuralı ile farklı bir Julia cümlesi oluşturur. Dolayısıyla Mandelbrot cümlesi, yörüngesi sınırlı olan c -değerlerinin cümlesi olduğundan, Mandelbrot cümlesi içindeki her c -değerine bir Julia cümlesi karşılık gelir (Branner, 1989).

Fraktal geometrinin kullanım alanları gün geçtikçe artmaktadır. Günümüzde en çok kullanılan alanlardan bazıları; banka ve finans (Dong ve ark. 2014), bilgisayar teknolojisi, teknik analizler, müzik, tıp ve biyoloji... alanlarıdır (Yılmaz, 2013).

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Dinamik Sistemler

İterasyon, kelime anlamı itibariyle tekerrür, tekrarlama, yineleme veya ardışık işlem anlamlarına gelir. İterasyon bir süreci tekrarlamak demektir. Matematiksel manada iterasyon, fonksiyonun bir girdiye uygulanarak bir çıktı elde edilmesi ve bundan sonraki her adımda oluşan çıktının bu sürece dahil edilmesidir (Kaptanoğlu, 2000).

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \\ f(f(x)) &= x + 1 + 1 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= x + n \end{aligned}$$

Basit iterasyonlardan biri $z_{n+1} = z_n^2 + c$ şeklinde ifade edilir. Kompleks sayıları kullanarak Mandelbrot Cümlesini ve Julia Cümlesini genelleştirmek mümkündür. Bunun için Z ve c kompleks sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ Z &\rightarrow Z^2 + c \end{aligned}$$

dönüşümü esas alınır. c kompleks sayısından başka bir Z_0 kompleks sayısı daha alınır ve $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ kompleks sayıların dizisi

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_0^2 + c \\ Z_2 &= (Z_0^2 + c)^2 + c \\ Z_3 &= [(Z_0^2 + c)^2 + c]^2 + c \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ Z_n &= Z_{n-1}^2 + c \end{aligned}$$

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + c$$

olarak yazılır.

Bir prosesi defalarca yapma işine tekrarlama, iterasyon adı verilir. Bu kavram dinamik sistemlerin temel operasyonlarından biridir. Dinamikte, proses (tekrarlama) bir matematiksel fonksiyonun hesabıdır (Başkan, 2000).

Bilinen aşına fonksiyonlardan karekök alma fonksiyonu ele alınsın. Karekökü alınan ve sonuçları, yeni ilk verilen değerler ve elde edilen değerler, terminoloji açısından girdi ve çıktı olarak adlandırılır. Bu tür bir hesaplama bir hesap makinesi kullanılarak yapılsın. Girdi (input) sayısı 256, fonksiyon (tekrarlanacak olan fonksiyon) karekök alma olsun (Kaya, 2006).

Böylece, karekök fonksiyonu, her çıktı yeni bir girdi olarak ele alınarak, bu anlamda iterasyon yapılarak şu dizi elde edilir.

$$\sqrt{256} = 16$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{2} \cong 1.414214$$

$$\sqrt{1.414214} \cong 1.189207$$

$$\sqrt{1.189207} \cong 1.090508$$

.

.

.

Bu kavram, karekökten çıkarılıp, genel bir fonksiyon olarak yazılsın.
Fonksiyon,

$$I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$$

şeklinde verilsin.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \dots \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \dots$$

$$(fofofo \dots of)(x) = f(f(f(\dots(f(x)))) \dots)$$

veya $f(x) = \sqrt{x}$ seçilirse,

$$f\left(f\left(\dots\left(f(x)\right)\dots\right)\right) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{x}}}}$$

dir. Kısaca $f \circ f = f^2$, $f \circ f \circ f = f^3 \dots$ seçimi yapılırsa

$$f(256) = 16$$

$$f^{20}(256) \cong 1.000005$$

.

.

.

yazılabilir (Beardon, 1991).

3.1. Tanım (Yörünge): Bir nokta veya sayının, iterasyonları altında ardışık listelerine yörünge denir (Beardon, 1991).

3.1. Örnek:

$x = 2$, $f(x) = x^2$ için 2'nin yörüngesi;

$$2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296 \dots$$

$x = 1000 TL$, f aylık %5 faizli daimi hesaba para yatırma işleminde, x miktardaki bir kapitalin faiz getiri adımları

$$f(x) = x \left(1 + \frac{5}{100}\right) = \frac{105}{100}x$$

dir ve 1000 TL nin yörüngeleri

$$1000, 1050, 1102, 1157$$

Bir noktanın yörüngesi bazen ilginç durumlar sergiler. Mesela belli bir tekrardan sonra başlangıç noktasına gelinebilir. Yani bir döngü oluşturabilir.

3.2. Sabit ve Periyodik Noktalar

Bir f fonksiyonu için;

$$f(x_0) = x_0$$

ise x_0 'a f 'nin bir sabit noktası denir. Nokta sabit ise iterasyon altında da sabittir.

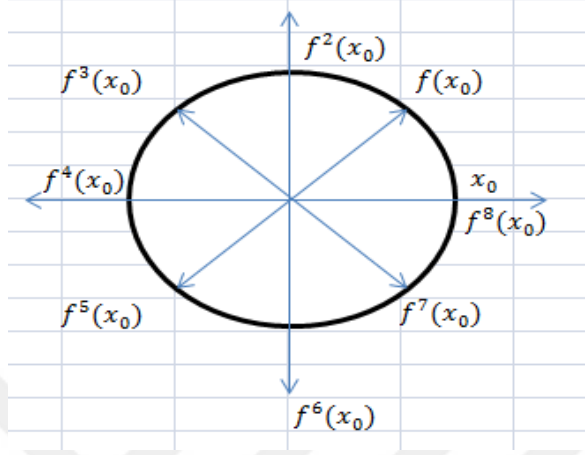
$$f(f(f(\dots f(x_0)) \dots) = x_0$$

(f, x_0) için bir N tamsayısı

$$f^N(x_0) = x_0$$

olacak şekilde var ise x_0 'a f 'nin N periyod noktası denir. Bu özelliği taşıyan en küçük N tamsayısına f 'nin ilkel (asıl) periyodu denir (Thomas ve ark., 2009).

f , 0 noktası etrafında, 45° lik dönme olsun.



Şekil 3.1. Sıfır noktası etrafında, 45° lik dönme.

$$f(x) = \frac{1}{x}, (x \neq \pm 1, x \neq 0)$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$f^3(x) = f(f(f(x))) = \frac{1}{x}$$

$$f^4(x) = f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

.

.

.

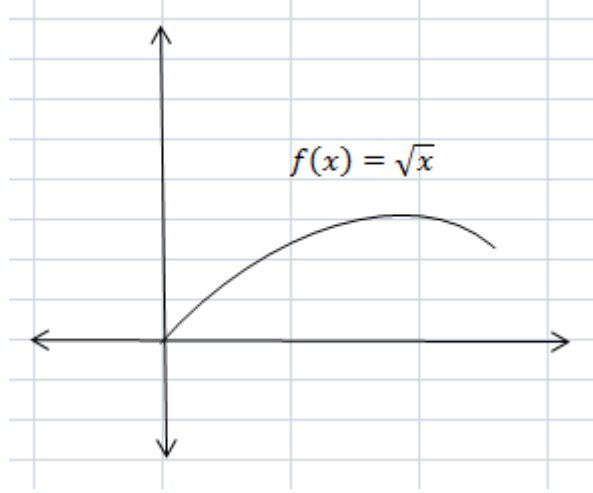
3.3. Grafik Analiz

Grafik analiz, bir dinamiğin davranışını, oluşmadan önce tahmin etmektir. Grafik analizi kullanarak, bir fonksiyonun tekrarı anlaşılabilir. Bir fonksiyonun ne yapacağını anlaşılmasının en iyi yollarından biri fonksiyonun grafiğini çizmektir.

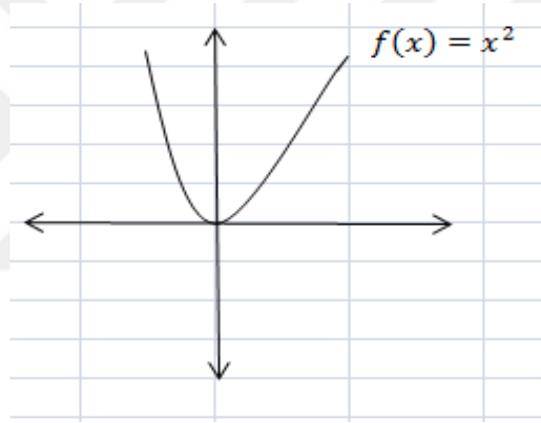
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ nin grafiği xy – düzleminde;

$$G: \{(x, F(x))/x \in \mathbb{R}\}$$

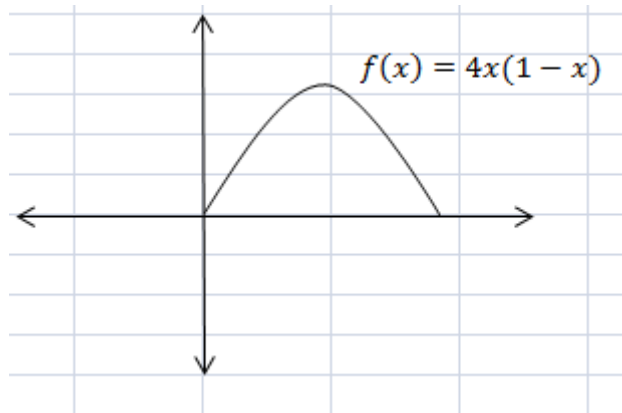
noktalar cümlesidir (Dave, 1982).



Şekil 3.2. $f(x) = \sqrt{x}$ grafiği.



Şekil 3.3. $f(x) = x^2$ grafiği.

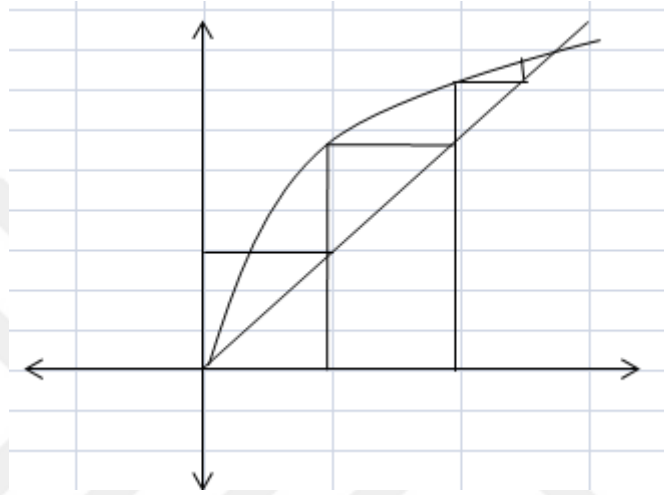


Şekil 3.4. $f(x) = 4x(1-x)$ grafiği.

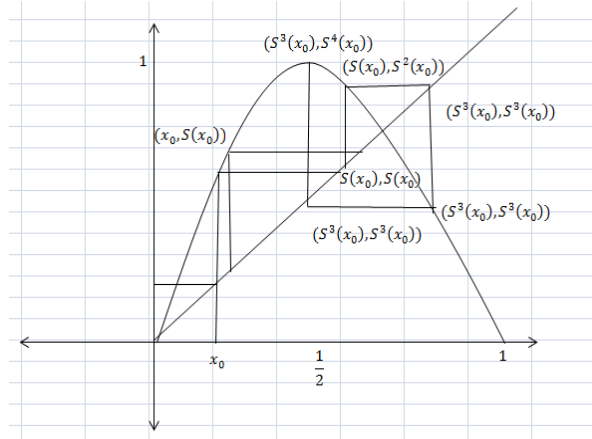
$S(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonuna dönelim. İlk bakışta, sanki yalnızca $S(x)$ 'in değil, $S^2(x), S^3(x) \dots$ 'in grafiklerinin de bilinmesi gerektiği izlenimi verir. Fakat öyle değildir.

$y = \sqrt{x}$ in grafiği çizilir.

$y = x$ in grafiği çizilir.



Şekil 3.5. $y = 4x(1 - x)$.



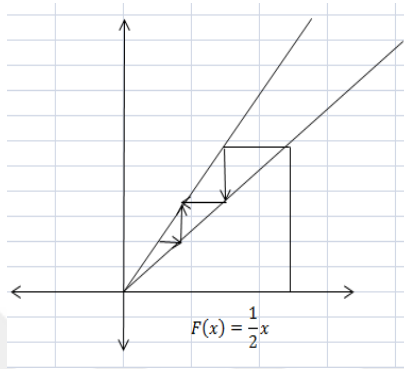
Şekil 3.6. Periyodik Noktalar.

3.4. Attracting-Repelling Sabit Noktalar

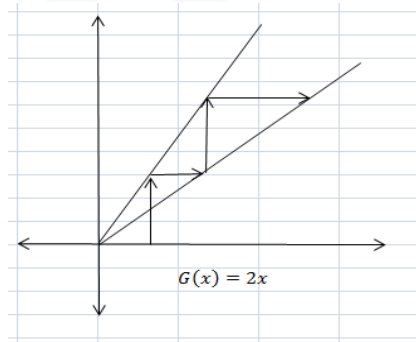
Grafik analizden de görüleceği gibi, fonksiyonların –varsa- sabit noktaları farklılıklar gösterir. Mesela,

$$F(x) = \frac{1}{2}x \text{ ve } G(x) = 2x$$

fonksiyonları ele alınsın. $0 = x$ her ikisinin de sabit noktası olmasına karşın, $x = 0$, $F(x)$ 'in attraction da tüm noktaların yaklaştığı nokta iken, $x = 0, G(x)$ ' de yalnızca sabit noktadır, hatta noktalar 0'dan uzaklaşırlar.



Şekil 3.7. $F(x) = \frac{1}{2}x$ grafiği.



Şekil 3.8. $G(x) = 2x$ grafiği.

Bir fonksiyonun sabit bir noktası P olsun. $a < x < b$ aralığı P 'yi ihtiva ediyor ve $F^n(x) \rightarrow P$, ($n \rightarrow \infty$ iken) ise P 'ye F 'nin attracting noktası denir.

Sabit nokta olmakla birlikte, attracting olmayan noktaya ise, repelling sabit nokta adı verilir.

3.5. Attraction Basin (cazibe havzası)

Yörüngeleri, verilen bir attracting noktasına giden noktaların cümlesine attraction havzası denir.

Mesela; $f(x) = x^2$ olsun.

Sabit nokta $x = 0$ dır.

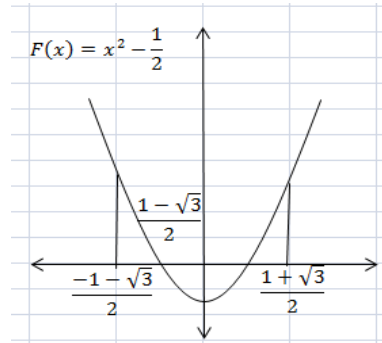
$-1 < x < 1$ aralığına dikkat edilirse, bu aralıktaki noktalar 0'a gider (tekrarlarda). Böylece $f(x) = x^2$ 'nin 0 noktası için attraction havzası $(-1,1)$ aralığıdır.

$(-1,1)$, $f(x) = x^3$, $x = 0$ için de $(-1,1)$ attraction havzasıdır.

$F(x) = \frac{1}{2}x$, $x = 0$ 'ın attraction havzası tüm reel sayılardır.

3.2. Örnek: Bu örnekte $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ fonksiyonunun attracting noktası ve attracting havzası hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} F(x) = x &\Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} = x \\ x^2 - x - \frac{1}{2} &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Şekil 3.9. $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ grafiği.

Grafik analizinden de görüldüğü gibi, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ noktası attracting noktasıdır ve attracting havuzu

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

dir.

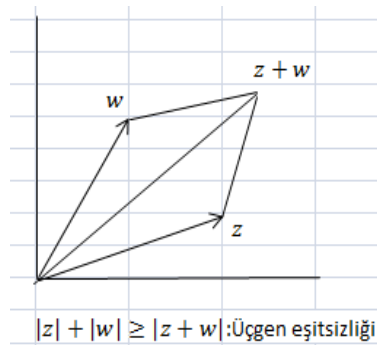
3.6. Stable (durağanlık) özelliği: Bir dinamik sistemde başlangıç noktası değişmesine rağmen yörüngeyi geri kalanının değişmemesidir (Pamuk, 2013).

3.2. Tanım (Durağan Dinamik Sistem): Durağanlık özelliğine sahip olan dinamik sisteme durağan dinamik sistem denir (Pamuk, 2013).

3.3. Örnek: Fonksiyon $P(x) = \sqrt{x}$, ($x \neq 0$) olsun. Sıfırdan farklı her noktanın yörüngesi durağandır. Çünkü; ($x \neq 0$) olan her x noktasının attracting noktası 1'dir.

3.4. Örnek: $P(x) = \tan x$ fonksiyonu için, P 'nin tüm yörüngeleri 0.739085'e gider. 0.739085 attracting noktasıdır.

