T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KARŞILIKLI SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: İnci ZIRAPLI
DANIŞMAN : Dr. Öğr. Üyesi Nagehan ALSOY AKGÜN

VAN-2021

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KARŞILIKLI SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: İnci ZIRAPLI

VAN-2021

## KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Dr. Öğretim Üyesi Nagehan Alsoy Akgün danışmanlığında, İnci Zıraplı tarafından sunulan "Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Karşılıklı Sınır Elemanları Yöntemi ile Çözümleri" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 17/06/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Zeynep KAYAR İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nagehan AKGÜN İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ali Hakan TOR İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./..../….. tarih ve ..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

……..……..

Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

(İmza)

İnci ZIRAPLI

# ÖZET

## KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KARŞILIKLI SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ

ZIRAPLI, İnci
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nagehan ALSOY AKGÜN
Haziran 2021, 77 sayfa

Bu tezde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanımı oldukça yaygın olan karşılıklı sınır elemanları yöntemi ele alınmıştır. Yöntemin uygulanışında orijinal diferansiyel denklem, temel çözümü bilinen bir diferansiyel denklem formunda yazılır. Bu amaçla temel çözümü bilinen diferansiyel denklem eşitliğin sol tarafında bırakılırken, geri kalan tüm terimler homojen olmayan terimler olarak kabul edilir. Daha sonra denklemin her iki tarafı bu bilinen temel çözüm ile çarpılır ve tanım bölgesi üzerinde integrali alınır. Bu çalışmada Laplace denkleminin temel çözümü kullanılarak bölge integral denklemi elde edilmiştir. Elde edilen bu bölge integral Green özdeşliği yardımıyla sınır integraline dönüştürülmüştür. Sabit eleman kullanılarak sınır ayrıklaştırılmıştır. Homojen olmayan terim için gerekli olan yaklaşımda radyal fonksiyon olarak $f = 1 + r$ kullanılmıştır. Prosedür birkaç örneğe uygulanmıştır ve çözümler, kesin çözümlerle karşılaştırılarak grafikler halinde sunulmuştur. Sonuçlar, bu yöntemin yüksek doğruluk ve verimlilik sergilediğini göstermektedir.

**Anahtar kelimeler:** Difüzyon Denklemi, Karşılıklı sınır elemanları yöntemi, Kısmi türevli diferansiyel denklemler, Laplace denklemi, Poisson Denklemi, Sınır Elemanları Yöntemi.

## ABSTRACT

### THE DUAL RECIPROCITY BOUNDARY ELEMENT METHOD SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ZIRAPLI, İnci
MSc. Thesis Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nagehan ALSOY AKGÜN
June 2021, 77 pages

In this thesis, the dual reciprocity boundary element method is presented, which is widely used in solving partial differential equations. In the derivation of the method, the original differential equation is written in the form of a differential equation whose fundamental solution is known. For this purpose, the differential equation, whose fundamental solution is known, is written on the left side of the equation, while all the remaining terms are considered as nonhomegeneous terms. Then both sides of the equation are multiplied by this fundamental solution and integrated over the domain. In this study, the domain integral equation has been obtained by using the fundamental solution of Laplace's equation. Then, the domain integral is transformed to the boundary integral with the help of Green's identity. Beside this the boundary is discretizied using the constant elements. The domain integral caused by the nonhomogeneous or nonlinear terms which appears at the right hand side of the integral equation is approximated using the radial function $f = 1 + r$. The procedure is applied to several examples and the solutions are presented in terms of graphics by comparing with the exact solutions. The results show that this method exhibits high accuracy and efficiency.



**Keywords:** Boundary element method, Diffusion equation, Dual reciprocity boundary element method, Laplace equation, Partial differential equations, Poisson equation.

# ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan danışmanım Sayın Nagehan Alsoy Akgün'e teşekkür ederim. Her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli hocam, Prof. Dr. Cemil Tunç' a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca, tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan canım abim ve sevgili aileme de teşekkür ederim.

2021

İnci ZIRAPLI

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**


ÖZET ..... i
ABSTRACT ..... iii
ÖN SÖZ ..... v
İÇİNDEKİLER ..... vii
ÇİZELGELER LİSTESİ ..... ix
ŞEKİLLER LİSTESİ ..... xi
SİMGELER VE KISALTMALAR ..... xiv
1. GİRİŞ ..... 1
1.1. Matematiksel Ön Bilgiler ..... 5
1.1.1. Dirac delta fonksiyonu ..... 6
1.1.2. Green özdeşlikleri ..... 9
1.1.3. Green fonksiyonu ve temel çözüm ..... 10
1.1.3.1. Poisson denkleminin Green fonksiyonu yardımıyla çözümü ..... 10
1.1.3.2. Temel çözüm ..... 11
2. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ ..... 16
2.1. Poisson Denklemi için Sınır Elemanları Yöntemi ..... 16
2.2. Temel Çözüm ..... 19
2.3. Sınır İntegrali Denklemi ..... 20
2.4. Laplace Denklemi için Sınır Elemanları Yöntemi ..... 21
2.5. Sabit Elemanlar ..... 23
2.6. Sınır İntegrallerin Hesaplanması ..... 27
2.7. Uygulama Problemi ..... 29
3. KARŞILIKLI SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ ..... 37
3.1. Poisson Denklemi için Formülasyon ..... 37
3.2. İç Noktalar ..... 40
3.3. α Vektörü ..... 41
3.4. Farklı f Açılımları ..... 42
3.5. $\nabla^2 = b\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ Tipinde Denklemler için KSEY ..... 44

**Sayfa**

3.6. $\nabla^2 u = b(x, y, u, t)$ Tipinde Denklemler için KSEY ..... 48
4. KSEY(DRBEM) Uygulamaları ..... 51
4.1. Problem 1 ..... 51
4.2. Problem 2 ..... 55
4.3. Problem 3 ..... 60
4.4. Problem 4 ..... 63
5. SONUÇ ..... 73
KAYNAKLAR ..... 75
ÖZ GEÇMİŞ ..... 77

# ÇİZELGELER LİSTESİ

**Çizelge** **Sayfa**

Çizelge 4.1. Problem 1 için farklı sınır eleman sayısı kullanımında maksimum mutlak hatalar .....52

Çizelge 4.2. Problem 2 için farklı sınır eleman sayısı kullanımında maksimum mutlak hatalar .....56

Çizelge 4.3. Problem 3 için farklı sınır eleman sayısı kullanımında maksimum mutlak hatalar .....60

Çizelge 4.4. Problem 4 için $\mathbf{t = 1.2}$ anında farklı $\Delta\mathbf{t}$ kullanımında maksimum mutlak hatalar .....65