3.5. Örnek:



Şekil 3.10. $|z| + |w| \geq |z + w|$ grafiği.

$$|y| = |y - z + z| \leq |z| + |y - z|$$

$$|y| - |z| \leq |y - z|$$

z yerine $-z$ yazılırsa

$$|y| - |-z| \leq |y + z|$$

$$|y - z| \leq |y + z|$$

$|x_0 + iy_0| < 1$ olan bir $x_0 + iy_0$ noktası, 0 'a yakınsayan bir yörüngeye,

$|x_0 + iy_0| > 1$ şeklindeki bir noktada ∞ 'a yakınsayan bir yörüngeye sahiptir.

$|x_0 + iy_0| < 1$ noktalarının yörüngeleri 0 'a yakınsar. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} T|x_0 + iy_0| &= |(x_0^2 - y_0^2) + i2x_0y_0| \\ &= \sqrt{(x_0^2 - y_0^2)^2 + 2^2x_0^2y_0^2} \\ &= \sqrt{(x_0^2 - y_0^2)^2} \\ &= x_0^2 - y_0^2 \\ &= |x_0 + iy_0|^2 \\ &< |x_0 + iy_0| \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ olan bir sayı için $a > a^2$ 'dir. Yani,

$$T|x_0 + iy_0| < |x_0 + iy_0|$$

olup,

$$T^n(x_0 + iy_0) \rightarrow 0$$

dır.

Çemberin iç noktaları 0 'a yaklaşır. Çemberin dış noktaları ∞ 'a yaklaşır. Çemberin üstündeki noktalar ise sabit kalır.

Bu cümle T 'nin Julia Cümlesi olarak bilinir.

$$|T(x_0 + iy_0)| < |x_0 + iy_0|$$

eşitliği şu şekilde yorumlanabilir.

$$|x_0 + iy_0| < 1$$

özelliğindeki noktalar, T iterasyonu altında 0 'a (sıfır) yaklaşır.

Benzer olarak, $|x_0 + iy_0| > 1$ noktaları da T 'nin sonsuz tekrarı ile sonsuza gider. Böylece T altında yörüngelerin iki (predominant) davranışı elde edilir. Modülü 1 'den küçük olup, 0 'a giden noktalar, ki bunlar sabit noktalardır. Modülü 1 'den büyük olup sonsuza giden noktalar.

Bu iki nokta grubu arasında modülü 1 olan noktalar vardır. Bu noktalar kompleks düzlemde 1 yarıçaplı çember üzerinde olan noktalardır. Bu cümle Julia Cümlesi olarak bilinir.

Eğer, $|x_0 + iy_0| = 1$ ise $T|x_0 + iy_0| = 1$ 'dir. Yani, bir nokta Julia Cümlesi üzerinde ise yörüngesi de Julia Cümlesi üzerindedir. Bu da şunu söylettirir; Julia Cümlesi T altında invaryanttır.

Her ne kadar, yörüngeler Julia Cümlesi üzerinde hapsedilmiş (kapana kısılmış) iseler de, bir yörüngenin gerçekten orada olduğunu bulmak, işlem olarak zordur. Mesela; $T(z) = z^2$ iterasyonunu ve başlangıç noktası olarak da, $z_0 = 0.6 + i0.8$ noktasını alalım

$$|z_0| = 1$$

$$T(z_0) = (0.6)^2 - (0.8)^2 - 2i(0.6).(0.8) = -0.28 + i0.96$$

$$|T(z_0)| = 1, (-0.28, 0.96)$$

$$T(T(z_0)) = (-0.28)^2 - (0.96)^2 - 2i(0.28).(0.96) = 0.0784 + i0.5376$$

$$T(T(z_0)) = 1$$

.

.

.

Benzer işlem, $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ için tekrarlanılabilir.

± 1 ve $\pm i$ noktaları hariç, yörüngedeki noktaları tespit etmek, işlemsel olarak güçtür. Bildiğimiz tek şey yörüngesinin Julia cümlesi üzerinde olduğudur. Ayrıca şunu da hatırlatalım ki; hesapta yapılacak en küçük bir hata veya eksiklik (mesela işlemcinin kapasitesinin yetmemesinden kaynaklanan), yörünge noktasını Julia cümlesinin dışına çıkarır ki, yörünge ya 0'a (sıfır) ya da sonsuza gider (Brincks, 2005).

Özetle; kompleks kare fonksiyonu durumunda, bir yörünge aşağıdaki üç durumdan biri olur.

1. Yörünge 0'a çekilir.
2. Yörünge sonsuza gider.
3. Yörünge Julia Cümlesi içinde kalır.

4. YÖRÜNGELER

$T(z) = z^2$ fonksiyonunun yörüngeleri, ya sonsuza gider ya da sınırlı kalır. Eğer fonksiyonun yörüngesi verilen iki durumu da içermiyorsa, bu noktalar attraction havzası ve firari noktalar sınırında kalırlar. Bu ara noktalar cümlesine Julia Cümlesi denir. Böylece Julia Cümlesi parcelasyonu için ilk metod; yörüngeleri firari olan noktaları beyaz, diğerlerinin siyaha boyanmasıdır. Bu iki bölge arasındaki kısım Julia Cümlesidir. Bir yörüngenin sonsuza gitmesi şu şekilde açıklanabilir; $z^2 + c$, $|c| \leq 2$ formundaki kuadratik fonksiyonlar için bu kararı vermek kolaydır. z_0 'ın yörüngesi üzerindeki herhangi bir nokta 2 yarıçaplı çemberin dışında kalıyor ise yörünge sonsuza gider (Goodson, 2015).

4.1. Julia Cümlesi

Yirminci yüzyılın başlarında, kendi adının verildiği cümlemin temel özelliklerini kavrayan Gaston Julia bir Fransız matematikçidir.

Bir polinomun Julia Cümlesi, sonsuza giden noktaların sınır cümlesidir. Bu şu anlama gelir; Julia Cümlesindeki bir noktanın yörüngesi sonsuza gitmez ama hemen yanındaki noktanın yörüngesi sonsuza gider.

Julia Cümlelerinin geometrik özelliklerini çalışırken, basitlik olması ve ilerdeki bölümlerle beraberliği teşhis etmek için

$$\mathbb{R}_c(z) = z^2 + c$$

formundaki kuadratik formu kullanılacaktır. Burada $c = c_1 + ic_2$ bir kompleks sayıdır. Bu bölümde, $\mathbb{R}_c$ 'nin attraction periodik yörüngeye sahip olma durumu incelenecektir. Daha önceden de bildiğimiz gibi $\mathbb{R}_c$ 'nin bir attracting çembere sahip olması her zaman mümkün değildir. Böylece verilecek olan algoritma çoğu c 'ler için yetersiz kalacaktır. Sonraki bölümlerde, bu algoritmalar özel sınırlamaların dışına çıkarılacaktır.

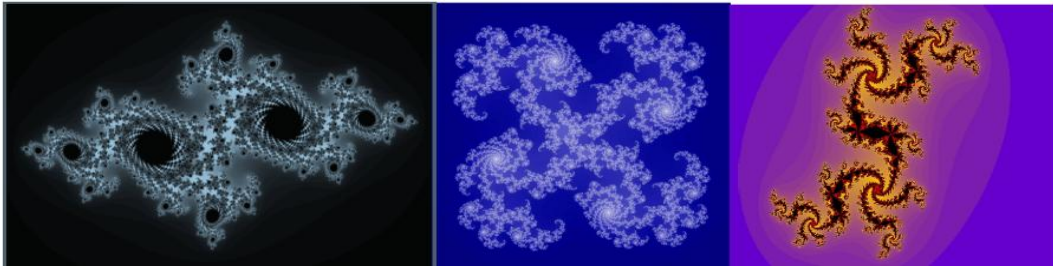
Mandelbrot Cümlesini tanımladığımızda, bunu yapmak için daha etkili bir yol gösterilecektir.

Ayrıca bu bölümde $|c| \leq 2$ şartını sağlayan noktalar kullanılacaktır.

Julia Cümleleri, Formül Tekrarlama Metodu ile elde edilen fraktallardandır. Bunlar Gaston Julia tarafından 20.yy başlarında bulunmuştur, ama gerçek analizi ancak bilgisayarlar ortaya çıktıktan sonra mümkün olmuştur. Diğer formülle tekraralama metoduyla elde edilen fraktallar gibi Julia Cümleleri de çok basit formül kullanılmasına rağmen çok karmaşık olabilirler. Julia Cümlesini çizmek için aşağıdaki yol takip edilir:

1. Herhangi bir c karmaşık sayısı alınır. Bu sayı Julia Cümlesinin sabiti olacaktır.
2. z bir diğer karmaşık sayı olarak seçilsin.
3. z yerine $z^2 + c$ alınır ve bu işlem ardışık olarak tekrar edilir.
4. Eğer sayı sonsuza gidiyorsa, o sayı kompleks düzlemde işaretlenmez aksi takdirde cümleye aittir ve işaretlenir.
5. Düzlemdeki tüm kompleks sayılar kontrol edilinceye kadar 2-4 adımları farklı sayılarla tekrar edilir.

c sabiti herhangi bir kompleks sayı olabilir ve her bir c kompleks sayısı, farklı bir Julia Cümlesi üretir. Burada ilginç olan, aynı formülle farklı sabitlerin, birbirine hiç benzemeyen fraktalları üretebiliyor olmasıdır (Cilingir and Devaney, 2010).



Şekil 4.1. Farklı c sayıları için oluşan Julia cümleleri.

Bazı Julia cümleleri bağlantılı (connected) iken bazıları ayrık (disconnected) noktaların birleşiminden oluşur. Bu durum, c noktasına karşılık gelen Mandelbrot cümlesinde olup olmadığıdır. Yukarıdaki resimde c 'nin farklı değerleri için $z = z^2 + c$ formülü kullanılmıştır (Felix ve ark., 2007).

4.1. Tanım (Doldurulmuş Julia Cümlesi): f 'nin iterasyonları altında sınırlı kalan yörüngelerin cümlesine Doldurulmuş Julia Cümlesi denir ve K_f ile gösterilir.

$$K_f = \{z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) \not\rightarrow \infty\}$$

şeklinde tanımlanır (Branner, 1989).

4.2. Tanım: f 'nin iterasyonları altında sonsuza giden yörüngelerin cümlesine ∞ 'un çekim havzası (basin of attractive) denir ve $A_f(\infty)$ ile gösterilir.

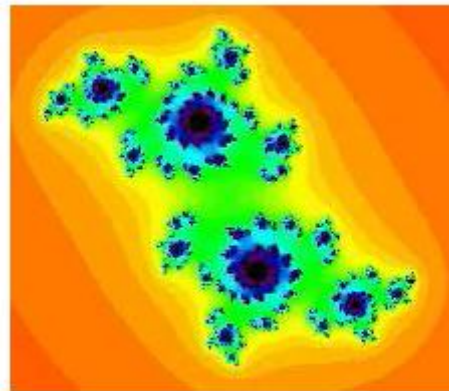
$$A_f(\infty) = \mathbb{C} \setminus K_f = \{z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) \rightarrow \infty\}$$

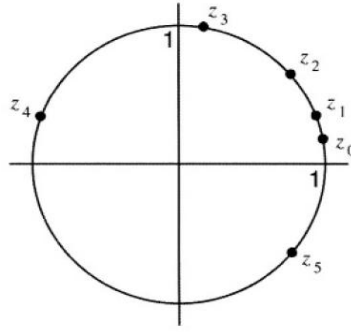
dir (Branner, 1989).

4.3. Tanım: J_f Julia cümlesi olmak üzere, kompleks düzlemdeki her c - değeri için oluşacak Julia cümlesine, K_f doldurulmuş Julia cümlesinin sınırı denir (Cilingir and Devaney, 2010).

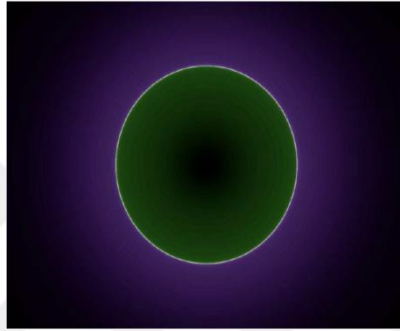
4.1. Teorem (Fundamental Dichotomy): Kompleks düzlemdeki herhangi bir c - değeri için $f_c(0)$, 0 'ın yörüngesi olmak üzere, $f_c(0) \in K_f$ ise J_f irtibatlıdır, $f_c(0) \notin K_f$ ise J_f Cantor cümlesidir (Devaney, 1994).

İrtibatlı cümleler tek bir parçadan oluşurken Cantor cümlesi sonsuz çoklukta parçadan oluşur. Cantor cümlesinin her bir parçası da birer Cantor cümlesidir ve Cantor cümlesindeki her nokta diğer noktaların limit noktasıdır. Bu nedenle Cantor cümlesi noktalardan oluşmuş bir cümle olup, Cantor tozu olarak da anılmaktadır. İrtibatsız Julia cümleleri Cantor cümlesi yapısındadırlar (Sullivan, 1988).





Şekil 4.5. $|z| = 1$ ise $f^{(n)}(z) = 1$.

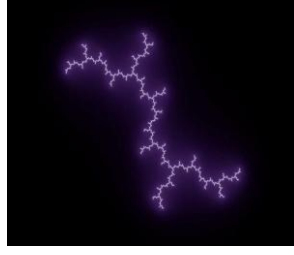


Şekil 4.6. $f(z) = z^2$ için Julia cümlesi yeşil bölge ile mor renkli bölge arasındaki sınır.

4.2. Örnek: $z_{n+1} = z_n^2 + c$ kuadratik polinomunun $c = i$ için $z_0 = 0$ yörüngesi altında Julia cümlesini inceleyelim.

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 0 \\
 z_1 &= z_0^2 + c = 0 + i = i \\
 z_2 &= z_1^2 + c = i^2 + i = -1 + i \\
 z_3 &= z_2^2 + c = (-1 + i)^2 + i = -i \\
 z_4 &= z_3^2 + c = (-i)^2 + i = -1 + i \\
 z_5 &= z_4^2 + c = (-1 + i)^2 + i = -i \\
 z_6 &= z_5^2 + c = (-i)^2 + i = -1 + i \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

0'ın yörüngesi $\{0, -1 + i, -i, -1 + i, -i, \dots\}$ olup, sınırlı olduğu açıktır. O halde oluşan Julia cümlesi irtibatlıdır (Şekil 4.7).



Şekil 4.7. $c = i$ için Julia cümlesi.

4.3. Örnek: $c = -1$ için oluşacak Julia cümlesinin bulunması için $f_{-1}(z) = z^2 - 1$ altında 0'ın yörüngesi;

$$f_{-1}(0) = -1$$

$$f_{-1}(-1) = 0$$

$$f_{-1}(0) = -1$$

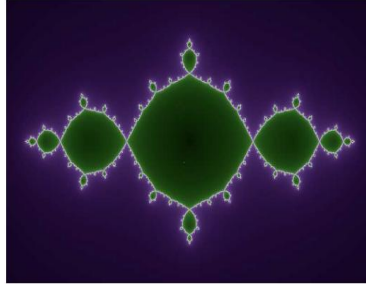
$$f_{-1}(-1) = 0$$

.

.

.

$c = -1$ için 0'ın yörüngesi $\{0, -1, 0, -1, 0, \dots\}$ olduğundan sınırlıdır, dolayısıyla Julia cümlesi irtibatlıdır (Şekil 4.8).



Şekil 4.8. $c = -1$ için Julia cümlesi.

4.2. Mandelbrot Cümlesi

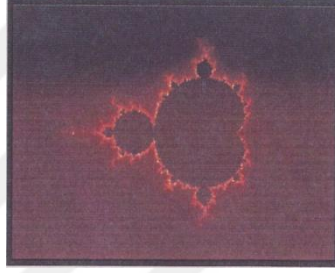
Mandelbrot cümlesi, formülle tekrarlama metoduyla üretilen bir fraktal tipidir. Mandelbrot cümlesi, Julia cümlesine benzer algoritma ile elde edilir. Mandelbrot

cümlesini çizmek için, aşağıdaki adımlar izlenir:

1. $z = 0 + 0i$ alınsın.
2. Kompleks düzlemde seçilen bir nokta c olsun.
3. $z = z^2 + c$ alıp bu işlemi ardışık olarak tekrarlınsın.
4. Eğer sayı sonsuza gitmiyorsa, cümleye dahildir ve işaretlenebilir. Aksi halde, nokta sonsuza hangi hızda gittiğine bağlı olarak renklendirilsin.

Yukarıdaki 1-4 adımları düzlemdeki tüm noktalar için tekrarlanır.

Bu algoritmanın Julia cümlesindeki ile aynı olduğuna dikkat edilmelidir, sadece Mandelbrot cümlesinin algoritmasında c değişip z nin ilk değeri $(0,0)$ iken, Julia cümlesinin algoritmasında z değişip sabit olarak c alınır. Her formül için bir Mandelbrot cümlesi ve sonsuz sayıda Julia cümlesi vardır.



Şekil 4.9. Mandelbrot cümlesi.

Diğer formüller de kullanılabilir. İlginç fraktallar, trigonometrik ve logaritmik fonksiyonlarla da üretilebilirler (Hacısalıhoğlu, 2006).

Mandelbrot cümlesi, kompleks dinamiklerde önemli bir yere sahiptir.

$f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z) = z^2 + c$ iterasyon kuralı ele alınsın. $z = 0$ sayısının f_c altındaki değeri $f_c(0) = c$ 'dir. Benzer şekilde $z = c$ sayısının f_c altındaki değeri $f_c(c) = c^2 + c$ 'dir. f_c fonksiyonunun bir önceki aşamada elde edilen sayıya, yani $c^2 + c$ 'ye uygulanması yeni bir sayı, yani $(c^2 + c)^2 + c$ 'yi üretecektir. Bu işleme devam edilirse,

$$(0, f_c(0), f_c(f_c(0)), \dots)$$

karmaşık sayı dizisi elde edilir. Bu dizinin limit değerinin sonlu bir sayı olup olmaması c değerine bağlıdır. Bunun nedeni f_c tipindeki ikinci derece polinomların yinelemeli uygulamalarının yarıçapı 2'den büyük her çemberi sonsuza götürmesindendir.

Dizinin, sonlu bir sayıya yakınsadığı c değerlerinin kümesine Mandelbrot kümesi denir. Başka bir ifadeyle, Mandelbrot kümesi, öyle bir kümedir ki c sayısı bu kümeden seçildiğinde yukarıdaki dizi sonlu bir sayıya yakınsar (Feliks and Mariusz, 2007).

4.4. Örnek: $c = 1$ için $z_0 = 0$ 'ın $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında oluşan yörüngesi:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= 0^2 + 1 = 1 \\ z_2 &= 1^2 + 1 = 2 \\ z_3 &= 2^2 + 1 = 5 \\ z_4 &= 5^2 + 1 = 26 \\ z_5 &= 26^2 + 1 = 677 \\ z_6 &= 677^2 + 1 = 458.330 \\ &\vdots \end{aligned}$$

dir. $c = 1$ için $z_0 = 0$ 'ın yörüngesi sonsuza gider o halde $c = 1 \notin M$ 'dir.

4.5. Örnek: $c = i$ için $z_0 = 0$ 'ın $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında oluşan yörüngesi:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= 0^2 + i = i \\ z_2 &= i^2 + i = -1 + i \\ z_3 &= (-1 + i)^2 + i = -i \\ z_4 &= (-i)^2 + 1 = -1 + i \\ z_5 &= (-1 + i)^2 + 1 = -i \\ z_6 &= (-i)^2 + 1 = -1 + i \\ &\vdots \end{aligned}$$

dir. $c = i$ için $z_0 = 0$ 'ın yörüngesi belli değerler almakta ve bunun dışına çıkmamaktadır. O halde $c = i \in M$ dir.

4.6. Örnek: $c = 0$ için $z_0 = 0$ 'ın $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında oluşan yörüngesi:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

$$z_3 = 0$$

$$z_4 = 0$$

.

.

.

dir. Oluşan bu yörünge ise yukarıdaki diğer iki yörüngeden oldukça farklıdır çünkü tüm iterasyonlar için sabit kalır.

Örneklerden de anlaşılacağı üzere $z_0 = 0$ 'ın $f(z_n) = z_n^2 + c$ altında oluşacak yörüngeleri ya sonsuza gider ya da gitmez. Eğer yörünge sonsuza gitmezse birçok şekilde davranabilir: sabit, periyodik veya kaotik, fakat esas olan bazen sonsuza gitmesi diğer zamanlarda ise gitmemesidir. Mandelbrot cümlesi tam da bu özel durumun resmidir (Kenneth, 1982).

4.2. Teorem: $|c| > 2$ ve $|z| \geq |c|$ ise z 'nin yörüngesi sonsuza gider (Brincks, 2005).

İspat: $|c| = 2 + p$ ve $p > 0$ olsun.

$$|z_n^2| = |z_n^2 + c - c|$$

$$|z_n^2 + c - c| \leq |z_n^2 + c| + |c| \quad (\text{Üçgen Eşitsizliği})$$

$$|z_n^2| \leq |z_n^2 + c| + |c|$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n^2| - |c|$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n^2| - |z_n| \quad ; \quad |z_n| \geq |c|$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n| (|z_n| - 1)$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n| (|c| - 1) \quad ; \quad |z_n| \geq |c|$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n| (2 + p - 1) \quad ; \quad |c| = 2 + p$$

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n| (p + 1)$$

İterasyon ile $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ve $|z_n^2 + c| \geq |z_n| (p + 1)$ olduğundan

$$|z_{n+2}| \geq |z_n| (p + 1)(p + 1) = |z_n| (p + 1)^2, p > 0$$

$$|z_{n+3}| \geq |z_n| (p+1)^2 (p+1) = |z_n| (p+1)^3, p > 0$$

.

.

.

$$|z_{n+k}| \geq |z_n| (p+1)^k, k \in \mathbb{N}$$

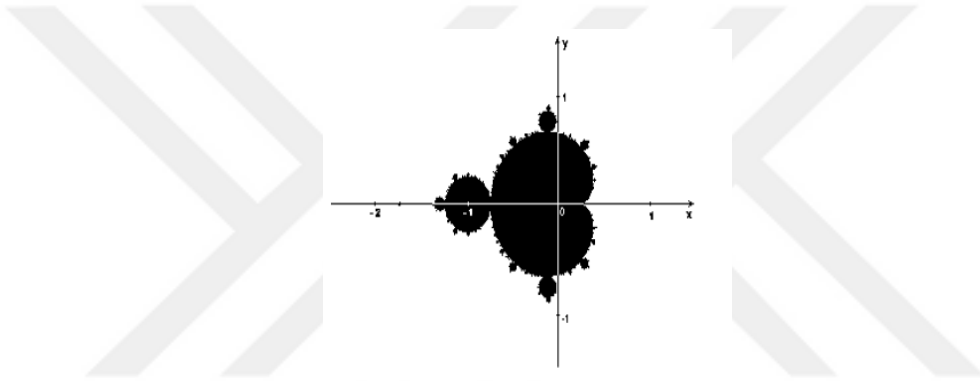
Dolayısıyla $n \rightarrow \infty$ için z 'nin yörüngesi de sonsuza gider.

Yörüngeye sonsuza gidip gitmediğini açıklayan bu teorem şunu söylemektedir:

Kompleks düzlemde seçilecek her c sayısı için $|c| > 2$ ise $c \notin M$ 'dir. Yani

$c = 0, -1, -1.1, -1.3, -1.48, i$ değerlerinin hepsi Mandelbrot cümlesinde yer alırken

$c = 2 + 3i$ Mandelbrot cümlesinin dışında yer alır.



Şekil 4.10. Reel eksene göre simetrik Mandelbrot cümlesi.

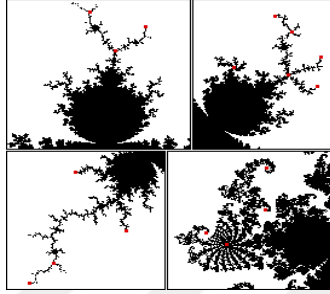
Mandelbrot cümlesi reel ekseni simetri ekseni olarak kabul eder (Şekil 4.10) (Nigel ve ark., 2014).

4.2.1. Misiurewicz noktası

Bazı c - değerleri için $z_0 = 0$ noktası yörüngede yer almazken iterasyonlarından bazıları yörüngede yer alır. Yani periyodik olmayan bir yörünge oluşur. O halde $z_{n+1} = z_n^2 + c$ iterasyonu altında periyodik olmayan yörüngeye sahip c - değerine karşılık gelen noktaya Misiurewicz noktası denir. Yani $z_0 = 0$ sabit nokta iken iterasyonlar sonucu oluşan diğer noktalar sabittir. Tüm Misiurewicz noktaları Mandelbrot cümlesinin sınırında yer alır. Bu noktalar dalların ucu, spirallerin merkezi

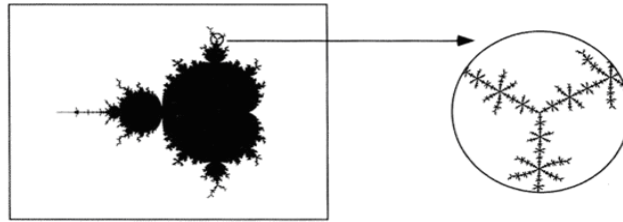
ve dalların birleşme noktalarıdır. (Şekil 4.11)' de bazı Misiurewicz noktaları kırmızı renk ile gösterilmiştir.

Mandelbrot cümlesi kendisinin sonsuz çoklukta kopyasını içerir. Gerçekten her küçük Mandelbrot cümlesinin dışındaki lifler kendine has dekorasyonlara sahiptir. Mandelbrot cümlesindeki Misiurewicz noktaları kendine benzer bir yapı sergiler. Bu benzerlik çok küçük ölçeklerde yakınlştırıldığında görülebilir.



Şekil 4.11. Mandelbrot cümlesinin sınırındaki Misiurewicz noktaları.

Mandelbrot cümlesi, kendisi yarı kendine benzer bir cümle olup, sınırında barındırdığı Misiurewicz noktalarının etrafında kendine benzerlik mevcuttur (Hacısalıhoğlu, 2006).



Şekil 4.12. $c \approx -0,1011 + 0,9563i$ Misiurewicz noktası etrafında kendine benzerlik.

4.7. Örnek: $c = -2$ için $z_{n+1} = z_n^2 + c$ altında $z_0 = 0$ noktasının yörüngesi;

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = z_0^2 + c = 0 - 2 = -2$$

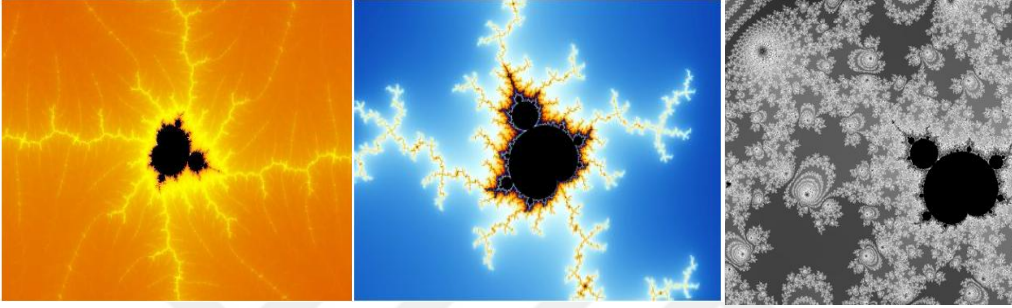
$$z_2 = z_1^2 + c = 4 - 2 = 2$$

$$z_3 = z_2^2 + c = 4 - 2 = 2$$

·
·
·

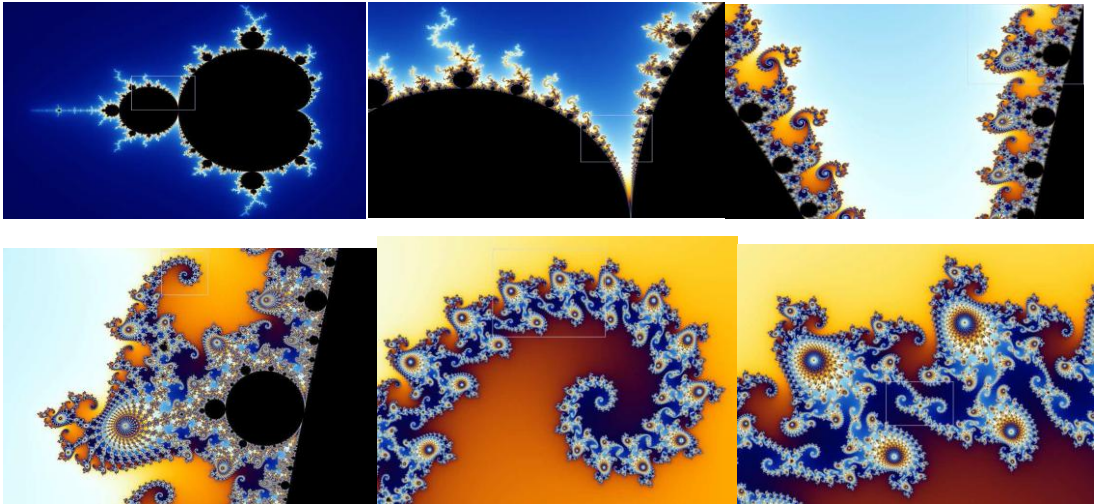
olup $z_0 = 0$ noktası periyodik değildir ve yörüngesi 2. iterasyondan sonra sabit kalmaktadır. Dolayısıyla $c = -2$ noktası bir Misiurewicz noktasıdır (Büyükyılmaz, 2009).

Aşağıda Mandelbrot cümlesine ait örnekler verilmiştir.



Şekil 4.13. Mandelbrot cümlesinin küçük kopyaları.

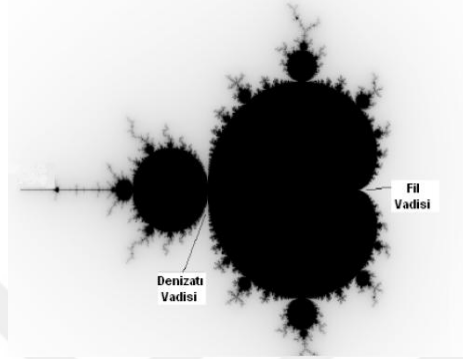
Mandelbrot cümlesinin yakınlştırılmasıyla ortaya çıkan şekiller:



Şekil 4.14. Mandelbrot cümlesi 4.

4.2.2. Mandelbrot cümlesinin derinlikleri

Kompleks dinamik sistemlerin en ünlü fraktalı olan Mandelbrot cümlesinin bazı kısımları, küçük ölçeklerde yakınlştırıldıklarında ortaya çıkan görsel sonuçlara göre isimlendirilmiştir (Şekil 4.15).



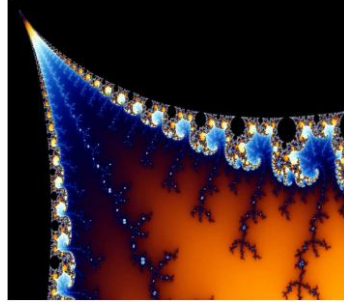
Şekil 4.15. Fil vadisi ve denizati vadisi.

Bunlardan biri denizati vadisidir. Bu vadi negatif x -ekseninde, ana kardiyoid ile ana daireyi birbirine bağlayan $z = 0,75 + i0$ noktasında oluşur. Burada denizatına benzeyen tomurcuklar görülmektedir, adı bundan dolayı denizati vadisidir (Şekil 4.16).



Şekil 4.16. Denizati vadisi.

Fil vadisi ise pozitif x -ekseninin $z = 0,25 + i0$ yani simetri ekseninin başlangıç noktasında oluşur. Küçük dairesel tomurcuklar fil görüntülerine benzetildiğinden bu ismi almıştır. (Branner, 1989). Daha fazla yakınlştırıldığında birçok ilginç yapı gözlenir (Şekil 4.17).

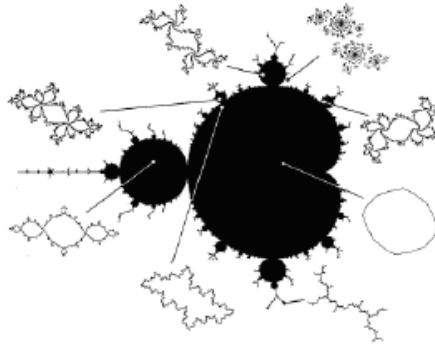


Şekil 4.17 Fil vadisi.

4.3. Mandelbrot – Julia Cümlesi Arasındaki ilişki

Dinamik sistemde yer alan Julia cümlelerinin oluşması için tek yapılması gereken bir c -değerinin belirlenmesi ve iterasyon işlemine devam edilmesidir. Bir başka deyişle, her bir c -değeri $z_{n+1} \Rightarrow z_n^2 + c$ iterasyon kuralı ile farklı bir Julia cümlesi oluşturur (Pamuk, 2013).

Dolayısıyla Mandelbrot cümlesi, yörüngesi sınırlı olan c -değerlerinin cümlesi olduğundan, Mandelbrot cümlesi içindeki her c -değerine bir Julia cümlesi karşılık gelir (Şekil 4.18) (Pamuk, 2013).



Şekil 4.18 Mandelbrot cümlesindeki Julia cümleleri.

Belirli bir c - değeri için $z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + c$ iterasyon kuralı ile $z_0 = 0$ 'dan başlanarak elde edilecek $\{z_k\}$ -lar sınırlı bir yörünge oluşturuyorsa J_f irtibatlı, $\{z_k\}$ -lar

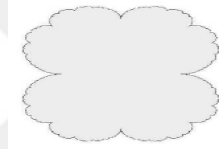
sonsuzu gidiyorsa J_f Cantor cümlesidir. Julia cümleleri ile Mandelbrot cümlesini aynı noktada buluşturan tanım aşağıda verilmiştir.