## ŞEKİLLER LİSTESİ

**Şekil** **Sayfa**

Şekil 1.1. Doğrusal yük dağılımı ..... 6

Şekil 1.2. $\delta_a(t-t_0)$ fonksiyonunun grafiksel gösterimi .....6

Şekil 1.3. Alanları 1 birim olan dikdörtgenler dizisi .....7

Şekil 2.1. İki ve üç boyutlu durumlar için sınır noktalar.....22

Şekil 2.2. Farklı tiplerdeki sınır elemanları .....23

Şekil 2.3. Problemin tanım bölgesi.....30

Şekil 2.4. Sınırların sabit eleman kullanılarak ayrıklaştırılması.....30

Şekil 2.5. Laplace denkleminin $N+L=52+36$ için SEY (BEM) çözümü .....34

Şekil 2.6. Laplace denkleminin $N+L=68+64$ için SEY (BEM) çözümü .....35

Şekil 2.7. Laplace denkleminin $N+L=84+100$ için SEY (BEM) çözümü.....36

Şekil 4.1. Problem 1'in $N+L=60+49$ için KSEY (DRBEM) çözümü .....53

Şekil 4.2. Problem 1'in $N+L=124+225$ için KSEY (DRBEM) çözümü.....54

Şekil 4.3. Problem 1'in $N+L=180+448$ için KSEY (DRBEM) çözümü.....55

Şekil 4.4. Problem 2'nin $N+L=60+49$ için KSEY (DRBEM) çözümü .....57

Şekil 4.5. Problem 2'nin $N+L=124+225$ için KSEY (DRBEM) çözümü.....58

Şekil 4.6. Problem 2'nin $N+L=180+448$ için KSEY (DRBEM) çözümü.....59

Şekil 4.7. Problem 3'ün $N+L=60+49$ için KSEY (DRBEM) çözümü.....61

Şekil 4.8. Problem 3'ün $N+L=124+225$ için KSEY (DRBEM) çözümü.....62

Şekil 4.9. Problem 3'ün $N+L=180+448$ için KSEY (DRBEM) çözümü.....63

**Şekil** **Sayfa**

Şekil 4.10. Problem 4'ün $t = 0.5$ için KSEY (DRBEM) çözümü .....66

Şekil 4.11. Problem 4'ün $t = 1$ için KSEY (DRBEM) çözümü .....67

Şekil 4.12. Problem 4'ün $t = 1.2$ için KSEY (DRBEM) çözümü .....68

Şekil 4.13. Problem 4'ün $t = 1.5$ için KSEY (DRBEM) çözümü .....69

Şekil 4.14. Problem 4'ün $t = 2.0$ için KSEY (DRBEM) çözümü .....70

Şekil 4.15. Problem 4'ün $t = 2.5$ için KSEY (DRBEM) çözümü .....71

Şekil 4.16. Problem 4 için bölgenin sağ alt köşesinde zaman ilerlerken $u(x, y)$ de ki değişim.....72

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ | Lineer denklem sistemi katsayılar matrisi |
| $\mathbf{b}$ | Poisson denkleminin sağ taraf fonksiyonu |
| $\mathbf{f}$ | Radyal fonksiyon |
| $\mathbf{F}$ | Koordinat matrisi |
| $\mathbf{H}, \overline{\mathbf{H}}, \mathbf{G}$ | SEY (BEM) katsayı matrisleri |
| $\mathbf{k}$ | Difüzyon katsayısı |
| $\mathbf{n}$ | Normal vektörü |
| $\mathbf{N}, \mathbf{L}$ | Sınır ve iç nokta sayısı |
| $\mathbf{r}$ | Kaynak ve alan noktaları arasındaki uzaklık vektörü |
| $\mathbf{r_x}, \mathbf{r_y}$ | r vektörünün x ve y yönündeki koordinatları |
| $\mathbf{t}$ | Boyutsuz zaman değişkeni |
| $\mathbf{u}$ | Bilinmeyen fonksiyon |
| $\mathbf{u}^*, \mathbf{q}^*$ | Temel çözüm ve normal türevi |
| $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{q}}$ | Özel çözüm ve normal türevi |
| $\mathbf{w}_{\ell}$ | Ağırlık fonksiyonu |
| $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ | Boyutsuz uzay değişkenleri |
| $\boldsymbol{\alpha}$ | Poisson denklemi için bilinmeyen katsayı vektörü |
| $\boldsymbol{\Gamma}$ | Problemin tanım bölgesinin sınırı |
| $\boldsymbol{\delta}, \Delta_{\mathbf{j}}$ | Dirac delta fonksiyonu |
| $\Delta\mathbf{t}$ | Zaman yönündeki adım boyu |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | Hata |
| $\boldsymbol{\Omega}$ | İki boyutlu bölge |

| Kısaltmalar | Açıklama |
|---|---|
| **KSEY** | Karşılıklı Sınır Elemanları yöntemi (DRBEM) |
| **SEY** | Sınır Elemanları Yöntemi (BEM) |

# 1. GİRİŞ

Fizik veya mühendislik problemlerinin uygun sınır koşulları ile birlikte kısmi türevli denklemler ile matematiksel modellemesi yapılabilir. Genellikle, bu denklemlerin kapalı formda çözümlerini bulmak mümkün olamaz. Analitik yöntemler dünyanın iç hareketlerinin karmaşık veya yeterince gerçekçi olmayan modellemesi olan hareket denklemleri için çözüm vermez. Bu nedenle yaklaşık çözümler farklı nümerik yöntemler kullanılarak elde edilebilir. Nümerik bir yöntem orijinal diferansiyel denklemi cebirsel denklemler sistemine dönüştürür. Bir nümerik yöntemde diferansiyel denklem içindeki sürekli bir fonksiyon sonlu miktarda sayı ile belirtilir. Bu sayılar bilgisayar belleğine kaydedilir. Her bir numerik yöntem bu sonlu miktarda sayıları kullanarak çözümleri nasıl belirteceği veya türevler için nasıl bir yaklaşım kullanılacağına dair belli bir yol kullanır. Aynı zamanda kullanılan nümerik yöntem hesaplama yaparken bilgisayar belleğini kullanama ve zaman anlamında verimli olmalıdır.

Sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, sonlu hacim yöntemi, diferansiyel kuadratür yöntemi, sınır elemanlar yöntemi ve karşılıklı sınır elemanları yöntemi gibi pek çok nümerik yöntem vardır. Yöntemler arasındaki farklar değişkenler için kullanılan yaklaşım çeşidinde ve problemin tanımlı olduğu bölgenin parçalara ayrılışında ortaya çıkar.

Hem adi hem de kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için ilk sayısal yöntem sonlu fark yöntemidir. Sonlu farklar yöntemi kesilmiş Taylor serisi açılımlarını kullanarak bilinmeyenlerin türevlerini tanımlar. Yönetim denklemlerinde yer alan türevlerin sonlu fark yaklaşımlarıyla değiştirilmesi ve sınır koşullarının kullanılmasıyla, bir cebirsel denklem sistemi elde edilebilir. Sonlu fark yönteminde bölge ızgara veya kafes noktaları ile ayrılmıştır (Leveque, 2007). İç bölgeyi ayrıklaştırmak için sonlu fark yaklaşımları kolayca kullanılabilir, ancak yöntemin ana zorlukları eğrisel sınırlarından ve sınır koşullarının yerleştirilmesinden kaynaklanır. Ayrıca, normal sınırlar için türev içeren sınır koşulları verildiğinde bu türevlerin sonlu fark yaklaşımlarında aslında var olmayan dış noktalar kullanmak gerekir. Sonlu fark kodları bir cebirsel denklem elde

etmek için basit bir prosedür gerektirdiği için, birçok akışkanlar dinamiği probleminin çözümü için hala tercih edilmektedir.

Sonlu farklar yönteminin aksine, sonlu elemanlar yöntemi, alanın geometrisinin daha iyi bir gösterimini verir ve sınır koşullarının yerleştirilmesini kolaylaştırır. Bu yöntem problemin tanımlı olduğu bölgeyi eleman adı verilen küçük parçalara böler (Reddy ve Gartling, 2010). Daha sonra, yönetim denklemlerinin değişkenlerine bölgenin küçük parçaları üzerinde polinom interpolasyonu fonksiyonları kullanılarak yaklaşılır. Böylece, her eleman için, her elemanın özelliklerini içeren etki matrisleri elde edilir. Bu etki matrislerini süreklilik özelliklerini göz önünde bulundurarak birleştirdikten sonra denklemler için global bir matris elde edilir. Sınır koşullarının yerleştirilmesi, sınır integrallerinin hesaplanması ile yapılabilir. Bu yöntem sınır koşullarının yerleştirilmesi için sonlu fark yönteminden daha kolay bir yoldur. Bunun yanı sıra, sonlu elemanlar yönteminde bölgenin tamamının ayrıklaştırılması için büyük miktarda bilgi kullanılması gerekir. Bu nedenle, elde edilen cebirsel sistemin boyutu artar ve bu ise yüksek hesaplama yüküne neden olur. Ayrıca, yöntem sonsuz bir bölgede tanımlanan veya hareketli sınırları olan bölgelerde tanımlanan problemler için uygun değildir.

Sonlu hacim yöntemi son yıllarda büyük ilgi görmüştür. Yöntem kullanılırken problemin tanımlı olduğu bölge her bir düğüm noktasını çevreleyen kontrol hacimlere bölündüğü için herhangi bir formdaki geometriye sahip bir bölgede tanımlı problemin çözümü için kullanmaya elverişlidir. Koruma ilkeleri bu kontrol hacminde otomatik olarak sağlanır (Pletcher ve ark., 2013). Diverjans teoremi kullanılarak, her bir hacmin hacim integrali gösterimi, kontrol hacmi sınırları boyunca akı olarak değerlendirilen yüzey integrallerine dönüştürülür. Düzensiz geometrilerdeki akı hesaplamaları çok çaba gerektirir.

Bir diğer sonlu bölge ayrıklaştırma yöntemi ise Bellman ve arkadaşlarının (1971) ortaya koyduğu diferansiyel kuadratür yöntemidir. Diferansiyel kuadratür yöntemi, fonksiyonun türevini her düğüm noktasındaki fonksiyon değerlerinin doğrusal ağırlıklı toplamı olarak tanımlar. Yöntem çözümlerin ve onların türevlerinin polinomlar tarafından interpolasyonuna dayandığı için oldukça basittir. Her ne kadar hesaplama

açısından basit bulunduğu için diferansiyel kuadratür yöntemi tercih edilse de alanın dikdörtgen olması gereken bir alan ayrıklaştırma yöntemidir.

Sınır eleman yöntemi, yukarıda belirtilen alan ayrıklaştırma yöntemlerine göre önemli avantajlara sahip olan ve Laplace ve Poisson tipindeki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan nümerik bir tekniktir. Yöntemin ana fikri, bir alanda tanımlanan diferansiyel denklemin, tanımlı olduğu bölgenin sınırında tanımlanan bir integral denkleme dönüştürülmesidir. Bu sınır integral denklemi yalnızca bilinmeyen değerleri ve bu bilinmeyen değerlerin sınırdaki normal türevlerini içerir. Sadece sınırın ayrıklaştırılmasına ihtiyaç duyduğundan, çözülen problem tanımlı olduğu bölgeye bağlı olarak iki veya tek boyutlu bir problem haline gelir ve bu yöntem daha küçük boyutlu bir lineer denklem sistemi verir. Sistem çözüldükten sonra sınırdaki tüm bilinmeyen değerleri ve onların normal türevleri elde edebilir. Ayrıca, bu sınır değerleri kullanarak, iç noktalardaki çözümler basit bir hesaplama ile elde edilebilir. Bunların yanı sıra sonlu elemanlar yöntemi, sonsuz bölgelerde tanımlanan veya hareketli sınırları olan problemlerin çözümü için de kullanılabilir.

Sınır elemanları yöntemi, 1960'larda küçük bir grup araştırmacı tarafından ortaya konuldu. Sınır integral denklemlerinin potansiyel akış ve stres analizine uygulamaları üzerinde çalıştılar. Daha sonra yöntem, problemlerin çözümü için sonlu elemanlar yöntemine mükemmel bir alternatif oldu. Yöntemin mevcut formu (Brebbia, 1978) ve onun araştırma grubundaki (Telles ve ark., 1984) tarafından inşa edilmiştir. Daha sonra ilk sonlu elemanlar yönteminin mühendislik biliminin çeşitli alanlarındaki uygulamaları Banerjee ve Butterfield kitabında verilmektedir. (Banerjee ve Butterfield, 1981). Yöntem, genel potansiyel teorisi, akışkanlar mekaniği, katı mekaniği üzerinde sürünme ve kırılma problemleri, elastik olmayan problemler, elektrodinamik ve manyetohidrodinamik problemleri gibi birçok mühendislik alanındaki uygulamalarda yaygın olarak kullanılan bir teknik haline gelmiştir. Ayrıca, geçici ısı iletimi, dalga yayılımı ve diğer zamana bağlı problemler de sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmüştür (Brebbia, 1978; Telles ve ark., 1984). Yönetim denkleminin temel çözümü mevcutsa, sınır elemanları yöntemi mükemmel bir sayısal yöntemdir. Ancak, sınır integral denklemini elde ettikten sonra, bazı kuvvet ve konveksiyon-reaksiyon terimlerinden dolayı hala alan integralleri olabilir ve bu integrallerin hesabı ekstra bir bölge

ayrıklaştırması gerektirir. Bu durumda, bu ekstra ayrıklaştırma yöntemi gereksinimi yöntemin avantajını tahrip eder. Buna ek olarak homojen olmayan yönetim denklemleri veya doğrusal olmayan terimler içeren yönetim denklemleri yine bölge integralleri hesaplama ve dolayısıyla ekstra bölge ayrıklaştırma yöntemi gerektirir. Etki alanı integrallerinin analitik integrasyonu için, Fourier açılımlarının kullanımı, Galerkin vektör tekniği, çoklu karşılıklılık yöntemi ve karşılıklı sınırlama elemanı yöntemi gibi farklı önerilen birkaç yöntem vardır.

Karşılıklı sınır elemanları yöntemi ilk defa Nardini ve Brebbia (Nardini, 1982; 1983) tarafından ortaya konuldu ve Brebbia, Wrobel ve Partridge (Wrobel ve ark., 1986; Partridge, 1990) tarafından genişletildi. Yöntem, mevcut yönetim denklemi içerisindeki daha basit bir denkleme karşılık gelen temel bir çözümü kullanan ve geriye kalan terimleri diferansiyel denklemin homojen olmayan bir terimi olarak değerlendiren sayısal bir tekniktir. Dolayısıyla, homojen olmayan, doğrusal olmayan ve zamana bağlı problemlerin çözümü için etkili bir yöntemdir. Buradaki ana fikir, diferansiyel denklemi temel çözümün mevcut olan daha basit bir şekilde ifade edebilmektir. Genel olarak, karşılıklı sınır elemanları yöntemi bir çözüm yöntemi olarak kullanıldığında, diferansiyel denklemin Laplace terimi dışındaki tüm terimler homojen olmayan terim olarak değerlendirilir. Daha sonra, elde edilen Poisson denklemi için Laplace denkleminin temel çözümü kullanılabilir. Ayrıca, yönetim denkleminin homojen olmayan teriminin mümkün olduğunca basit tutulması da önemlidir. Böylece, interpolasyon hatası en aza indirilebilir. Bir alternatif de verilen yönetim denklemini homojen olmayan modifiye Helmholtz denklemine indirgemek ve karşılıklı sınır elemanları yöntemini modifiye Helmholtz denkleminin temel çözümünü kullanarak uygulamaktır. Alsoy-Akgün ve Tezer-Sezgin manyetik alan altında doğal konveksiyon ve çift yayınımlı karma konveksiyon problemlerini modifiye Helmholtz denkleminin temel çözümünün kullanıldığı karşılıklı sınır elemanları yöntemi ile çözmüştür (Alsoy Akgün, 2013), (Alsoy Akgün ve Tezer Sezgin, 2013 a,b).