4.4. Tanım: Mandelbrot cümlesi irtibatlı Julia cümlelerini oluşturan c - değerlerinin cümlesidir. Yani M ;

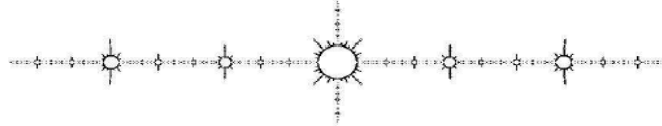
$$\begin{aligned} M &= \{c \in \mathbb{C} \mid J_f \text{ irtibatlı}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(0) \not\rightarrow \infty\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} \mid c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots \not\rightarrow \infty\} \end{aligned}$$

O halde $c \in M \Rightarrow c$ - değerine karşılık gelen Julia cümlesi irtibatlıdır, $c \notin M \Rightarrow c$ - değerine karşılık gelen Julia cümlesi Cantor cümlesidir.

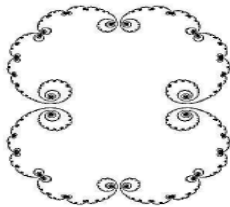
Farklı c - değerleri için verilmiş Julia Cümlelerinin resimleri aşağıda gösterilmiştir (Hacısalıhoğlu ve Yaz, 2002).



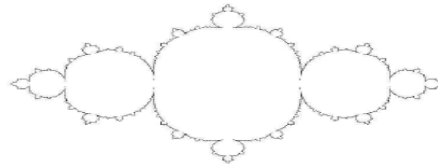
$c = 0,25$ Julia cümlesi, $c = -2$ Julia cümlesi



Airplane cümlesi, $c \approx -1,754878$



$c = 0,26$ Julia cümlesi



$c = -0,75$ Julia cümlesi

Şekil 4.19. Julia Cümleleri.

4.4. Fraktal Boyut

4.4.1. Dolambaçlılığın derecesi

Boyut kavramı çeşitli matematiksel yan anlamlara sahiptir. Bunlardan en yaygın olanı topolojik boyut olarak bilinendir. Çoğu zaman bu bir tam sayıdır. Örneğin nokta, doğru ve düzlem sırası ile 0, 1 ve 2 boyutludur. Biz 3 boyutlu uzayda yaşarız. Matematik açısından verilen bu boyut kavramı kolay olmaktan uzaktır. L.E.J. Brower (1882-1966), Felix Hausdorff (1886-1942), A.S. Bericovich 1891-1970) ve A.N. Kolmogorov (1903-1987) gibi matematikçiler boyutu farklı tanımladılar. Bu matematikçilerin verdiği tanımlar, tamsayı olan boyutlarla ilgili değildir. Kabul edelim ki a ölçütü N defa kullanılmış olsun, yani total ölçü Na olsun. O zaman Mandelbrot'un tanımına göre fraktal boyut:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{r^D} \\
 Nr^D &= 1 \\
 \log r^D &= \log \frac{1}{N} \\
 D &= \frac{\log(\frac{1}{N})}{\log r} \\
 D &= \frac{\log N^{-1}}{\log r} \\
 D &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(\frac{1}{r})}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

ile verilir. Burada D 'ye dolambaçlı çizginin “dolambaçlılık derecesi” denir. Daha sonra boyut kavramı daha genel olarak tanıtılacaktır. Burada $\log$ ile 10 tabanından logaritma kastedilmektedir. Ama başka bir taban da kullanılabilir. Uygulamada a ölçütünü, her defasında küçük adımlarla, örneğin 3'ün bir katı olarak alırsak, $\frac{\log N}{\log(\frac{1}{r})}$ kesri sabit bir değer alan D limitine yaklaşır. Bazı hallerde kesrin değeri her adımda aynı olur. O zaman (4.1) formülü

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)}$$

(4.2)

biçiminde basit olarak yazılabilir (Cardona ve ark., 2016).

Mandelbrot'un kullandığı boyut kavramı; Kolmogorov (1903-1987) tarafından 1958'de verilen bir geometrik şeklin kapasitesine karşılık gelen, Hausdorff'un basitleştirdiği boyut kavramıdır. Boyut kavramı matematik literatüründe farklı anlamlarda kullanılmasına karşılık Kolmogorov'un terminolojisine bağlı kalmak isteyenler boyut yerine kapasite de derler.

4.4.2. Kesirsel boyut

Bir noktanın boyutu yoktur. Uzunluğu, genişliği ve yüksekliği de yoktur. P şekli ne kadar büyük çizilirse çizilsin bir nokta olduğu bilinirse, noktanın ne olduğu malum olduğundan bu bir nokta gösterir ve boyutu sıfırdır.

Bir doğrunun boyutu 1'dir. Bu boyut onun uzunluğuna karşılık gelir. Doğrunun da genişliği ve yüksekliği yoktur. Fakat uzunluğu sonsuzdur.

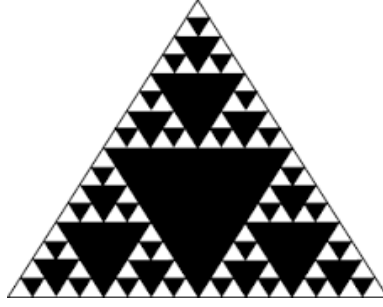
Bir düzlem iki boyutludur. Bunlar uzunluk ve genişliktir, fakat derinlik (ya da yükseklik) yoktur.

Düzlemin uzunluğu ve genişliği sınırlanamaz.

Fraktallar, kesirsel boyutlara sahip olabilirler. Örneğin bir fraktal 1.6 veya 2.4 boyutlu olabilir. Nedeni aşağıda açıklanmıştır (Dong ve ark., 2014).

Sierpinski Üçgeni ele alınsın. Bunun bir fraktal örneği olduğu aşikardır.

Şimdiye kadar verilen örneklerde de görüldüğü gibi fraktallar sonsuz adımlardan oluşan bir algoritmanın sonucu olarak ortaya çıkarlar. Aşağıdaki şekilde bu adamlardan sadece üç tanesi verilmiştir. Dolayısıyla Sierpinski Üçgeni, içinde giderek küçülen sonsuz çoklukta küçük üçgenlerden oluşan bir fraktal şekildir (Gao ve ark., 2016).



Şekil 4.20. Sierpinski Üçgeni.

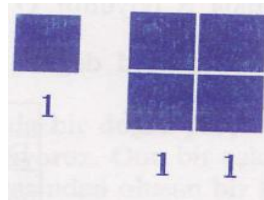
Fraktalların kesirli boyutlara nasıl sahip olduklarını görebilmek için önce genel olarak boyut kavramı verilecektir.

Bir doğru parçası ve onun uzunluğunun 2 katındaki diğer bir doğru parçasından oluşan bir kendine benzer şekil ele alınsın. Uzunluğu iki misli alınırsa, esas doğru parçasının iki kopyası alınmış olur.



Şekil 4.21. Doğru Parçası.

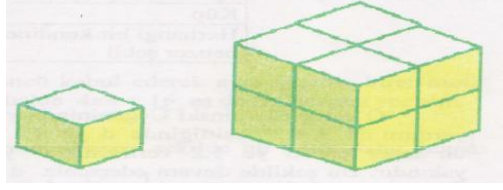
Diğer bir kendine benzer şekil olarak 1×1 tipinde bir kare ile bu karenin uzunluğunun ve genişliğinin ikişer katlarından oluşan diğer bir kare ele alınsın. Böylece esas karenin dört kopyası elde edilir. O halde kenarları katlama işi 4 kopya verir.



Şekil 4.22. Kare.

$1 \times 1 \times 1$ tipinde bir küp ele alınsın. Uzunluğu, genişliği ve yüksekliği katlanılsın.

Böylece esas küpün 8 kopyası elde edilir. O halde katlama işi 8 kopya verir.



Şekil 4.23. Küp.

Bu bilgiler aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. Geometrik şekillerin boyut-kopya sayısı hesabı 1

Şekil	Boyut	Kopya sayısı
Doğru parçası	1	$2 = 2^1$
Kare	2	$4 = 2^2$
Küp	3	$8 = 2^3$

Çizelge 4.2. Geometrik şekillerin boyut-kopya sayısı hesabı 2

Şekil	Boyut	Kopya sayısı
Doğru parçası	1	$2 = 2^1$
Kare	2	$4 = 2^2$
Küp	3	$8 = 2^3$
Herhangi bir kendine benzer şekil	D	$n = 2^d$

Burada boyut, “ d ” dir. Demek ki bir fraktal şeklin kopya sayısı bilinirse, 2’nin üstel kuvveti olarak ifade edilebilir.

Yukarıdaki tabloya bir satır daha eklensin. O halde Sierpinski Üçgeni olarak adlandırılan fraktalın boyutu verilebilir.

Kenar uzunlukları 1’er cm olan bir Sierpinski Üçgeni ele alınsın. Kenarlarının

uzunlukları katlansın. Siyah üçgenler, Sierpinski Üçgeni'nin bir parçası olmadıklarından (onlar birer deliktirler) bu katlama işi 3 kopya verecektir. O halde $3 = 2^d$ yazılabilir.

Burada d boyuttur. O halde buradan $d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$ olur.

$2 = 2^1$ ve $4 = 2^2$ olduğuna göre $3 = 2^d$ 'deki d değeri 1 ile 2 arasındaki bir değerdir.

Çizelge 4.3. Fraktal ve geometrik şekillerin boyut-kopya sayısı hesabı

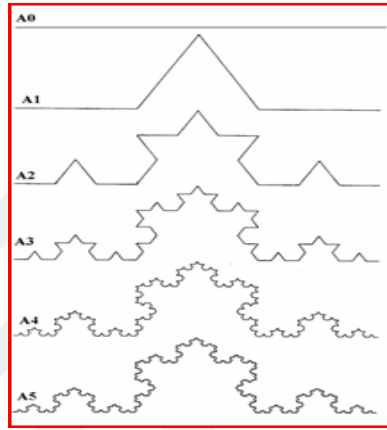
Şekil	Boyut	Kopya Sayısı
Doğru parçası	1	$2 = 2^1$
Sierpinski Üçgeni	$d = \frac{\log 3}{\log 2}$	$3 = 2^d$
Kare	2	$4 = 2^2$
Küp	3	$8 = 2^3$
Herhangi bir kendine benzer şekil	D	$n = 2^d$

O halde Sierpinski Üçgeni'nin boyutu 1 ile 2 arasında bir sayıdır. Hesap makinası yardımı ile $3 = 2^d$ eşitliğinde d 'ye 1.1 verilirse, 3 yerine 2.143547 ve 3'e daha yakın bir değer için d 'ye 1.2 verilirse, 3 yerine 2.2974 elde edilir. Bu ikincisi 3'e daha yakındır. Bu şekilde devam edilirse d 'ye daha uygun bir değer bulunur. 3'e yakın değeri veren d sayısı, Sierpinski Üçgeni olarak adlandırılan fraktalın boyutudur ve $d = \frac{\log 3}{\log 2}$ dir.

Bu da fraktalların boyutlarının nasıl birer kesirli sayı ve kesirli boyut olabileceklerini göstermektedir (Hacısalıhoğlu ve Yaz, 2002).

4.5. Koch Eğrisi ve Boyutunun Hesaplanması

1904'te Helge Von Koch, hiçbir noktada teğeti olmayan bir örnek verdi. Önceleri tamamen hayal mahsulü olan bu eğri, yaklaşık bir asır sonra, pür ve uygulamalı matematikte detaylı olarak yer almıştır. Aynı zamanda hastaların takibinde ortaya çıkan eğrilere benzemektedir. Bu nedenle Patolojik Eğri olarak da adlandırılır. Koch bu eğriyi, kırıkların sayısının artan yaklaşımlar serisinin limiti olarak zihninde tasarladı. Bu eğrinin bitmiş hali sonsuz uzunluktadır, fakat eğrinin sınırladığı alan sonlu büyüklüktedir. Eğrinin tekrarlayan oluşumu aşağıda gösterilmektedir (Zhu and Dong, 2016).



Şekil 4.24. Koch Eğrisi.

Bu inşa hali Cantor Cümlesi'ne benzemektedir. Burada da bir doğru parçası ile başlanılır. Bu doğru parçası 3 eş parçaya ayrılır ve ortadaki alınır. Bir eşkenar üçgen şeklinde dışa doğru tamamlanır. Böylece 4 eş doğru parçasından oluşan bir kırık çizgi elde edilmiş olur. Buna motif veya oluşturucu denir. Eğer öncü doğru parçası 1 uzunluğunda seçilirse, motif her biri $\frac{1}{3}$ uzunluklu 4 parçadan oluşur. Dolayısıyla motifin toplam uzunluğu $\frac{4}{3}$ olur.

Benzer biçimde 4 parçadan her birini öncü kabul ederek aynı işlemle birer motif haline getirilebilir. Böylece (A_2) elde edilir. Son durumda $4 \cdot 4 = 16$ eş doğru parçası yer alır. Bu eğrinin total uzunluğu $\frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ olur. Benzer şekilde 1 adım daha devam edilirse, A_3 adımıda $4^3 = 64$ bulunur ve her birinin uzunluğu $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ olan, eş doğru parçalarından oluşan bir eğri elde edilir. Bu eğrinin toplam uzunluğu

$$64. \frac{1}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

olur.

O halde

$$\frac{\log 4}{\log 3}, \frac{\log 4^2}{\log 3^2}, \frac{\log 4^3}{\log 3^3}, \dots$$

olduğundan (4.2) formülü uygulanabilir.

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)}$$

N : Tekrar sayısı

r : Küçültme çarpanı

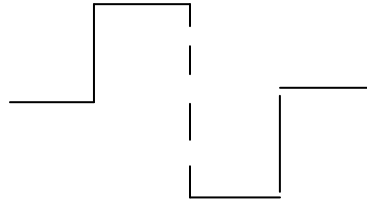
$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

olur. A_0 'ın bütün orta parçalarının limiti, hızlı bir şekilde uzaklaşır ve geriye tam bir Cantor Cümlesi kalır. O halde Koch Eğrisi de kendine benzerdir. Her bir küçük parça bütünü minyatür kopyası olacaktır. Bu nedenle Koch Eğrisi de bir Cantor Cümlesi olacaktır (Barnsley, 1988).

Koch Eğrisi, geniş bir fraktal grubunun prototipidir. Yine bir doğru parçası ele alınır. Sonra da bu doğru parçası 4 eş parçaya bölünür ve ortadaki iki parça 1. adımdaki gibi işlenir.

0.Adım _____ (a) öncü

1.Adım



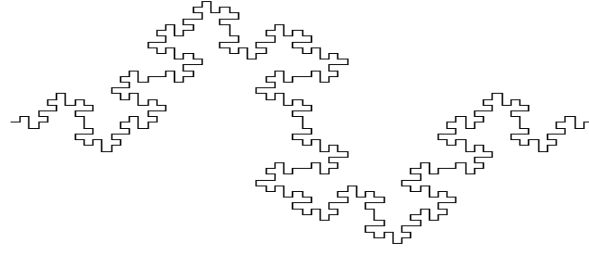
(b) oluşturu (motif)

Şekil 4.25. Minkowski Fraktalı.

Elde edilen motife Minkowski Fraktalı denir.

Burada $r = \frac{1}{4}$ ve $N = 8$ dir.

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log 8}{\log 4} = 1.5$$



Şekil 4.26. Minkowski Fraktalı.

Bu fraktalların boyutları aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 4.4. Fraktal şekillerin boyut-kopya sayısı hesabı

Şekil	Boyut	Kopya sayısı
Kantor Cümlesi	$d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63$	$2 = 3^d$
Koch Eğrisi	$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$	$4 = 3^d$
Minkowski Fraktalı	$d = \frac{\log 8}{\log 4} = 1.5$	$8 = 4^d$

4.6. Hausdorff Boyutu

1919’da Felix Hausdorff, uzayda bir objenin hacmini ölçmek için bir küme kullandı ve daha sonra Hausdorff boyutu adında yeni bir kavram ileri sürdü (Grattan,1994).

Hausdorff boyutu, topolojik boyuttan büyüktür ya da topolojik boyuta eşittir.

$$0 \leq \text{Topolojik boyut} \leq \text{Hausdorff boyutu} \leq 3$$

Bu boyutun hesaplanması pratikte çoğu zaman zordur. Bir eğrinin fraktal boyutunu ölçmenin kolay bir yolu vardır. Buna kutu sayma metodu denir.

4.7. Kutu Sayma Metodu

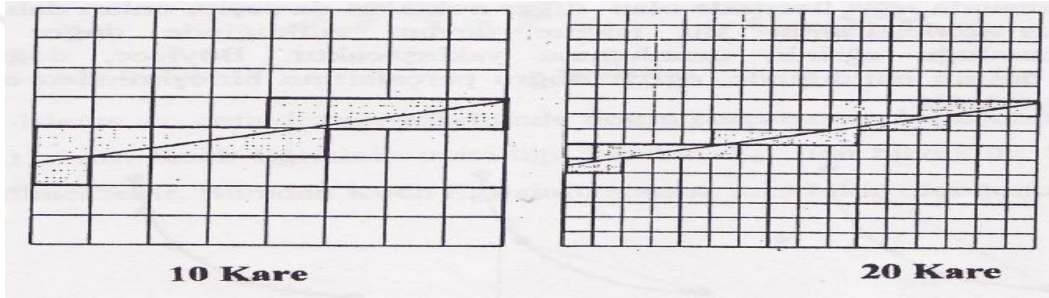
Eğri küçük karelerin bir kafesi ile örtülür ve sonra eğrinin geçtiği kareler sayılır.