Karşılıklı sınır elemanları yöntemi uygulanırken homojen olmayan terimler için interpolasyon fonksiyonlarının lineer bileşkesi olan bir yaklaşım kullanılır. Bu amaç ile genellikle çok basit ve etkili bir alternatif olan sabit katsayılı uzaklık fonksiyonu r'nin farklı derecelerde polinomları olan radyal tabanlı fonksiyonlar tercih edilir. Bir radyal

tabanlı fonksiyon $r > 0$ için tanımlanan $\mathbb{R}^d$ üzerindeki Öklid normuna göre orjinden uzaklığa bağlı olan tek değişkenli ve sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca alternatif olarak, bir merkez olarak kabul edilen c noktasına uzaklık olarak da tanımlanabilir. Sınır elemanları yöntemi ile ilgili uygulamalarda özellikle (Golberg ve Chen 1994)'de belirtildiği gibi radyal tabanlı fonksiyonların teorisi, sınır elemanları yönteminin uygulamalarında deneme fonksiyonlarının seçimi için matematiksel bir taban sağlar Açıkçası interpolasyon fonksiyonlarının seçimi yöntemin doğruluğunun anahtarı olarak belirtilmektedir. Eğer $r = \|x\|_2 = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_d{}^2}$ olarak alınırsa en erken çalışma olan (Partridge ve ark., 1992)'de $f = 1 + r$ olarak gösterilen basit bir doğrusal formun genellikle yeterli olduğu sonucuna varılmıştır. Bu basit seçenek pek çok yazar tarafından yaygın olarak kullanılmıştır. Radyal tabanlı fonksiyonları için polinom formu dışında uygun bir fonksiyon elde etmenin farklı yolları da vardır. Chen ve Rashed tarafından (Chen ve Rashed, 1998)'de radyal tabanlı fonksiyonlar olarak ince plaka çizgilerinin (spline) lineer bir kombinasyonu kullanılmıştır ancak sistematik bir formu olan $f = r^2 \ln r$ verilmemiştir. Daha sonra Muleskov, Golberg ve Chen (Muleshkov ve ark., 1999) bu sonuçları $f = r^{2n} \ln r$ şeklinde genelleştirmiştir. Bugüne kadar sınır elemanları yöntemi ve farklı radyal tabanlı fonksiyonların için karşılıklı sınır elemanları yöntemlerinin kullanıldığı pek çok çalışma literatürde yer almaktadır.

Bu tezde kısmi türevli diferansiyel denklemler için KSEY (DRBEM) yönteminin uygulanışı incelenmiştir. İkinci bölümde sınır elemanları yöntemi (Brebbia, 1978) de verildiği gibi sınır integrali denklemi oluşturularak açıklanacaktır. Yöntemin elde edilmesinde Laplace denkleminin temel çözümü kullanılmıştır. Problemin tanımlı olduğu bölgenin sınırı sabit eleman kullanılarak ayrıklaştırılır ve sonucunda bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Üçüncü böşümde Poisson denklemi için karşılıklı sınır elemanları yönteminin elde edilişi (Partridge ve ark., 1992) de verildiği gibi açıklanır. Sonrasında yöntem, değişkenin kendisinin, x, y için ikinci mertebeden ve zaman yönündeki birinci mertebeden kısmi türevlerinin yer aldığı durumlar için genişletilir. Daha sonra KSEY (DRBEM) yönteminin her bir durum için uygulama örnekleri dördüncü bölümde verilmiştir. Sayısal sonuçlar çizelgeler ve grafikler yardımıyla verilmiş ve analitik çözümler ile karşılaştırılarak tartışılıp değerlendirilmiştir.

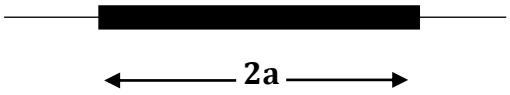
## 1.1. Matematiksel Ön Bilgiler

Bu kısımda bu çalışmada kullanılan bazı temel kavramlara kısaca değinilecektir.

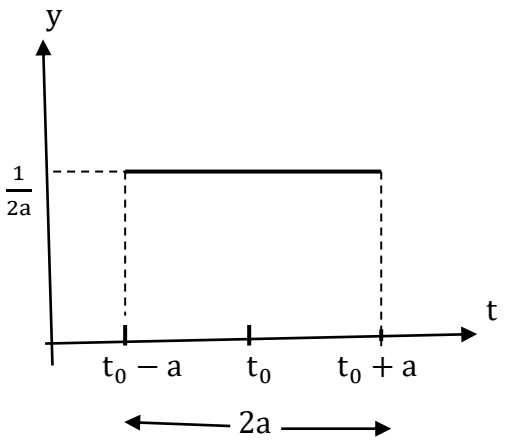
### 1.1.1. Dirac delta fonksiyonu (Hassani, 2009)

Dirac Delta fonksiyonu genelleştirilmiş fonksiyon veya dağılım olarak adlandırılan, ilk olarak İngiliz teorik fizikçi Paul Dirac tarafından ortaya konulan matematiksel bir yapıdır. Dirac delta fonksiyonu, elektron hareketi ve yayılma çalışmaları için gerekli hesaplamaları kolaylaştıran önemli bir matematiksel bir objedir. Gerçekte bir fonksiyon olmayan bu yapıyı fizikçiler ve mühendisler hesaplamalarında kullanırlar.

Şekil 1.1'de gösterildiği gibi düzgün bir yük yoğunluğuna sahip 2a uzunluğunda düz bir doğrusal yük dağılımı düşünelim. Eğer doğru parçasının toplam yükü 1 ise doğrusal yük yoğunluğu $1/2a$ olacaktır. Biz $(-\infty, \infty)$ aralığındaki doğrusal yoğunluğu tanımlayan grafik ile ilgileniyoruz.




Şekil 1.1. Doğrusal yük dağılımı.

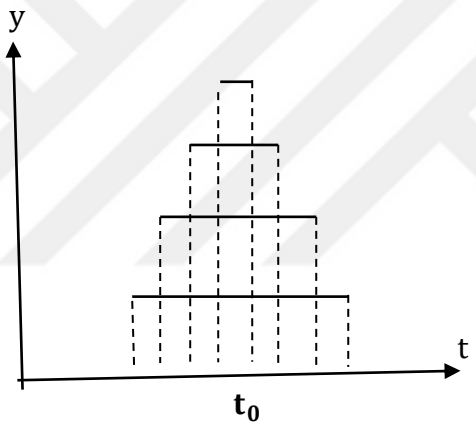



Şekil 1.2. $\delta_a(t - t_0)$ fonksiyonunun grafiksel gösterimi.

Doğru parçasını tam orta noktasını $\mathbf{t_0}$ ve uzunluğunu $\mathbf{2a}$ olarak kabul edersek bu fonksiyonu Şekil 1.2'deki gibi kolayca çizebiliriz. Bu fonksiyona $\boldsymbol{\mathcal{S}_a(t-t_0)}$ adı verilirse,

$$\mathcal{S}_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\le t_0-a\\ \frac{1}{2a}, & t_0-a<t<t_0+a\\ 0, & t\ge t_0+a\end{cases} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu fonksiyonun şeklini mevcut dikdörtgenin alanı değişmeyecek şekilde değiştirelim. Yani orta noktanın yeri değişmeyecek şekilde doğru parçasının boyunun kısaldığını ve toplam yükün değişmediğini varsayalım. Bu durumda Şekil 1.3'deki gibi $a\to 0$ iken $t\to t_0$ ve toplam yükü 1 birim olan dar bir dikdörtgen elde edilir.




Şekil 1.3. Alanları 1 birim olan dikdörtgenler dizisi.

$\mathcal{S}_a(t-t_0)$ yardımıyla

$$\mathcal{S}(t-t_0)=\lim_{a\to 0}\mathcal{S}_a(t-t_0) \tag{1.2}$$

limiti ile genişliği sıfır ve boyu sonsuz olan dikdörtgen ile ifade edilen bir fonksiyon elde edilir. Bu $\mathcal{S}(t-t_0)$ fonksiyonuna Dirac Delta Fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

$$\mathcal{S}(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\ne t_0\\ \infty, & t=t_0\end{cases} \tag{1.3}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Dirac delta fonksiyonu Heaviside fonksiyonunun türevi olarak tanımlanabilir. Heaviside (basamak) fonksiyonu

$$H(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ 1, & t\geq t_0\end{cases} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\frac{d[H(t)]}{dt}=\mathcal{S}(t-t_0) \tag{1.5}$$

elde edilir. Dirac delta fonksiyonunun altında kalan alan 1 olduğu için tanım gereği

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}(t-t_0)dt=1 \tag{1.6}$$

olur. Ayrıca $\mathcal{S}(t-t_0)$ fonksiyonunun bir $f(x)$ fonksiyonu ile çarpımın integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}(t-t_0)f(t)dt=f(t_0) \tag{1.7}$$

olur. Burada $t\neq t_0$ için $\mathcal{S}(t-t_0)$ fonksiyonu sıfır olup bu integral $t=t_0$ için denklem "Eş.1.6''dan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}(t-t_0)f(t_0)dt=f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{S}(t-t_0)dt=f(t_0) \tag{1.8}$$

şeklinde hesaplanabilir. Yani bir f fonksiyonunun $t=t_0$ değerini hesaplamak istiyorsak o fonksiyonu Dirac delta fonksiyonu ile çarpıp integre ederek hesaplayabiliriz.

Dirac delta fonksiyonunun özellikleri şu $t_0=0$ için aşağıdaki şekilde verilebilir.

- $t\,\mathcal{S}(t)=0$
- $\mathcal{S}(-t)=\mathcal{S}(t)$
- $\mathcal{S}(at)=\frac{1}{|a|}\mathcal{S}(t), \quad a\in IR$
- $\mathcal{S}(t^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}[\mathcal{S}(t-a)+\mathcal{S}(t+a)]$,
- $f(t)\mathcal{S}(t-a)=f(a)\mathcal{S}(t-a)$

Dirac delta fonksiyonu $2,3$ ve n boyutlu durumlar içinde genelleştirilebilir. $(x,y), \quad (x_0,y_0)\in IR^2$ ve $\vec{r}=(x,y)$ ve $\overrightarrow{r_0}=(x_0,y_0)$ konum vektörleri olmak üzere

$$\mathcal{S}(x-x_0,y-y_0)\equiv\mathcal{S}(\vec{r}-\overrightarrow{r_0})=\begin{cases}\infty, & r=r_0\\ 0, & r\neq r_0\end{cases} \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca

$$\iint_{\Omega}\mathcal{S}\,(x-x_0,y-y_0)\,dx\,dy=1 \tag{1.10}$$

ve

$$\iint_{\Omega}\mathcal{S}\,(x-x_0,y-y_0)f(x,y)dxdy=f(x_0,y_0) \tag{1.11}$$

olur. Bununla birlikte 2 boyutlu kartezyen koordinatlar için

$$\mathcal{S}(x - x_0, y - y_0) = \mathcal{S}(x - x_0)\mathcal{S}(y - y_0) \tag{1.12}$$

olur.

Benzer şekilde $(x, y, z)$, $(x_0, y_0, z_0) \in IR^3$ ve $\vec{r} = (x, y, z)$ ve $\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ konum vektörleri olmak üzere

$$\mathcal{S}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \equiv \mathcal{S}(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) = \begin{cases} \infty, & r = r_0 \\ 0, & r \neq r_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlanabilir. Benzer şekilde yine

$$\iiint_v \mathcal{S}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\, dx\, dy\, dz = 1 \tag{1.14}$$

ve

$$\iiint_v \mathcal{S}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) f(x, y, z) dx dy dz = f(x_0, y_0, z_0) \tag{1.15}$$

olur. 3 boyutlu kartezyen koordinatlarda da benzer şekilde

$$\mathcal{S}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \mathcal{S}(x - x_0)\mathcal{S}(y - y_0)\mathcal{S}(z - z_0) \tag{1.16}$$

olur (Hassani, 2009).

### 1.1.2. Green özdeşlikleri (Asmar, 2005)

Bu bölümde birinci ve ikinci Green özdeşlikleri olarak bilinen iki önemli formül elde edilecektir.

**Normal Türev**: Eğer $u(x, y)$, $x(t)$ ve $y(t)$ ile parametrize edilmiş bir $C$ eğrisi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ise $\frac{\partial u}{\partial n}$ ile ifade edilen u' nun normal türevi, u'nun birim normal vektörü yönündeki yönlü türevidir. Yani

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u . n = (u_x, u_y) . \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \tag{1.17}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(y'(t), -x'(t))$, $C$ eğrisi üzerindeki normal vektör ve $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ ise normal vektörün normudur.

**Green'in Birinci Özdeşliği**: $\Omega$ çoklu bağlantılı bir bölge ve $\Gamma$ ile sınırlandırılmış olsun. Özellikle dış eğri pozitif yönlü ve iç eğri negatif yönlü olsun. $u(x, y)$ ve $v(x, y)$, $\Omega$ ve onun sınırda ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip olsun. Bu durumda

$$\iint_{\Omega}(u\nabla^2 v + \nabla u \nabla v)dxdy = \int_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\Gamma \tag{1.18}$$

olur. "Eş.1.18'' denklemine Green'in birinci özdeşliği denir.

**Green'in İkinci Özdeşliği:** "Eş.1.18'' de $u(x,y)$ ile $v(x,y)$ yer değiştirilirse

$$\iint_{\Omega}(v\nabla^2 u + \nabla v\,\nabla u)\,dxdy = \int_{\Gamma} v\frac{\partial v}{\partial n}d\Gamma \tag{1.19}$$

elde edilir. "Eş.1.18'' denkleminden "Eş.1.19'' denklemi çıkarılırsa

$$\iint_{\Omega}(u\,\nabla^2 v - v\nabla^2 u)dxdy = \int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma \tag{1.20}$$

elde edilir. "Eş.1.20'' denklemine Green'in ikinci özdeşliği denir.