Bu metot, kareler giderek küçültülerek tekrarlanır. Ardışık olarak, eğriyi iki defa örtmede kullanılan karelerin sayıları p ve q ise;

$$\frac{\log \frac{p}{q}}{\log 2}$$

değeri fraktal eğrinin fraktal boyutudur (Hacısalıhoğlu, 2006).

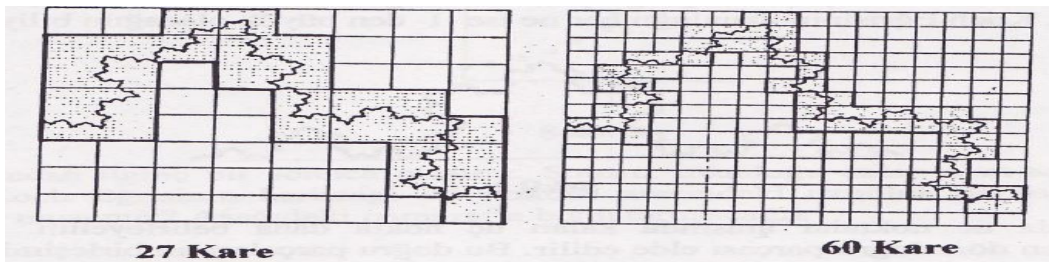
4.8. Örnek: Doğrunun fraktal boyutu 1'dir.



Şekil 4.27. Doğrunun karelerle örtülmesi.

$$\text{Fraktal boyut} = \log (20/10)/\log(2) = 1$$

4.9. Örnek. Julia Cümlesinin boyutu 1.152'dir.



Şekil 4.28. Julia Cümlesi'nin karelerle örtülmesi.

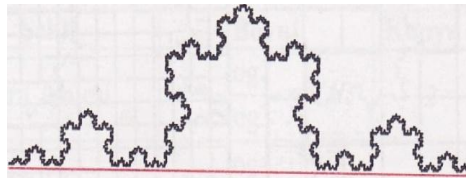
$$\text{Fraktal boyut} = \log (60/27)/\log(2) = 1.152$$

Bir fraktal, standart Öklid teknikleri ile ölçülmek istendiğinde bazı sorunlar ortaya çıkar. Bilinen ve genel olarak, bir eğrinin (aşağıda siyah ile gösterilen) uzunluğunu ölçmede kullanılan metod, eğrinin gittikçe küçülen doğru parçaları (aşağıda kırmızı ile gösterilen) yardımıyla yaklaşık uzunluğunun bulunması metodudur. Metoda, eğri üzerinde iki nokta seçilip, bu noktaları birleştiren doğru parçaları ile başlanır. Bu noktalar arasındaki eğrinin uzunluğu, noktaları birleştiren doğru parçasının uzunluğundan küçük olamaz, o halde doğru parçalarının birleşiminin uzunluğu, eğrinin uzunluğundan küçük veya ona eşittir. Seçilen orijinal noktalar arasında, eğri üzerinde olan diğer noktalar da seçilir ve onlar daha küçük olan doğru parçaları ile birleştirilir. Bu işleme devam edildiğinde doğru parçalarının birleşimlerinin uzunluğu, eğrinin uzunluğuna yaklaşacaktır. Böylece doğru parçaları küçülerek işleme devam edildiğinde, eğriyi doğru parçalarının birleşiminden ayırt etmenin zorlaşacağı görülmektedir (Aydın, 2015).



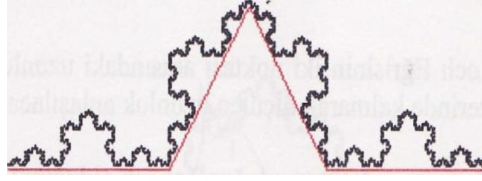
Şekil 4.29. Eğriyi gittikçe küçülen doğru parçaları yardımıyla yaklaşık uzunluğunu hesaplama.

Aynı metod, Koch Eğrisi'nin uzunluğunu ölçmek için kullanılsın. Önce, Koch Eğrisi'nin uç noktalarını birleştiren doğru çizilir. Doğrunun uzunluğu L_0 ile gösterilsin ve $L_0 = 1$ olsun. Koch Eğrisi'nin uzunluğu her ne ise 1'den büyük olacağı aşikardır.



Şekil 4.30. Koch Eğrisi 1. Adım.

Seçilen uç noktalar arasında kalan, üç nokta daha belirlensin. Her biri $\frac{1}{3}$ uzunluğunda olan 4 doğru parçası elde edilir. Bu doğru parçalarının birleşiminin uzunluğu ise $L_1 = \frac{4}{3}$ 'tür.



Şekil 4.31. Koch Eğrisi 2. Adım.

Bu işleme devam edilsin. Her bir nokta çifti arasında kalan 3'er nokta daha belirlensin. Bu, her birinin uzunluğu $\frac{1}{9}$ olan 16 tane küçük doğru parçası verecektir. Tüm bu doğru parçalarının birleşimlerinin uzunluğu $L_2 = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ olur.

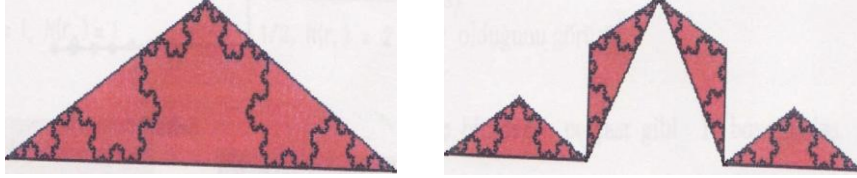


Şekil 4.32. Koch Eğrisi 3. Adım.

Bu işleme n defa devam edildiğinde, doğru parçalarının birleşiminin toplam uzunluğu $L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 'dir. Koch Eğrisinin uzunluğu her bir L_n 'den büyüktür. Burada Koch Eğrisinin sonsuz uzunlukta olduğu görülmektedir.

Eğri çok girintili çıkıntılı olduğu için uzunluğun yerine, kapladığı alana bakılması daha anlamlı olur. O halde Koch Eğrisinin kapladığı alan, ikizkenar üçgenle örtülerek hesaplanılsın. Gittikçe küçülen üçgenlerin kullanılması, Koch Eğrisi'nin alanının daha doğru tahmin edilmesinde yardımcı olacaktır. Önce Koch Eğrisi, tek bir

üçgenle örtülsün (Şekil 4.33). Üçgenin taban uzunluğu 1 ve yüksekliği $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 'dır. Böylece alanı $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}$ 'dir. Koch Eğrisi'nin kapladığı alan, A_0 'dan küçüktür.



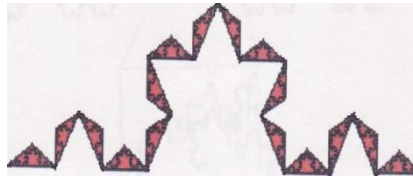
Şekil 4.33. Koch Eğrisi'nin üçgen ile örtülmesi.

Bu üçgen yerine, Koch Eğrisi'ni örten 4 küçük üçgen alınsın (Şekil 4.33). Her bir üçgenin taban uzunluğu ve yüksekliği orjinal üçgeninkinden $\frac{1}{3}$ oranında küçük olacaktır, böylece her birinin alanı da esas üçgene göre $\frac{1}{9}$ oranında küçülecektir. Buradan bu 4 üçgenin toplam alanı, $A_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right)$ olur.

Örtme işi, her bir küçük üçgen yerine daha küçük 4 üçgen ile yapılsın. Yeni üçgenlerin taban ve yükseklikleri, önceki üçgenlerin $\frac{1}{3}$ 'ü kadardır. O halde, bu üçgenlerin alanları, öncekilerin $\frac{1}{9}$ 'u kadar olur. Tüm bu üçgenlerin toplam alanı

$$A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) \cdot \frac{16}{81} = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

olur.



Şekil 4.34. Koch Eğrisi.

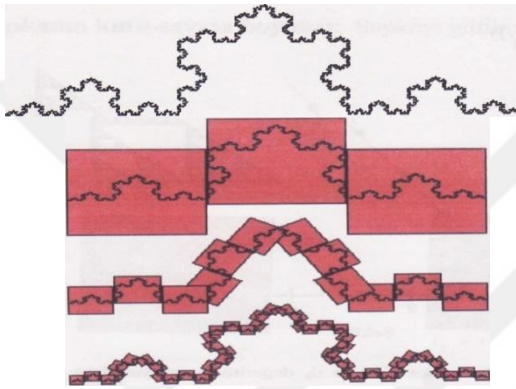
Bu işleme n defa devam edildiğinde toplam alan $A_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$ olarak

bulunur. Koch Eğrisi'nin alanlarının her biri, A_n 'den daha küçüktür. Dolayısıyla Koch Eğrisi'nin kapladığı alan sıfırdır.

Uzunluk 1 boyutlu bir ölçümdür; alan ise 2 boyutlu bir ölçümdür. İkisi de Koch Eğrisi için uygun ölçüm değildir. O halde Koch Eğrisi; 1 boyuttan büyük, 2 boyuttan küçüktür. (Cardona ve ark. 2016).

4.10. Örnek (Koch Eğrisi için kutu-sayma boyutu):

Gitgide küçülen kutularla Koch Eğrisi örtülsün.



$$r_1 = \frac{1}{3}, N(r_1) = 3$$

$$r_2 = 1/9, N(r_2) = 12$$

$$r_3 = 1/27, N(r_3) = 48$$

Şekil 4.35. Koch Eğrisi'nin kutu sayma boyutu.

O halde

$$N(1/3) = 3$$

$$N(1/9) = N((1/3)^2) = 12 = 3 \cdot 4$$

$$N(1/27) = N((1/3)^3) = 48 = 3 \cdot 4^2$$

yazılabilir. Genel olarak;

$$N((1/3)^n) = 3 \cdot 4^{n-1}$$

noktaları işaretlenirse;

$$(\log(1/r_0), \log(N(r_0))), (\log(1/r_1), \log(N(r_1))), (\log(1/r_2), \log(N(r_2))),$$

$$(\log(1/r_3), \log(N(r_3))), \dots$$

elde edilir.

Görüldüğü üzere, noktalar eğimi 1.26 olan bir doğru üzerinde yer alırlar. O halde Koch Eğrisinin boyutu 1.26'dır.

$N((1/3)^n) = 3 \cdot 4^{n-1}$ bağıntısından d_b 'nin tam değeri, Koch Eğrisi için de

hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\log(N(\frac{1}{3})^n)}{\log(1/(\frac{1}{3})^n)} \\
 &= \log(3 \cdot 4^{n-1}) / \log(3^n) \\
 &= ((n-1)\log(4) + \log(3)) / (n\log(3)) \\
 &= (n\log(4) - \log(4) + \log(3)) / (n\log(3)) \\
 &= (n\log(4)) / (n\log(3)) - \log(4) / (n\log(3)) + \log(3) / (n\log(3)) \\
 &= (n\log(4)) / (n\log(3)) + (1/n)(-\log(4)/\log(3) + \log(3)/\log(3))
 \end{aligned}$$

ve bu şekilde $n \rightarrow \infty$ için $\log(4)/\log(3) = 1.26186$ olur. Böylece Koch Eğrisi için boyut, $d_b = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26186$ 'dır.

Bir şeklin uzunluğu $n \rightarrow \infty$ için $N(r_n) r_n$ ile ve alanı ise $n \rightarrow \infty$ için $N(r_n) r_n^2$ ile ölçülüyordu. O halde d boyutlu bir şeklin ölçülmesi için, $n \rightarrow \infty$ için $N(r_n) r_n^d$ 'nin kullanılması gerektiği düşünülebilir.

Eğriler, Koch Eğrisi'nin boyutunun 1.2 ve 1.3 arasında olduğu gerçeğini doğrulamaktadır (Benoit, 1982).

4.8. Moran Denklemi

Benzerlik boyutunu veren $d_s = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$ formülü, tüm parçaları aynı ölçekli, kendine benzer fraktallara uygulanabilir.

Farklı ölçekli olan kendine benzer bir fraktal şekil ele alınsın. Fraktal ölçekleri $r_1, r_2, \dots, r_N$ şeklinde N parçaya bölünsün. Benzerlik boyutu formülü genelleştirilir. Bu formül, her bir ölçeği diğerinden ayırt edecek şekilde yeniden yazılmalıdır. Ancak r 'nin, r_i değerleri değiştirilebilir. $d = d_s$ alınsın,

$$d = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$$

ifadesi

$$d \log(1/r) = \log(N)$$

yazılabilir.

$$1 = N \cdot r^d$$

Böylece fraktal bölündüğünde her bir kopya için aynı r 'yi veren

$$1 = r^d + \dots + r^d$$

ifadesi elde edilir. Her bir r kopyası için r_i alınır, d benzerlik boyutu aşağıda verilen eşitliği sağlar.

$$1 = r_1^d + \dots + r_N^d$$

Bu ifade Moran Denklemi'dir. Her bir r_i , $0 < r_i < 1$ olduğu sürece, Moran Denklemi'nin çözümü tektir ve bu çözüm $d = d_s$ benzerlik boyutudur.

Çözümün tekliği aşağıda hesaplanmıştır.

$$1 = r_1^d + \dots + r_N^d$$

nin $0 < r_1 < 1, \dots, ve 0 < r_N < 1$ 'da çözümün tek olduğunun gösterilmesi için

$$f(d) = r_1^d + \dots + r_N^d$$

fonksiyonu ele alınsın.

Burada $f(0) = r_1^0 + \dots + r_N^0 = 1 + \dots + 1 = N$ olduğu görülür. İkinci olarak $d \rightarrow \infty$ için $f(d) \rightarrow 0$ 'dır. Bunun sebebi her $r_i < 1$ ve $0 < r_i$ olduğundan $d \rightarrow \infty$ her bir $r_i \rightarrow 0$ olacaktır. Üçüncü olarak $f(d)$ 'nin grafiği sürekli azalandır.

Türevi;

$$f'(d) = r_1^d \cdot \ln(r_1) + \dots + r_N^d \ln(r_N)$$

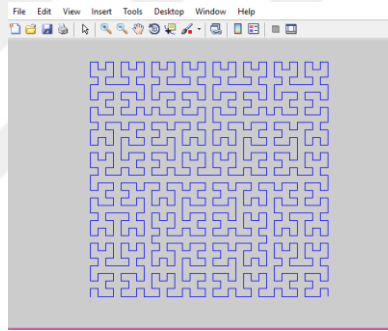
dir. $0 < r_i < 1$ olduğundan, her bir $\ln(r_i) < 0$, ve $f'(d) < 0$ 'dır.

Örnek olarak, $N = 4$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1/2$ ve $r_4 = 1/4$ için $y = f(d)$ nin grafiğinin, $y = 1$ için $d = 1.72368$ 'de kestiğine dikkat edilmelidir. Bu değer, bu ölçeklere göre fraktalların benzerlik boyutudur (Ufuktepe ve Aslan, 2002).

5. BAZI FRAKTAL ŞEKİLLERİN MATLAB KODLARI

Bu bölümde, bazı bilinen fraktalların çizimi için yazılan matlab kodlarına ait m/file'lar ve ilgili fraktalın grafik çıktıları verilecektir.

5.1. Hilbert Uzay Dolduran Eğri



Şekil 5.1. Hilbert Uzay Dolduran Eğri.

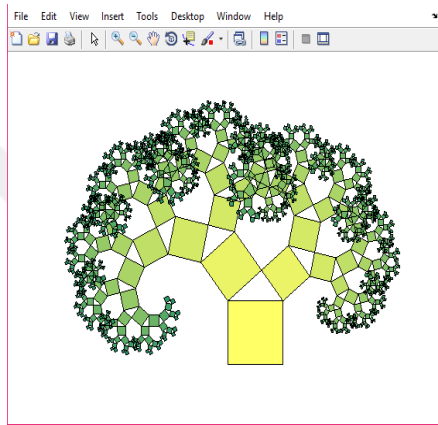
```
function [x,y] = hilbert(n)
if nargin ~= 1
n = 6;
end
if n <= 0
x = 0;
y = 0;
else
[x0,y0] = hilbert(n-1);
x = .5*[-.5+y0 -.5+x0 .5+x0 .5-y0];
```

```

y = .5*[-.5+x0 .5+y0 .5+y0 -.5-x0];
end
pause(2)
plot(x,y,'-');
axis off;
(Lundgren, 2010).