### 1.1.3. Green fonksiyonu ve temel çözüm

Matematikte bir lineer kısmi türev operatörü L için temel çözüm,

$$LF = -\delta(x - x_0) \tag{1.21}$$

homojen olmayan denklemin çözümüdür. Burada $\delta(x)$ dirac delta fonksiyonudur. Green fonksiyonu ise

$$LG(x, x_0) = -\,\delta(x - x_0) \tag{1.22}$$

denklemi ile birlikte uygun sınır koşullarını da sağlayan bir temel çözümdür. Green fonksiyonu homojen olmayan lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bir araçtır. Bu fikri Laplace operetörü için örneklendirelim.

#### 1.1.3.1. Poisson denkleminin green fonksiyon yardımıyla çözümü

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u \qquad\qquad\quad , & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.23}$$

şeklinde u, sınır boyunca homojen sınır koşullarını sağlasın öyle ki,

$u = u(x)$ ve $x = (x_1, x_2 \ldots . x_n) \in \Omega \subset IR^n$ olsun. Green fonksiyonu $G(x, x_0)$

$$\begin{cases} \nabla^2 G(x, x_0) = -\delta(x - x_0), & x \in \Omega \\ G(x, x_0) \qquad\qquad\quad , & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.24}$$

denkleminin çözümü olsun. Burada $x_0 \in \Omega$ sabit bir nokta ve $G(x, x_0)$ fonksiyonu sınırda "Eş.1.23'' denkleminde verilen aynı sınır koşullarını sağlasın. Bu durumda "Eş.1.23'' de verilen sınır değer probleminin çözümü

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, x_0) f(x_0)\, dx_0 \tag{1.25}$$

olur. Bu sonucu Dirichlet sınır koşulu için kontrol edelim. Sınır değer problemi

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x) &= f(x) \qquad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad\quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.26}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $G(x, x_0)$ Green fonksiyonu

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(x, x_0) &= -\delta(x - x_0) \qquad x \in \Omega \\ G(x, x_0) &= 0 \qquad\qquad\quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.27}$$

şeklinde tanımlanır. "Eş.1.25'' denklemindeki çözüme $\nabla^2$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x) &= \int_{\Omega} \nabla^2 G(x, x_0) f(x_0) dx_0 \\ &= \int_{\Omega} -\delta(x - x_0) f(x_0) dx_0 \\ &= f(x) \end{aligned} \tag{1.28}$$

elde edilir. Ayrıca "Eş.1.25'' denkleminde $G(x, x_0) = 0$ alınırsa $u(x) = 0$ sınır koşulu da sağlanmış olur. Ayrıca "Eş.1.25'' denklemindeki çözüm Neumann veya Robin sınır koşulları içinde doğrulatılabilir.

Bu teknikte diferansiyel operatöre ait temel çözümü bulmak önemlidir. Bu temel çözümü her zaman bulmak kolay olmamak ile birlikte elde edilen çözümdeki integralin hesaplanması da oldukça zor olabilir. Ancak yöntem teorik olarak kesin çözüm verir.

### 1.1.3.2. Temel Çözüm

Bu bölümde Laplace operatörü için temel çözümü $n = 2$ ve $n = 3$ için elde edeceğiz. $\mathbf{x} = (x, y) \in IR^2$ olmak üzere,

$$\nabla^2 u^*(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \qquad x \in IR^2 \tag{1.29}$$

olsun. Laplace denklemi herhangi bir x noktası etrafında bir dönme (rotasyon) altında değişmez. Bu, denklemin **x** noktası etrafındaki bir dönme altında değişmez kalan özel çözümlere sahip olduğunu söyler. Böyle çözümlere rotasyonel simetrik çözümler denir (Çağlayan ve Çelebi, 2010). Bu durumda

$$u^*(\mathbf{x}) = u^*(r), \; r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.30}$$

olmak üzere Laplace operatörü polar koordinatlarda

$$\nabla^2 u^*(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u^*(r)}{\partial r}\right) \tag{1.31}$$

şeklinde olup "Eş.1.29'' denkleminin çözümü için kullanılacaktır. $r = 0$ (yani $\mathbf{x} = 0$) için "Eş.1.31'' denkleminin dirac delta fonksiyonunun tanımından dolayı bir çözümü yoktur. $r > 0$ (yani $\mathbf{x} \neq 0$) için (1.31) denklemi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u^*(r)}{\partial r}\right) = 0 \tag{1.32}$$

olup buradan A, B skaler olmak üzere $u^*(r) = A\ln r + B$ şeklinde elde edilir. B herhangi bir sabit olduğu için $B = 0$ alınabilir. Burada A skalerini belirlemeliyiz. Önce "Eş.1.29'' denklemini Ω bölgesi üzerinde integre edelim. Yani

$$\int_\Omega \nabla^2 u^*(x)\, d\Omega = -\int_\Omega \delta(x)\, d\Omega = -1 \tag{1.33}$$

olur. Diğer taraftan Green'in birinci özdeşliğinde $u = 1$ ve $v = u^*$ alınırsa

$$\int_\Omega \nabla^2 u^*(x)\, d\Omega = \int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \tag{1.34}$$

elde edilir. Sağ taraftaki sınır integral

$$\int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma$$

olur ve bu sınır integrali $x = 0$ merkezli ε yarıçaplı bir daire içinde hesaplarsak

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{A}{\varepsilon} d\Gamma \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A}{\varepsilon}\int_{\Gamma_\varepsilon} 1 d\Gamma \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A}{\varepsilon} 2\pi\varepsilon \\ &= 2\Pi A\end{aligned} \tag{1.35}$$

olur. O halde "Eş.1.33'' ve "Eş.1.35'' denklemleri birbirine eşit olup $A = -\frac{1}{2\pi}$ olarak bulunur. Bu durumda

$$u^* = -\frac{1}{2\pi}\ln r = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1.36}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Ayrıca herhangi $x_0 \in IR^2$ için

$$\nabla^2 u^*(x - x_0) = -\delta(x - x_0) \tag{1.37}$$

şeklinde ifade genelleştirilebilir.

Benzer şekilde

$$\nabla^2 u^*(x) = -\delta(x), \quad x \in IR^3 \tag{1.38}$$

içinde temel çözüm hesaplanabilir. Burada $IR^3$ için kutupsal koordinatlar kullanılırsa Laplace operatörünün tanımı

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u^*(r)}{\partial r}\right) \tag{1.39}$$

olur. $r = 0$ için "Eş.1.39'' denklemi tanımsız olup $r > 0$ için

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u^*(r)}{\partial r}\right) = 0 \tag{1.40}$$

olur ve buradan

$$u^*(r) = -\frac{A}{r} + B \tag{1.41}$$

şeklinde hesaplanabilir. Yine $B = 0$ alınırsa temel çözüm

$$u^*(r) = -\frac{A}{r} \tag{1.42}$$

olur. Denklem "Eş.1.38'', $\Omega \subset IR^3$ bölgesinde integre edilirse

$$\int_\Omega \nabla^2 u^* d\Omega = \int_\Omega -\delta(x)\, d\Omega = -1 \tag{1.43}$$

elde edilir. Yine Green'in birinci özdeşliğinden

$$\int_\Omega \nabla^2 u^* d\Omega = \int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma \tag{1.44}$$

olur. Bu sınır integrali $x = 0$ merkezli $\varepsilon$ yarıçaplı küre içinde hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{A}{\varepsilon^2}\, d\Gamma \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A}{\varepsilon^2} \int_{\Gamma_\varepsilon} 1\, d\Gamma \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 \\ &= 4\pi A \end{aligned} \tag{1.45}$$

elde edilir. "Eş.1.43'' ile "Eş.1.45'' denklemlerinin eşitliğinden $A = -\frac{1}{4\pi}$ bulunur. Bu değer "Eş.1.42'' de yerine yazılırsa temel çözüm

$$u^*(r) = \frac{1}{4\pi r} \tag{1.46}$$

şeklinde elde edilir.