```

5.2. Pisagor Ağacı



Şekil 5.2. Pisagor Ağacı.

```

function M = Pythagor_tree(m,n,Colormap)
narg = nargin;
if narg <= 2
    Colormap = 'summer';
if narg <= 1
n = 12;
if nargin == 0
m = 0.8;
end
end
end
if m <= 0
    error(['mfilename ':e0'],'Length of m has to be greater than zero');

```

```

end
if rem(n,1)~=0
    error([mfilename ':e0'], 'The number of level has to be integer');
end
if ~iscolormap(Colormap)
    error([mfilename ':e1'], 'Input colormap is not valid');
end
d    = sqrt(1+m^2);
c1   = 1/d;
c2   = m/d;
T    = [0 1/(1+m^2); 1 1+m/(1+m^2)];
alpha1 = atan2(m,1);
alpha2 = alpha1-pi/2;
pi2    = 2*pi;
nEle   = 2^(n+1)-1;
M      = zeros(nEle,5);
M(1,:) = [0 -1 0 1 1];
Offset = 0;
for i = 0:n
    tmp = 2^i;
    M(Offset+(1:tmp),5) = i;
    Offset = Offset + tmp;
end
for i = 2:2:(nEle-1)
    j    = i/2;
    mT    = M(j,4) * mat_rot(M(j,3)) * T;
    Tx    = mT(1,:) + M(j,1);
    Ty    = mT(2,:) + M(j,2);
    theta1 = rem(M(j,3)+alpha1,pi2);
    theta2 = rem(M(j,3)+alpha2,pi2);
    M(i ,1:4) = [Tx(1) Ty(1) theta1 M(j,4)*c1];
    M(i+1,1:4) = [Tx(2) Ty(2) theta2 M(j,4)*c2];

```

```

end
Pythagor_tree_plot(M,n);
Pythagor_tree_write2svg(m,n,Colormap,M);
function Pythagor_tree_write2svg(m,n,Colormap,M)
Display_metadata = true;
nEle = size(M,1);
r2 = sqrt(2);
LOffset = M(nEle,4) + 0.1;
min_x = min(M(:,1)-r2*M(:,4)) - LOffset;
max_x = max(M(:,1)+r2*M(:,4)) + LOffset;
min_y = min(M(:,2)) - LOffset;
max_y = max(M(:,2)+r2*M(:,4)) + LOffset;
ColorM = zeros(n+1,3);
eval(['ColorM = flipud(' Colormap '(n+1));']);
co = 100;
Wfig = ceil(co*(max_x-min_x));
Hfig = ceil(co*(max_y-min_y));
filename = ['Pythagoras_tree_1_' strep(num2str(m),',' '_') '_ '...
           num2str(n) '_ ' Colormap '.svg'];
fid = fopen(filename, 'wt');
fprintf(fid, '<?xml version="1.0" encoding="UTF-8" standalone="no"?>\n');
if ~Display_metadata
    fprintf(fid, '<!DOCTYPE svg PUBLIC "-//W3C//DTD SVG 1.1//EN"\n');
    fprintf(fid, ' "http://www.w3.org/Graphics/SVG/1.1/DTD/svg11.dtd">\n');
end
fprintf(fid, '<svg width="%d" height="%d" version="1.1"\n', Wfig, Hfig);
if Display_metadata
    fprintf(fid, '\txmlns:dc="http://purl.org/dc/elements/1.1/"\n');
    fprintf(fid, '\txmlns:cc="http://creativecommons.org/ns#"\n');
    fprintf(fid, ['\txmlns:rdf="http://www.w3.org/1999/02/22'...
'-rdf-syntax-ns#'\n']);
end

```

```

fprintf(fid, '\txmlns:svg="http://www.w3.org/2000/svg"\n');
fprintf(fid, '\txmlns="http://www.w3.org/2000/svg"\n');
fprintf(fid, '\txmlns:xlink="http://www.w3.org/1999/xlink">\n');
if Display_metadata
    fprintf(fid, '\t<title>Pythagoras tree</title>\n');
    fprintf(fid, '\t<metadata>\n');
    fprintf(fid, '\t\t<rdf:RDF>\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t<cc:Work\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\ttrdf:about="">\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t<dc:format>image/svg+xml</dc:format>\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t<dc:type\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://purl.org/dc/dcmitype/StillImage" />\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t<dc:title>Pythagoras tree</dc:title>\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t<dc:creator>\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t<cc:Agent>\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t\t<dc:title>Guillaume Jacquenot</dc:title>\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t\t</cc:Agent>\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t</dc:creator>\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t<cc:license\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/"
/>\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t</cc:Work>\n');
    fprintf(fid, '\t\t<cc:License\n');
    fprintf(fid, '\t\t\ttrdf:about="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/">\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t<cc:permits\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://creativecommons.org/ns#Reproduction" />\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t<cc:permits\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://creativecommons.org/ns#Reproduction" />\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t\t<cc:permits\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://creativecommons.org/ns#Distribution" />\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t\t<cc:requires\n');
    fprintf(fid, '\t\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://creativecommons.org/ns#Notice" />\n');

```

```

fprintf(fid,'\t\t\t\t<cc:requires\n');
fprintf(fid,'\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://creativecommons.org/ns#Attribution" />\n');
fprintf(fid,'\t\t\t\t<cc:prohibits\n');
fprintf(fid,'\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://creativecommons.org/ns#CommercialUse"
/>\n');
fprintf(fid,'\t\t\t\t<cc:permits\n');
fprintf(fid,'\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://creativecommons.org/ns#DerivativeWorks"
/>\n');
fprintf(fid,'\t\t\t\t<cc:requires\n');
fprintf(fid,'\t\t\t\t\ttrdf:resource="http://creativecommons.org/ns#ShareAlike" />\n');
fprintf(fid,'\t\t\t\t</cc:License>\n');
fprintf(fid,'\t\t</rdf:RDF>\n');
fprintf(fid,'\t</metadata>\n');
end
fprintf(fid,'\t<defs>\n');
fprintf(fid,'\t\t<rect width="%d" height="%d" \n',co,co);
fprintf(fid,'\t\t\ttx="0" y="0"\n');
fprintf(fid,'\t\t\tstyle="fill-opacity:1;stroke:#00d900;stroke-opacity:1"\n');
fprintf(fid,'\t\t\tid="squa"\n');
fprintf(fid,'\t\t/> \n');
fprintf(fid,'\t</defs>\n');
fprintf(fid,'\t<g transform="translate(%d %d) rotate(180) " >\n',...
        round(co*max_x),round(co*max_y));
for i = 0:n
    fprintf(fid,'\t\t<g style="fill:##s;" >\n',...
            generate_color_hexadecimal(ColorM(i+1,:)));
    Offset = 2^i-1;
    for j = 1:2^i
        k = j + Offset;
        fprintf(fid,['\t\t\t\t<use xlink:href="#squa" ',...
            'transform="translate(%+010.5f %+010.5f)'...
            ' rotate(%+010.5f) scale(%8.6f)" />\n'],...

```

```

        co*M(k,1),co*M(k,2),M(k,3)*180/pi,M(k,4));
end
    fprintf(fid,'\t\t</g>\n');
end
fprintf(fid,'\t</g>\n');
fprintf(fid,'</svg>\n');
fclose(fid);
function M = mat_rot(x)
c = cos(x);
s = sin(x);
M=[c -s; s c];
function H = Pythagor_tree_plot(D,ColorM)
if numel(ColorM) == 1
    ColorM = flipud(summer(ColorM+1));
end
H = figure('color','w');
hold on
axis equal
axis off
for i=1:size(D,1)
    cx  = D(i,1);
    cy  = D(i,2);
    theta = D(i,3);
    si  = D(i,4);
    M    = mat_rot(theta);
    x    = si*[0 1 1 0 0];
    y    = si*[0 0 1 1 0];
    pts  = M*[x;y];
    fill(cx+pts(1,:),cy+pts(2,:),ColorM(D(i,5)+1,:));
    pause(0.01)
end
function Scolor = generate_color_hexadecimal(color)

```

```

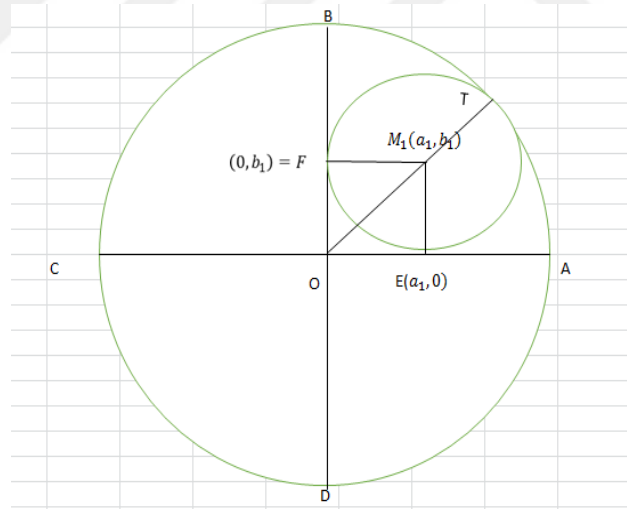
Scolor = '000000';
for i=1:3
c = dec2hex(round(255*color(i)));
if numel(c)==1
    Scolor(2*(i-1)+1) = c;
else
    Scolor(2*(i-1)+(1:2)) = c;
end
end
function res = iscolormap(cmap)
LCmap = {...
'autumn'
'bone'
'colorcube'
'cool'
'copper'
'flag'
'gray'
'hot'
'hsv'
'jet'
'lines'
'pink'
'prism'
'spring'
'summer'
'white'
'winter'
};
res = ~isempty(strmatch(cmap,LCmap,'exact'));
(Jacquenot, 2010).

```

6. YENİ BİR FRAKTAL TAKDİMİ

6.1. $S^1/4$ Çembersel Fraktal

Bu bölümde, yeni bir fraktal takdimi yapılacaktır. Algoritmik olarak, alınan bir çemberin dört eşit parçaya bölünmesi ve oluşan her bir parçanın sınırlarına teğet olan dört yeni çemberin çizilmesi şeklinde ifade edilecektir. Aynı zamanda, bir fonksiyonun ardışık tekrarlanmasını esas alan bir fraktal tanımlanacaktır.



Şekil 6.1. Çember Formu.

Fraktalın oluşturulması:

1. $S^1_r(0,0)$ merkezli çember çizilir.
2. $S^1_r(0,0)$ çemberi merkezden geçen x ve y eksenine paralel (ki ilk adımda eksenlerin kendileridirler) doğrularla 4 parçaya ayrılır. Bu parçalama sonunda oluşan

bölgelerin şekildeki bilgilerle şöyledir.

I: OAB bölgesi,

II: OBC bölgesi,

III: OCD bölgesi ve

IV: ODA bölgesi.

Her bir bölge, kenarlarından ikisi doğru parçası ve üçüncüsü çember yayıdır. Her bir bölgede, sınır eğrilerine teğet olan çemberler çizilsin. I. bölgedeki detaylı incelenecektir. Diğer bölgelerdeki çemberler de, değişen merkezin bileşenlerinin işaretidir.

$M_1(a, b)$ merkez noktanın, x – eksenine, y – eksenine ve T teğet noktasına olan uzaklıkları eşittir. İşlemler sırasında fazla indisin kullanılmaması için, $x = a_1$ ve $y = b_1$ yazılacaktır.

$$d(M, x - eks) = y$$

$$d(M, y - eks) = x \text{ ve } x = y \text{ dir.}$$

$$d^2(M, T) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}r\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}r\right)^2 \text{ dir.}$$

$$d(M, T) = d(M, x) = d(M, y - eks)$$

eşitliğinden;

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}r\right)^2 + \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}r\right)^2 = x^2$$

$$x^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}rx + r^2 = 0 \quad (6.1)$$

İkinci derece denklemi elde edilir. (6.1) denkleminin kökleri

$$x_{1,2} = r(\sqrt{2} \pm 1)$$

dır.

$r(\sqrt{2} + 1) > \frac{r}{2}$ olduğundan bu kök alınmaz. Böylece, M 'nin bileşenleri

$x = r(\sqrt{2} - 1)$, $y = r(\sqrt{2} - 1)$ ve iç teğet çemberin yarıçapı $r(\sqrt{2} - 1)$ 'dir. Şekildeki indislere dönülecek olursa,

$$M_1(a_1, b_1) = M_1\left(r(\sqrt{2} - 1), r(\sqrt{2} - 1)\right), r_1 = r(\sqrt{2} - 1)$$

yazılabilir.

II, III ve IV. bölgelerdeki çemberler için; yarıçaplar

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r(\sqrt{2} - 1)$ ve merkezler;

$$K_1(a_1, b_1) = (-r(\sqrt{2} - 1), r(\sqrt{2} - 1))$$

$$L_1(a_1, b_1) = (-r(\sqrt{2} - 1), -r(\sqrt{2} - 1))$$

$$N_1(a_1, b_1) = (r(\sqrt{2} - 1), -r(\sqrt{2} - 1))$$

şeklinde bellidir.

I. bölgede ve ilk iç teğet çember için yapılan işlemlerden görüldüğü gibi r yarıçapı, işlemlerde değişken değildir. İşlemi yönlendiren $\sqrt{2} - 1$ çarpanıdır. Eğer

$k = \sqrt{2} - 1$ yazılırsa,

$$r_1 = k.r$$

dir.

İlk çember için yapılan işlemler, $S^1_{M_1}(r_1)$ çemberi için tekrarlanırsa,

$$r_2 = r_1.k = r.k.k = r.k^2$$

ve merkez bileşenleri için, ikinci çemberin I. bölgesinde,

$$M_2(a_2, b_2) = (rk + r_1k, rk + r_1k)$$

ve

$$r_2 = rk^2$$

yazılabilir.

Hep I. bölgelerde çalışmak kaydıyla, merkezler dizini,

$$M_1(a_1, b_1) = (rk, rk)$$

$$M_2(a_2, b_2) = (rk + r_1k, rk + r_1k)$$

$$M_3(a_3, b_3) = (rk + r_1k + r_2k, rk + r_1k + r_2k)$$

.

.

.

$$M_n(a_n, b_n) = (rk + \sum_{i=1}^{n-1} r_i k, rk + \sum_{i=1}^{n-1} r_i k)$$

ve yarıçaplar için;

$$r = r$$

$$r_1 = rk$$

$$r_2 = r_1 k = r \cdot k \cdot k = rk^2$$

$$r_3 = r_2 k = r \cdot k^2 \cdot k = rk^3$$

.

.

.

$$r_n = r_{n-1} k = rk^n$$

yazılabilir.

Buraya kadar yapılanlar, II, III ve IV bölgelerde tekrarlanabilir. İşlemleri yönlendiren x ve y 'nin negatif veya azalan değerleridir.

II. bölge için incelenecek olursa;

$$K_1(a_1, b_1) = K_1(-r(\sqrt{2} - 1), r(\sqrt{2} - 1)), r_1 = r(\sqrt{2} - 1)$$

$$k = \sqrt{2} - 1$$

yazılırsa,

$$r_1 = k \cdot r$$

dir.

İlk çember için yapılan işlemler, $S^1_{K_1}(r_1)$ çemberi için tekrarlanırsa,

$$r_2 = r_1 \cdot k = r \cdot k \cdot k = r \cdot k^2$$

ve merkez bileşenleri için, ikinci çemberin II. bölgesinde,

$$K_2(a_2, b_2) = (rk + r_1 k, rk + r_1 k)$$

K'nın bileşenleri

$x = -r(\sqrt{2} - 1)$, $y = r(\sqrt{2} - 1)$ ve iç teğet çemberin yarıçapı $r(\sqrt{2} - 1)$ dir.

Şekildeki indislere dönecek olursak,

$$K_1(a_1, b_1) = K_1\left(-r(\sqrt{2}-1), r(\sqrt{2}-1)\right), r_1 = r(\sqrt{2}-1)$$

Hep II. bölgelerde çalışmak kaydıyla, merkezler dizini,

$$K_1(a_1, b_1) = (-rk, rk)$$

$$K_2(a_2, b_2) = (-(rk + r_1k), rk + r_1k)$$

$$K_3(a_3, b_3) = (-(rk + r_1k + r_2k), rk + r_1k + r_2k)$$

.

.

.

$$K_n(a_n, b_n) = (-(rk + \sum_{i=1}^{n-1} r_i k), rk + \sum_{i=1}^{n-1} r_i k)$$

yazılabilir.

III. bölge için incelenecek olursa;

$$L_1(a_1, b_1) = L_1\left(-r(\sqrt{2}-1), -r(\sqrt{2}-1)\right), r_1 = r(\sqrt{2}-1)$$

$$k = \sqrt{2}-1$$

yazılırsa,

$$r_1 = k.r$$

dir.

İlk çember için yapılan işlemler, $S^1_{L_1}(r_1)$ çemberi için tekrarlanırsa,

$$r_2 = r_1.k = r.k.k = r.k^2$$

ve merkez bileşenleri için, ikinci çemberin III. bölgesinde,

$$L_2(a_2, b_2) = (rk + r_1k, rk + r_1k)$$

L'nin bileşenleri

$x = -r(\sqrt{2}-1)$, $y = -r(\sqrt{2}-1)$ ve iç teğet çemberin yarıçapı $r(\sqrt{2}-1)$ 'dir.

Şekildeki indislere dönülecek olursa,

$$L_1(a_1, b_1) = L_1\left(-r(\sqrt{2}-1), -r(\sqrt{2}-1)\right), r_1 = r(\sqrt{2}-1)$$

Hep III. bölgelerde çalışmak kaydıyla, merkezler dizini,

$$L_1(a_1, b_1) = (-rk, -rk)$$

$$L_2(a_2, b_2) = (-(rk + r_1k), -(rk + r_1k))$$

$$L_3(a_3, b_3) = (-(rk + r_1k + r_2k), -(rk + r_1k + r_2k))$$

.