Burada r, i konsantre kaynağın uygulama noktasından bu noktaya ilişkin bütün noktalara olan uzaklıktır.

Kutupsal koordinatlarda N boyutlu Laplace denklemi,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{N-1} \frac{\partial u}{\partial r}) \tag{1.47}$$

şeklindedir. Bu denklem $N = 2$ için,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r. \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + r. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right]$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \tag{1.48}$$

şeklindeki iki boyutlu Laplace denklemidir.

$N = 3$ için,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2. \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \left[ 2r. \frac{\partial u}{\partial r} + r^2. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right]$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \tag{1.49}$$

şeklinde üç boyutlu Laplace denklemi elde edilir. Bu ise küresel koordinatlar yardımıyla aşağıdaki gibi kolayca gösterilebilir.

Üç boyutlu Laplace denklemi için,

$$\nabla^2 u^* = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} = -\Delta_i \tag{1.50}$$

olup buradan,

$$\int_\Omega (\nabla^2 u^*) \, d\Omega = \int_\Omega -\Delta_i d\Omega \tag{1.51}$$

olur. Dirac delta fonksiyonunun özelliğinden dolayı eşitliğin sağ tarafı

$$\int_\Omega -\Delta_i d\Omega = -1 \tag{1.52}$$

dir. Eşitliğin sol tarafı ise Green özdeşliğinden,

$$\int_\Omega 1. \nabla^2 u^* \, d\Omega = \int_\Gamma 1. \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma - \int_\Omega \nabla u^* \nabla(1) \, d\Omega \tag{1.53}$$

şeklindedir. Burada,

$$\int_\Omega \nabla u^* \nabla(1) \, d\Omega = 0 \tag{1.54}$$

dir. O halde,

$$\int_\Omega \nabla^2 u^* \, d\Omega = \int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma \tag{1.55}$$

olup kürenin yüzeyinde $n \equiv r$ olduğuna dikkat edilmelidir. Burada

$$\int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma = \int_\Gamma \frac{-1}{4\Pi r^2} \, d\Gamma$$

$$= \frac{-1}{4\Pi r^2} \int_\Gamma 1 \, d\Gamma$$

$$= \frac{-1}{4\Pi r^2} . 4\Pi r^2$$

$$= -1$$

olup eşitlik sağlanmış olur. Benzer şekilde iki boyutlu Laplace denklemi için,

$$\nabla^2 u^* = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} = -\Delta_i \qquad (1.56)$$

olur; aşağıdaki integral hesaplandığında,

$$\int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma = \int_\Gamma \frac{-1}{2\Pi r}\, d\Gamma = \frac{-1}{2\Pi r}\int_\Gamma 1\, d\Gamma = -1$$

olur ve sağlandığı görülür.

# 2. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ (BEM)

Sınır elemanları yöntemi (SEY) sınır değer problemlerini çözmek için iyi kurulmuş bir sayısal yöntemdir. Yöntem, bu tip problemler için geçerli olan sonlu fark ve sonlu elemanlar yöntemine önemli avantajları ile birlikte iyi bir alternatif sunar. Tekniğin ana fikri hem bir bölge içinde hem de bu bölgenin sınırında bilinmeyen davranışı tanımlayan orijinal diferansiyel denklemi yalnızca sınırda eşdeğer bir integral denkleme dönüştürmesidir. Bu integral denklemi sınırda bilinmeyen çözümleri ve bunların normal türevlerini içerir. SEY' in temel avantajı bölgenin sınırı üzerinde çalışıyor olmasıdır. Diğer bir deyişle, SEY sadece sınırı ayrıklaştıran ve problemin tanımlı olduğu bölgeye bağlı olarak problemin boyutunu bir boyut azaltan bir yöntemdir. Böylece, problemin bölgesinin tamamını ayrıklaştırmayı gerektiren yöntemler ile karşılaştırıldığında bu yöntemin uygulanması sonucunda daha küçük bir sistem elde edilir. Elde edilen bu sisteme daha sonra sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi yine sınır koşulları uygulanabilir. Sonuç olarak, çözüm, bilgisayarın hesaplama zamanında ve bilgilerin depolanmasında önemli tasarruf sağlanarak çok verimli bir şekilde elde edilir. Yöntemin diğer bir avantajı ise serbest ve hareketli yüzey problemleri ve klasik alan yöntemlerinin uygun olmadığı sonsuz bölgelerde tanımlanan problemler için uygun olmasıdır.

## 2.1. Poisson Denklemi için Sınır Elemanları Yöntemi

Bu bölümde sınır elemanları yöntemi (Leveque, 2007; Reddy ve Gartling, 2010) kitaplarında yapıldığı gibi sınır integral denklemi inşa edilerek açıklanacaktır. Öncelikle iki boyutlu Poisson denklemini gerekli (Dirichlet) ve/veya doğal (Neumann) sınır koşulları ile

$$\nabla^2\Phi = b(x,y), \quad (x,y)\epsilon\Omega$$

$$\Phi = \bar{\Phi}, \qquad (x,y)\epsilon\,\Gamma_1 \tag{2.1}$$

$$q = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \bar{q}, \quad (x,y)\epsilon\Gamma_2$$

şeklinde ele alalım. Burada $\nabla^2$ Laplace operatörü ve $b(x,y)$ ise koordinatlara bağlı olan ve bilinen bir sağ taraf fonksiyonudur. n, normal yönündeki birim vektör ve $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ olacak şekilde $\Omega$ bölgesinin sınırını temsil eder. $\bar{\Phi}(x,y)$ ve $\bar{q}(x,y)$ ise $\Phi$ ve q fonksiyonları için sınırda bilinen fonksiyonlardır. Genellikle, gerçek ancak bilinmeyen u ve q değerleri yerine yaklaşık fonksiyonlar kulanılırsa çözümler bir hata ile elde edilirler. Ancak bu hatalar ağırlık fonksiyonları ile ortogonelleştirilerek en aza indirgenebilir. Diğer bir deyişle $\varepsilon$ kalan olmak üzere "Eş.2.1'' denklemi,

$$\nabla^2\hat{\Phi} - b = \varepsilon_\Omega$$
$$\hat{\Phi} - \bar{\Phi} = \varepsilon_{\Gamma_1} \qquad (2.2)$$
$$\hat{q} - \bar{q} = \varepsilon_{\Gamma_2}$$