.

.

$$L_n(a_n, b_n) = (-(rk + \sum_{i=1}^{n-1} r_ik), -(rk + \sum_{i=1}^{n-1} r_ik))$$

yazılabilir.

IV. bölge için incelenecek olursa;

$$N_1(a_1, b_1) = N_1(r(\sqrt{2} - 1), -r(\sqrt{2} - 1)), r_1 = r(\sqrt{2} - 1)$$

$$k = \sqrt{2} - 1$$

yazılırsa,

$$r_1 = k.r$$

dir.

İlk çember için yapılan işlemler, $S^1_{N_1}(r_1)$ çemberi için tekrarlanırsa,

$$r_2 = r_1.k = r.k.k = r.k^2$$

ve merkez bileşenleri için, ikinci çemberin IV. bölgesinde,

$$N_2(a_2, b_2) = (rk + r_1k, -(rk + r_1k))$$

N'nin bileşenleri

$x = r(\sqrt{2} - 1)$, $y = -r(\sqrt{2} - 1)$ ve iç teğet çemberin yarıçapı $r(\sqrt{2} - 1)$ 'dir.

Şekildeki indislere dönülecek olursa,

$$N_1(a_1, b_1) = N_1(r(\sqrt{2} - 1), -r(\sqrt{2} - 1)), r_1 = r(\sqrt{2} - 1)$$

Hep IV. bölgelerde çalışmak kaydıyla, merkezler dizini,

$$N_1(a_1, b_1) = (rk, -rk)$$

$$N_2(a_2, b_2) = (rk + r_1k, -(rk + r_1k))$$

$$N_3(a_3, b_3) = (rk + r_1k + r_2k, -(rk + r_1k + r_2k))$$

.

.

.

$$N_n(a_n, b_n) = (rk + \sum_{i=1}^{n-1} r_ik, -(rk + \sum_{i=1}^{n-1} r_ik))$$

yazılabilir.

$r(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ koordinatları kullanılarak, iki nokta arasındaki uzaklık formülünden;

$$(x - \frac{r}{\sqrt{2}})^2 + (y - \frac{r}{\sqrt{2}})^2 = x^2 \quad (6.2)$$

(6.2) denkleminde;

$$\begin{aligned} x^2 - 2x\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2} + y^2 - 2y\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2} &= x^2 \\ -2x\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2} + y^2 - 2y\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2} &= 0 \\ y^2 - 2\frac{r}{\sqrt{2}}(x + y) + r^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

ikinci derece denklem elde edilir. Daha sonra (6.2) eşitliği y^2 'ye eşitlenirse;

$$(x - \frac{r}{\sqrt{2}})^2 + (y - \frac{r}{\sqrt{2}})^2 = y^2 \quad (6.4)$$

$$x^2 - 2x\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2} + y^2 - 2y\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2} = y^2$$

$$x^2 - 2x\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2} - 2y\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2} = 0$$

$$x^2 - 2\frac{r}{\sqrt{2}}(x + y) + r^2 = 0 \quad (6.5)$$

ikinci derece denklem elde edilir.

(6.3) ve (6.5) denklemleri ele alınsın:

$$y^2 - 2\frac{r}{\sqrt{2}}(x + y) + r^2 = 0$$

$$x^2 - 2\frac{r}{\sqrt{2}}(x + y) + r^2 = 0$$

Ele alınan bu denklemlerde ortak çözüm yapılırsa:

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y \quad (6.6)$$

$$\Rightarrow x = -y \quad (6.7)$$

eşitlikleri elde edilir.

(6.6) denklemini, (6.3) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} y^2 - 2\frac{r}{\sqrt{2}}(y + y) + r^2 &= 0 \\ y^2 - 4y\frac{r}{\sqrt{2}} + r^2 &= 0 \\ y^2 - 2\sqrt{2}yr + r^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

eşitliği elde edilir.

(6.7) eşitliği. (6.5) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} x^2 - 2\frac{r}{\sqrt{2}}(x + x) + r^2 &= 0 \\ x^2 - 2\sqrt{2}xr + r^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu denklemin kökleri aşağıdaki şekilde hesaplanarak bulunur.

$$\begin{aligned} \Delta &= (2r\sqrt{2})^2 - 4r^2 = 8r^2 - 4r^2 = 4r^2 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2r\sqrt{2} \pm \sqrt{4r^2}}{2} = \frac{2r\sqrt{2} \pm 2r}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= r(\sqrt{2} + 1) \\ \Rightarrow x_2 &= r(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Bulunan x_1 ve x_2 kökleri çemberin yarıçapını gösterir.

(6.8) ve (6.9) denklemleri göz önüne alındığı zaman :

$$\begin{aligned} y^2 - 2\sqrt{2}yr + r^2 &= 0 \\ x^2 - 2\sqrt{2}xr + r^2 &= 0 \\ x^2 - 2\sqrt{2}xr + r^2 - y^2 + 2\sqrt{2}yr - r^2 &= 0 \\ x^2 - y^2 - 2r\sqrt{2}(x - y) &= 0 \\ (x - y) + (x + y) - 2r\sqrt{2}(x - y) &= 0 \\ (x - y)(x + y - 2r\sqrt{2}) &= 0 \\ \Rightarrow x &= y \\ \Rightarrow x + y - 2r\sqrt{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 2r\sqrt{2} - y$$

$$x = y$$

olduğundan :

$$\Rightarrow 2x = 2r\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = r\sqrt{2}$$

eşitliği elde edilir.

(6.7) denklemi (6.3)'te yerine yazılırsa:

$$\Rightarrow y^2 - 2 \frac{r}{\sqrt{2}} (-y + y) + r^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + r^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -r^2$$

$$\Rightarrow x^2 = i^2 r^2$$

$$\Rightarrow x = ir$$

(6.7) denklemi, (6.5)'te yerine yazılırsa:

$$\Rightarrow x^2 - 2 \frac{r}{\sqrt{2}} (-y + y) + r^2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + r^2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = -r^2$$

$$\Rightarrow y^2 = i^2 r^2$$

$$\Rightarrow y = ir$$

eşitliği elde edilir.

6.1.1. $S^{1/4}$ çembersel fraktalın fraktal boyutu

Fraktal boyutun hesaplanabilmesi için k küçültme çarpanı ve N tekrar sayısının bilinmesi gerekir.

Çizelge 6.1. Çember sayısı

Çember Sayısı
$\zeta_1 = 4^0 = 1$ tane çember
$\zeta_2 = 4^1$ tane çember
$\zeta_3 = 4^2$ tane çember
$\zeta_4 = 4^3$ tane çember
.
.
.
$\zeta_n = 4^{n-1}$ tane çember
$\zeta_{n+1} = 4^n$ tane çember

Çizelge 6.1. incelendiği zaman, çember sayılarının belli bir iterasyonla arttığı görülebilir. Küçültme çarpanı ise

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r(\sqrt{2}-1)^2}{r(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{2} - 1) \quad (6.10)$$

(6.2) eşitliği ile hesaplanır.

O halde (Çizelge 6.1) ve (Çizelge 6.3) eşitliği yardımıyla fraktal şeklin fraktal boyutu, aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\text{Küçültme çarpanı: } k = (\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{Tekrar sayısı: } N = 4$$

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{(\sqrt{2}-1)}} = \frac{\log 4}{\log(\sqrt{2}+1)} = \frac{0,6020599913}{0,3827756853} = 1,5728794028$$

6.1.2. Yarıçaplar dizisi

Yarıçaplar dizisi bir geometrik dizidir ve iterasyonun katsayısı yani geometrik dizi çarpanı $(\sqrt{2} - 1)$ 'dir. İlk terim $r_1 = r(\sqrt{2} - 1)$ ile başlar. İkinci adımın bulunabilmesi için, birinci adımdaki veriler kullanılarak işleme devam edilir. Diğer adımlar da bir önceki adıma bağlı olarak devam eder ve böylece genel bir ifadeye ulaşılır.

$$r_1 = r(\sqrt{2} - 1)$$

$$r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$r_3 = r_2(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1)^3$$

$$r_4 = r_3(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1)^4$$

.

.

.

$$r_{n-1} = r_{n-2}(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1) \dots (\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1)^{n-1}$$

$$r_n = r_{n-1}(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1) \dots (\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1)^n$$

$$r_{n+1} = r_n(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1) \dots (\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} - 1)^{n+1}$$

6.1.3. Çevre dizisi

Çemberin çevre formülü $\zeta = 2\pi r$ 'dir. Yarıçaplar bir önceki adımın $(\sqrt{2} - 1)$ katı olacak şekilde işleme devam edilir ve böylece genel bir ifadeye ulaşılır.

$$\zeta = 2\pi r$$

$$\zeta_1 = 2\pi r(\sqrt{2} - 1)$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= 2\pi r(\sqrt{2} - 1)^2 \\
\zeta_3 &= 2\pi r(\sqrt{2} - 1)^3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\zeta_{n-1} &= 2\pi r(\sqrt{2} - 1)^{n-1} \\
\zeta_n &= 2\pi r(\sqrt{2} - 1)^n \\
\zeta_{n+1} &= 2\pi r(\sqrt{2} - 1)^{n+1}
\end{aligned}$$

6.1.4. Alan dizisi

Çemberin sınırladığı bölge olan dairenin alan formülü, $A = \pi r^2$ 'dir. Yarıçap değeri, bir önceki adımdan yararlanılarak formülde yerine yazıldığında, genel bir ifadeye ulaşılır.

$$\pi r^2$$

$$A_1 = \pi[r(\sqrt{2} - 1)]^2 = \pi r^2(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$A_2 = \pi[(r(\sqrt{2} - 1))^2]^2 = \pi r^2(\sqrt{2} - 1)^4$$

$$A_3 = \pi[(r(\sqrt{2} - 1))^3]^2 = \pi r^2(\sqrt{2} - 1)^6$$

·

·

·

$$A_{n-1} = \pi[(r(\sqrt{2} - 1))^{n-1}]^2 = \pi r^2(\sqrt{2} - 1)^{2n-2}$$

$$A_n = \pi[(r(\sqrt{2} - 1))^n]^2 = \pi r^2(\sqrt{2} - 1)^{2n}$$

$$A_{n+1} = \pi[(r(\sqrt{2} - 1))^{n+1}]^2 = \pi r^2(\sqrt{2} - 1)^{2n+2}$$

Fraktal şeklin, alan ve çevre hesabı arasında bir bağıntı vardır. Bu bağıntının hesaplanabilmesi için alan ve çevre hesabında bulunan genel ifadeler birbirine oranlanır.

$$\frac{\text{Alan}}{\text{Çevre}} = \frac{A_n}{\zeta_n} = \frac{\pi r^2(\sqrt{2} - 1)^{2n}}{2\pi r(\sqrt{2} - 1)^n} = \frac{r(\sqrt{2} - 1)^{2n}}{2(\sqrt{2} - 1)^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{A_{n+1}}{A_n} &= \frac{\pi r^2 (\sqrt{2}-1)^{2n+2}}{2\pi r (\sqrt{2}-1)^{2n}} = (\sqrt{2}-1)^2 = (0.4142135624)^2 \\ &= 0.1715728753\end{aligned}$$

Fraktal şeklin; yarıçap, çevre ve alan değerleri belli bir iterasyon ile hesaplandı. Yapılan bu hesaplamalar, yarıçap dizisi, çevre dizisi ve alan dizisi adı altında incelenmiştir.

6.1.5. Çember formunun yarıçaplarının toplamı

(6.8) eşitliği yardımıyla yarıçap $x_1 = r(\sqrt{2}-1)$ olarak hesaplanmıştır. Yarıçap değerleri, belli bir iterasyona sahip olduğu için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}& r(\sqrt{2}-1) + r(\sqrt{2}-1)^2 + r(\sqrt{2}-1)^3 + \dots + r(\sqrt{2}-1)^{n-1} + r(\sqrt{2}-1)^n + \\ & r(\sqrt{2}-1)^{n+1} \\ &= r(\sqrt{2}-1)[1 + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}-1)^3 + \dots + (\sqrt{2}-1)^{n-2} + \\ & (\sqrt{2}-1)^{n-1} + (\sqrt{2}-1)^n] \\ & \quad \sqrt{2}-1 = k\end{aligned}$$

olsun;

$$\begin{aligned}&= rk(1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^{n-2} + k^{n-1} + k^n) \\ &= rk \frac{1-k^{n+1}}{1-k}\end{aligned}$$

6.1.6. Çember formunun çevrelerinin toplamı

Fraktal şeklin çevrelerinin her bir adımı daha önce hesaplanmıştır. Hesaplanan bu değerlerin toplamı aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}& \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots + \zeta_{n-1} + \zeta_n + \zeta_{n+1} \\ &= 2\pi r(\sqrt{2}-1) + 2\pi r(\sqrt{2}-1)^2 + 2\pi r(\sqrt{2}-1)^3 + \dots + 2\pi r(\sqrt{2}-1)^{n-1} + \\ & 2\pi r(\sqrt{2}-1)^n + 2\pi r(\sqrt{2}-1)^{n+1} \\ &= 2\pi r(\sqrt{2}-1)[1 + \sqrt{2}-1 + (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}-1)^3 + \dots + (\sqrt{2}-1)^{n-2} + \\ & (\sqrt{2}-1)^{n-1} + (\sqrt{2}-1)^n]\end{aligned}$$

işlemlerde kolaylık olması açısından $\sqrt{2}-1 = k$ yazılsın. O halde

$$\begin{aligned}
&= 2\pi r k(1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^{n-2} + k^{n-1} + k^n) \\
&= 2\pi r k \frac{1-k^n}{1-k} = 2\pi r (\sqrt{2} - 1) \frac{1-(\sqrt{2}-1)^n}{1-(\sqrt{2}-1)} = 2\pi r (\sqrt{2} - 1) \frac{1-(\sqrt{2}-1)^n}{2-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

eşlenik ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi r (\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})[1-(\sqrt{2}-1)^n]}{2} \\
&= \sqrt{2}\pi r [1 - (\sqrt{2} - 1)^n]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiş olur.

6.1.7. Çember formunun alanlarının toplamı

Fraktal şeklin her adımda oluşan alanların toplamı:

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n-1} + A_n + A_{n+1} \\
&= \pi r^2 (\sqrt{2} - 1)^2 + \pi r^2 (\sqrt{2} - 1)^4 + \pi r^2 (\sqrt{2} - 1)^6 + \dots + \pi r^2 (\sqrt{2} - 1)^{2n-2} \\
&+ \pi r^2 (\sqrt{2} - 1)^{2n} + \pi r^2 (\sqrt{2} - 1)^{2n+2}
\end{aligned}$$

yazılabilir. İşlemlerde kolaylık olması açısından $\sqrt{2} - 1 = k$ yazılsın. O halde

$$\begin{aligned}
&= \pi r^2 k^2 + \pi r^2 k^4 + \pi r^2 k^6 + \dots + \pi r^2 k^{2n-2} + \pi r^2 k^{2n} + \pi r^2 k^{2n+2} \\
&= \pi r^2 (k^2 + k^4 + k^6 + \dots + k^{2n-2} + k^{2n} + k^{2n+2})
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$k^2 = a$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&= \pi r^2 (a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n + a^{n+1}) \\
&= \pi r^2 a (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-2} + a^{n-1} + a^n) \\
&= \pi r^2 a \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right) = \pi r^2 k^2 \left(\frac{1-k^{2n+2}}{1-k^2} \right) = \pi r^2 (\sqrt{2} - 1)^2 \left(\frac{1-(\sqrt{2}-1)^{2n+2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2} \right) \\
&= \pi r^2 (3 - 2\sqrt{2}) \left(\frac{1-(\sqrt{2}-1)^{2n+2}}{1-3+2\sqrt{2}} \right) = \pi r^2 (3 - 2\sqrt{2}) \left(\frac{1-(\sqrt{2}-1)^{2n+2}}{2\sqrt{2}-2} \right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

6.1.8. Çember formunun Matlab programı

$S^{1/4}$ Çembersel Fraktal isimli fraktal şeklin Matlab kodları aşağıda verilmiştir.

```

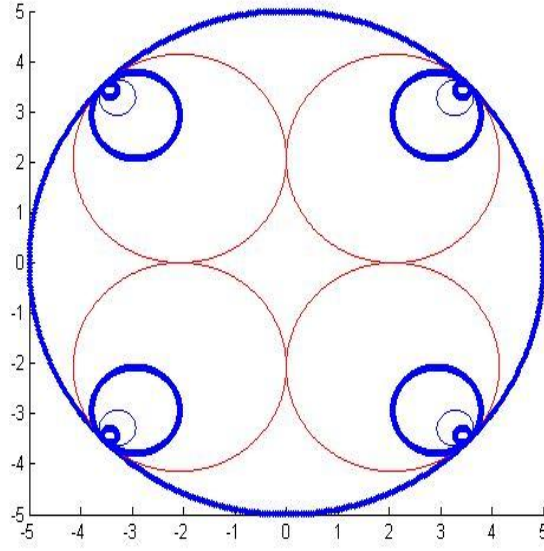
r(1)=5
for i=1:5
r(i+1)=(sqrt(2)-1)*r(i)

```

```

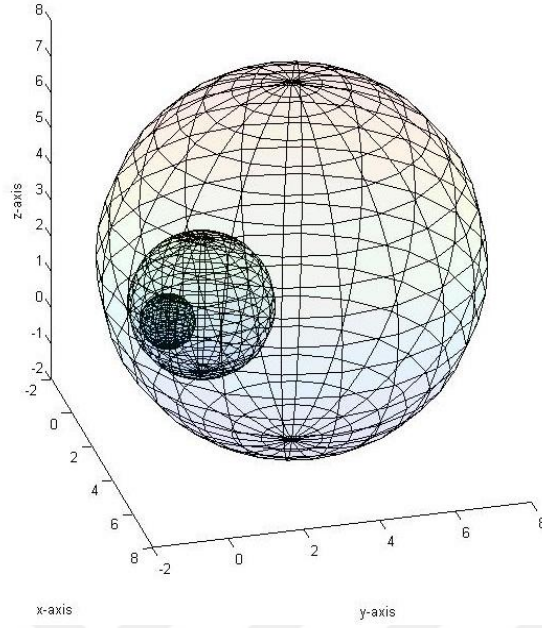
end
x(1)=0
y(1)=0
for i=2:5
    x(i)=x(i-1)+r(i)
    y(i)=x(i)
end
hold on
renk=['.r','.b','.g','.y','.r']
for i=1:5
    daire(x(i),y(i),r(i),renk(i))
    daire(x(i),(-1)*y(i),r(i),renk(i))
    daire((-1)*x(i),y(i),r(i),renk(i))
    daire((-1)*x(i),(-1)*y(i),r(i),renk(i))
end
function daire(x,y,r,renk)
    %x ve y çemberin merkezinin bileşenleri
    %r çemberin yarıçapı
    %0.01 değişkenin adımı
    ang=0:0.01:2*pi;
    xp=r*cos(ang);
    yp=r*sin(ang);
    plot(x+xp,y+yp,renk);
end

```



Şekil 6.2. $S^1/4$ Çembersel Fraktalın ilk beş adımına ve birinci bölgelere ait Matlab çizimi.

6.2. $S^2/4$ Küresel Fraktal



Şekil 6.3. $S^2/4$ Küresel Fraktal.

$S^2/4$ fraktalının, çember formu gibi küre formunun da belli bir iterasyonu vardır. Her bir adım bir önceki adıma bağlı olarak devam eder ve böylece genel bir ifadeye ulaşılır.

Fraktal şekli oluşturmak için $M(0,0,0)$ merkezli ve r yarıçaplı bir küre ele alınır. Çizilen bu küre 4 eş parçaya ayrılır ve her bir parçaya 1 küre çizilirse 8 tane küre elde edilir. Ayrılan parçaların her birine, sınır eğrilerine teğet olan küreler çizilir. Yeni oluşan her bir küreye de aynı adımlar tekrar tekrar uygulanır.

6.2.1. $S^2/4$ küresel fraktalın fraktal boyutu

Fraktal boyutun hesaplanabilmesi için k küçültme çarpanı ve N tekrar sayısının bilinmesi gerekir.

Çizelge 6.2. Küre Sayısı

Küre Sayısı
$K_1 = 8^0 = 1$ tane küre
$K_2 = 8^1$ tane küre
$K_3 = 8^2$ tane küre
$K_4 = 8^3$ tane küre
.
.
.
$K_n = 8^{n-1}$ tane küre
$K_{n+1} = 8^n$ tane küre

Tablo incelendiği zaman küre sayılarının belli bir iterasyonla arttığı görülebilir. Küçültme çarpanı ise;

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\left[\frac{1}{4} \left[(2+\sqrt{2}) - \sqrt{4\sqrt{2}-2} \right] \right]^2 \cdot r}{\frac{1}{4} \left[(2+\sqrt{2}) - \sqrt{4\sqrt{2}-2} \right] \cdot r} = \frac{1}{4} \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2}-2} \right) \quad (6.11)$$

(6.11) eşitliği ile hesaplanır.

O halde (Çizelge 6.2) ve (Çizelge 6.11) eşitliği yardımıyla fraktal şeklin fraktal boyutu aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\text{Küçültme çarpanı: } k = \frac{1}{4} \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2}-2} \right)$$

$$\text{Tekrar sayısı: } N = 8$$

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{k} \right)} = \frac{\log 8}{\log \frac{1}{\frac{1}{4} \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2}-2} \right)}} = \frac{0,903089987}{0,4254122519} = 2,1228584343$$

6.2.2. Yarıçap hesabı

$S^2/4$ Küresel Fraktal'ın yarıçap hesabının yapılması için aşağıdaki adımlar

uygulanır.

$$F(t, u) = (r \cdot \cos t \cdot \sin u, r \cdot \sin t \cdot \sin u, r \cdot \cos u)$$

$$\left(r \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}, r \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}, r \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(r \frac{1}{2}, r \frac{1}{2}, r \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$(x - \frac{1}{2}r)^2 + (y - \frac{1}{2}r)^2 + (z - \frac{1}{\sqrt{2}}r)^2 = x^2 \quad (6.12)$$

(6.12) eşitliğinden

$$x^2 - 2xr \frac{1}{2} + \frac{1}{4}r^2 + y^2 - 2yr \frac{1}{2} + \frac{1}{4}r^2 + z^2 - 2zr \frac{1}{\sqrt{2}} + r^2 \frac{1}{2} = x^2$$

$$2x^2 - xr - xr - xr\sqrt{2} + r^2 = 0$$

$$2x^2 - (2 + \sqrt{2})rx + r^2 = 0$$

2. derece denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri;

$$\Delta = (2 + \sqrt{2})^2 r^2 - 4 \cdot 2 \cdot r^2$$

$$\Delta = 4\sqrt{2}r^2 - 2r^2$$

$$\Delta = (4\sqrt{2} - 2)r^2 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{(2+\sqrt{2})r \pm r\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{4}$$

olarak bulunur. Bulunan kökün

$$x_{1,2} = \frac{(2+\sqrt{2})r \pm r\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{4} > r$$

olması gerekir. Bu yüzden

$$x_1 = \frac{(2+\sqrt{2})r - r\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{4}$$

x_1 kökü ele alınır. Her bir adımdaki yarıçap değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$x = y = z = r_1 = r \cdot \frac{1}{4} \left[(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right]$$

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{1}{4} \left[(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right] = \left[\frac{1}{4} \left[(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right] \right]^2 \cdot r$$

$$r_3 = r_2 \cdot \frac{1}{4} \left[(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right] = \left[\frac{1}{4} \left[(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right] \right]^3 \cdot r$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
r_n &= r_{n-1} \cdot \frac{1}{4} \left[(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right] \dots = \left[\frac{1}{4} \left[(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right] \right]^n \cdot r
\end{aligned}$$

6.2.3. Hacim hesabı

Küre sayısına ve hesaplanan yarıçaplara bağlı olarak hacim hesaplanır. Hacim hesabı yapılırken, yarıçap hesabında da olduğu gibi belli bir iterasyon yardımıyla işlemler ardışık olarak devam eder. Böylece n . basamak da hesaplanarak genel bir ifadeye ulaşılır.

Kürenin hacmi; $\frac{4}{3}\pi r^3$ formülü ile hesaplanır. O halde fraktal şeklin her bir adımdaki hacim değeri;

$$\begin{aligned}
H_1 &= 8^0 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r_1^3 = 8^0 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \left[\frac{1}{4} r \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right) \right]^3 \\
H_2 &= 8^1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r_2^3 = 8^1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \left[\left(\frac{1}{4} r \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right) \right)^2 \right]^3 \\
H_3 &= 8^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r_3^3 = 8^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \left[\left(\frac{1}{4} r \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right) \right)^3 \right]^3 \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
H_n &= 8^{n-1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r_n^3 = 8^{n-1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \left[\left(\frac{1}{4} r \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right) \right)^n \right]^3
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

6.2.4. Yüzey alanı hesabı

Kürenin yüzey alanı; $4\pi r^2$ formülü ile hesaplanır. Küre sayısına ve hesaplanan yarıçaplarına bağlı olarak yüzey alanı hesaplanır.

$$A_1 = 8^0 \cdot 4 \cdot \pi r_1^2 = 8^0 \cdot 4 \cdot \pi \left[\frac{1}{4} r \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right) \right]^2$$

$$A_2 = 8^1 \cdot 4 \cdot \pi r_2^2 = 8^1 \cdot 4 \cdot \pi \left[\left(\frac{1}{4} r \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right) \right)^2 \right]^2$$

$$A_3 = 8^2 \cdot 4 \cdot \pi r_3^2 = 8^2 \cdot 4 \cdot \pi \left[\left(\frac{1}{4} r \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right) \right)^3 \right]^2$$

.

.

.

$$A_n = 8^{n-1} \cdot 4 \cdot \pi r_n^2 = 8^{n-1} \cdot 4 \cdot \pi \left[\left(\frac{1}{4} r \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2} \right) \right)^n \right]^2$$

6.2.5. $S^2/4$ küresel fraktal için Matlab programı

$S^2/4$ Küresel Fraktal isimli fraktal şeklin Matlab kodları aşağıda verilmiştir.

```
figure
%axis(7)
xlabel('x-axis')
ylabel('y-axis')
zlabel('z-axis')
hold on
%grid on
[x,y,z] = sphere();
r(1)=5
for i=1:1:3
k=(2+sqrt(2)-sqrt(4*sqrt(2)-2))/4
r(i+1)=k*r(i)
m(1)=3
m(i+1)=k*m(i)
surf(r(i)*x+m(i),r(i)*y+m(i),r(i)*z+m(i)) % sphere centered at origin
hold on
% surf(x,y+t,z+t) % sphere centered at (3,-2,0)
% surf(x,y+1,z-3) % sphere centered at (0,1,-3)
daspect([1 1 1])
alpha(.05)
end
```



KAYNAKLAR

- Aydın, B., 2015. *Fraktal Boyuta Dair* (Yüksek Lisans Tezi). Şeyh Edebalı Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilecik. 40.
- Barnsley, M., 1988. *Fractals Everywhere*. https://books.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=wTjBQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=Barnsley,+M.,+1988.+Fractals+Everywhere&ots=F8o9tenbv8&sig=cqDmnwsv4poZVRmub2kRDZ1iPG4&redir_esc=v#v=onepage&q=Barnsley%2C%20M.%2C%201988.+Fractals+Everywhere

- 01988.%20Fractals%20Everywhere&f=false. Academic Press. Georgia Institute of Technology, Atlanta; and Iterated Systems, Inc., Atlanta, GA. Erişim tarihi: 19.11.2015.
- Başkan, T., 2000. *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*. Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Bursa. 350.
- Beardon, A. F., 1991. *Iteration of Rational Functions*, <https://books.google.com.tr/books?id=wAhFqe0AWRQC&printsec=frontcover&hl=tr#v=onepage&q&f=false>. Department of Pure Mathematics, Mathematical Statistics University, Cambridge University, Cambridge. Erişim tarihi: 19.11.2015.
- Benoit, B.M., 1982. *Fractals and the Geometry of Nature*. http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Polya/07468342.di020711.02p00026.pdf. French, W. H. Freeman and Company, San Fransisco. Erişim tarihi: 19.11.2015.
- Branner, B. 1989. Chaos and Fractals, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: The Mandelbrot Set. *American Mathematical Society, Providence*, 39: 75-105.
- Brincks, L. 2005. *Fractals and Chaos*. <http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/BrincksMSMF06.pdf>. Master of School, Iowa State University, Erişim tarihi: 20.12.2015.
- Büyükyılmaz, E.A., 2009. *Mandelbrot Cümlesi ve Tarihçesi*. (Yüksek Lisans Tezi) Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara. 96.
- Cardona, C.A., Miranda, R.A., Cuartas, J.C., 2016. *Chaos, Solitons and Fractals Nonlinear Science and Nonequilibrium and Complex Phenomena, Chaos, Solitons and Fractals*. California. 22–33.
- Çilingir, F., Devaney, R., Russell E., 2010. Extending external rays throughout the Julia Sets of Rational Maps, J. Fixed Point Theory. *Bulletin of the American Mathematical Society, Appl. (7)*: 223–240.
- Dave, F., 1982. *Computer Graphics: The Art of Hyper-Reality*. Science Digest, New York. 396.
- Devaney L. R., 1999. *Chaos, Fractals, and Tom Stoppard's Arcadia*. <http://math.bu.edu/people/bob/papers/arcadia.pdf>. Boston University, Erişim tarihi: 10.11.2015.

- Dong, Yanfang, WANG Jun, 2014. *Complex System Analysis of Market Return Percolation Model on Sierpinski Carpet Lattice Fractal*. 743-759.
- Feliks, P., Mariusz, U., 2007. *Conformal Fractals, Ergodic Theory Methods*. <http://www.math.unt.edu/~urbanski/pubbook/puwhole091507.pdf.327>. Erişim tarihi: 13.10.2015.
- Gao, F., Le, A., Xi, L., Yin S., 2016. Asymptotic formula on average path length of fractal networks modeled on Sierpinski gasket. *J. Math. Anal. Appl.* (434): 1581–1596.
- Goodson, R.G., 2015. *Chaotic Dynamics: Fractals, Tilings and Substitutions*. Towson University Mathematics Department, 395.
- Grattan, I., 1994. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Science*. <https://books.google.com.tr/books?hl=tr&lr=%id=2hDvzITtfdAC&oi=fnd&pq=PA367&dq=history+of+fractals&ots=pEtqf21CvG&sig=0ixISIXxJUWXLZxXoYTv3nrRhQ&redirese=y#v=onepage&q=history%20of%20fractals&f=false>. The John Hopkins University, Press Baltimore and London. 841. Erişim tarihi: 03.01.2016.
- Hacısalıhoğlu, H. H. ve Yaz, N., 2002. *Fraktal Geometri - I*. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı (Doktora Tezi). Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 2006. *Ölçü, Topoloji ve Fraktal Geometri*. Nobel Yayın., Ankara, 274. Jacquenot G., 2010.
- Jacquenot, G., 2010. *This function generates Pythagoras tree and exports the plot to SVG file*. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/26816-pythagoras-tree>. Erişim tarihi: 12.10.2015.
- Kaptanoğlu, H. T., 1994. *Dinamik Sistemler, Garip Çekerler ve Kaos*. http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF_eskisayilar/1994_2_7_14_DINA_MIK.pdf. ODTÜ. Erişim tarihi: 05.04.2015.
- Kaya, R., 2006. *Nonlinear Dinamik Sistemlerde Kaos, Dallanma ve Fraktallar*. (Yüksek Lisans Tezi) İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. İstanbul.
- Kenneth, F. Falconer, 1982. *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press. Lundgren, J., 2010.

- Lundgren, J., 2010. *A collection of m - files to generate fractal curves in the complex plane.* <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27577-fractal-curves/content/hilbert.m>. Erişim tarihi: 12.10.2015.
- Nigel, L., Gordon, W.R., 2013. *Introducing Fractals a Graphic Guide*. London, Icon Books Ltd, 176.
- Pamuk, N., 2013. *Dinamik Sistemlerde Kaotik Zaman Dizilerinin Tespiti.* <http://fbe.balikesir.edu.tr/dergi/20131/BAUFBE2013-1-8.pdf>. BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Cilt 15 (1) 77-91. Sakarya. Erişim tarihi: 03.11.2015.
- Sullivan, D., 1988. Differentiable structures on fractal - like sets determined by intrinsic scaling functions on dual Cantor sets. *The Mathematical Heritage of Hermann Weyl, AMS Proc. Symp. Pure Math.* (48): 101-102.
- Thomas, B., Weir, D., Hass, J., Giordano, D., Frank R. (2009). *Calculus*. Upper Saddle River, United States, 299.
- Ufuktepe, Ü. ve Aslan, İ. (2002). *Fraktal Geometriden Bir Kesit, Matematik Dünyası*, 1:14-20.
- Yılmaz, D., 2013. *Doğanın Fraktal Geometrisi* (Yüksek Lisans Tezi). Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyon.
- Zhu, Y., Dong M., 2016. Lipschitz equivalence of fractal triangles. *J. Math. Anal. Appl.* (433): 1157–1176.

ARAŞTIRMA OLANAKLARI

Konuyla ilgili olarak kaynaklara ulaşmak için Yüzüncü Yıl Üniversitesi, ULAKBİM gibi kurumlar ve çeşitli internet veri tabanlarından faydalanılmıştır. Bu amaçla, konu ile ilgili bazı yayınlara ulaşılmış ve mevcut tez önerisinde kullanılmıştır.



ÖZGEÇMİŞ

02.01.1989 yılında Ankara’da dünyaya geldi. İlk ve ortaokulu Malazgirt İlköğretim Okulu’nda, liseyi ise Abidinpaşa Lisesi’nde okudu. 2009’de Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü’ne girdi. 2013 yılında bu bölümden mezun oldu. 2014 yılında Pedagojik Formasyon Eğitimi’ni tamamladı. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı’nda bir yıl süreyle vekil öğretmenlik yaptı. 2014 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bilim Dalı’nda lisansüstü eğitimine

devam etmektedir.