şeklinde olur. Burada $\hat{\Phi}$ ve $\hat{q}$ yaklaşık değerlerdir. Bu kalan terimlerin, $w_\ell, \overline{w_\ell}, \overline{\overline{w_\ell}}$ ağırlık fonksiyonları kullanılarak zayıf ağırlıklandırılmış kalan ifadesi,

$$\int_\Omega \varepsilon_\Omega w_\ell \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \varepsilon_{\Gamma_1} \overline{w_\ell} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \varepsilon_{\Gamma_2} \overline{\overline{w_\ell}} \, d\Gamma = 0 \qquad (2.3)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$\Gamma_1$'de $\overline{w_\ell} = \frac{\partial w_\ell}{\partial n}$ ve $\Gamma_2$'de $\overline{\overline{w_\ell}} = -w_\ell$ şeklinde alınıp bu değerler "Eş.2.3'' denkleminde yerine yazıldığında

$$\int_\Omega (\nabla^2\hat{\Phi} - b)\omega_\ell \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\hat{\Phi} - \bar{\Phi}) \frac{\partial \omega_\ell}{\partial n} - \int_{\Gamma_2} (\hat{q} - \bar{q})\omega_\ell \, d\Gamma = 0 \qquad (2.4)$$

olur. Bu prosedürdeki amaç kalan terimlerini sıfır olmaya zorlamaktır. Green' in birinci özdeşliği "Eş.1.18'' de $u = \omega_\ell$, $v = \hat{\Phi}$ alınarak uygulanır ve "Eş.2.4'' denklemi düzenlenirse,

$$\int_\Omega b\omega_\ell \, d\Omega = \int_\Gamma \omega_\ell \frac{\partial \hat{\emptyset}}{\partial n} d\Gamma - \int_\Omega \nabla\omega_\ell \nabla\hat{\Phi} \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \left(\hat{\Phi} - \bar{\Phi}\right) \frac{\partial \omega_\ell}{\partial n} d\Gamma$$
$$- \int_{\Gamma_2} (\hat{q} - \bar{q}) \, \omega_\ell d\Gamma \qquad (2.5)$$

elde edilir. "Eş.2.5''denkleminde $\hat{q} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}$ , $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ kullanılırsa,

$$\int_\Omega b w_\ell d\,\Omega = \int_{\Gamma_1} \hat{q} w_\ell \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \hat{q} w_\ell \, d\Gamma$$

$$-\int_{\Omega}\nabla w_{\ell}\nabla\hat{\Phi}\,d\Omega+\int_{\Gamma_1}\left(\hat{\Phi}-\overline{\Phi}\right)\frac{\partial w_{l}}{\partial n}d\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_2}\hat{q}\,w_{\ell}\,d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\overline{q}\,w_{\ell}\,d\Gamma \qquad (2.6)$$

olur. Denklem "Eş.2.6'' düzenlenirse,

$$\int_{\Omega}bw_{\ell}d\,\Omega=\int_{\Gamma_1}w_{\ell}\hat{q}\,d\Gamma-\int_{\Omega}\nabla w_{\ell}\nabla\,\hat{\Phi}d\Omega+\int_{\Gamma_1}\left(\hat{\Phi}-\overline{\Phi}\right)\frac{\partial w_{l}}{\partial n}d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\overline{q}\,w_{\ell}\,d\Gamma \qquad (2.7)$$

olur. Şimdide "Eş.1.18'', $u=\hat{\Phi}$, $v=w_{\ell}$ alınarak uygulanırsa,

$$\int_{\Omega}\hat{\Phi}\,(\nabla^2 w_{\ell})d\Omega=\int_{\Gamma}\hat{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma-\int_{\Omega}\nabla w_{\ell}\nabla\hat{\Phi}\,d\Omega \qquad (2.8)$$

olur. Denklem "Eş.2.8'' den,

$$-\int_{\Omega}\nabla w_{\ell}\nabla\,\hat{\Phi}d\Omega=\int_{\Omega}\hat{\Phi}\,\nabla^2 w_{\ell}\,d\Omega-\int_{\Gamma}\hat{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma \qquad (2.9)$$

olup bu ifade "Eş.2.7'' denkleminde yerine yazılırsa,

$$\int_{\Omega}bw_{\ell}d\,\Omega=\int_{\Gamma_1}w_{\ell}\,\hat{q}d\Gamma+\int_{\Omega}\hat{\Phi}(\,\nabla^2 w_{\ell})\,d\Omega-\int_{\Gamma}\hat{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_1}\left(\hat{\Phi}-\overline{\Phi}\right)\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\overline{q}\,w_{\ell}\,d\Gamma \qquad (2.10)$$

elde edilir.

Şimdi de "Eş.2.10'' denklemindeki $\Gamma$ 'yı $\Gamma_1$ ve $\Gamma_2$ olarak parçalayalım.

$$\int_{\Omega}bw_{\ell}d\,\Omega=\int_{\Gamma_1}w_{\ell}\hat{q}\,d\Gamma+\int_{\Omega}\hat{\Phi}\,\nabla^2 w_{\ell}\,d\Omega\;-\int_{\Gamma_1}\hat{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma-\int_{\Gamma_2}\hat{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_1}\hat{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma-\int_{\Gamma_1}\overline{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\overline{q}\,w_{\ell}\,d\Gamma \qquad (2.11)$$

olur. Denklem düzenlenirse,

$$\int_{\Omega}bw_{\ell}d\,\Omega=\int_{\Omega}\hat{\Phi}\,(\nabla^2 w_{\ell})\,d\Omega+\int_{\Gamma_1}\hat{q}\,w_{\ell}d\Gamma-\int_{\Gamma_2}\hat{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_1}\overline{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\overline{q}\,w_{\ell}\,d\Gamma \qquad (2.12)$$

bulunur. $\Gamma_1$ ve $\Gamma_2$ integralleri toparlanırsa,

$$\int_{\Omega}bw_{\ell}d\,\Omega=\int_{\Omega}\hat{\Phi}\,(\nabla^2 w_{\ell})\,d\Omega+\int_{\Gamma_1}\left(w_{\ell}\hat{q}-\overline{\Phi}\,\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}\right)\,d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_2}\left(w_{\ell}\overline{q}-\hat{\Phi}\frac{\partial w_{\ell}}{\partial n}\right)d\Gamma \qquad (2.13)$$

elde edilir.

## 2.2. Temel Çözüm (Brebbia, 1978)

Sınır elemanları yöntemi için başlangıç noktası, elde edilen "Eş.2.15'' denklemidir. Metodun amacı elde edilen bu denklemdeki bütün bölge integrallerini sınır integrallerine dönüştürmektir. Bunu yapabilmek için özel bir ağırlık fonksiyonu tipi olan $u^*$ kullanılır ve $u^*$ fonksiyonuna "temel çözüm" denir. Sınır elemanları yöntemindeki anahtar işlem, problemi tanımlayan diferansiyel denklemi sağlayan temel çözümün bulunabilmesidir.

Bir $i$ kaynak noktasından üretilen ve yayılan alanı ifade etmek için $u^*$ temel çözümü kullanılır. Bu i kaynak noktasında meydana gelen alanın etkisi herhangi bir sınır koşulunu dikkate almaksızın sonsuza kadar yayılır. Bu sebepten dolayı temel çözüm aşağıdaki Poisson denklemini

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \tag{2.14}$$

sağlar. Bir önceki bölümde elde edilen "Eş.2.12'' denkleminde,

$$\hat{\Phi} = u\,, \quad w_\ell = u^*, \quad \frac{\partial w_\ell}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial n} = q^*, \quad \bar{\Phi} = \bar{u}, \quad b = 0, \quad \hat{q} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = q$$

yazılırsa,

$$\int_\Omega u \nabla^2 u^* \, d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \tag{2.15}$$

elde edilir. Elde edilen son denklemde sol taraf bir bölge integrali ve sağ taraf tamamen sınır integrallerini içermektedir. "Eş.2.15'' denklemi düzenlenirse,

$$\nabla^2 u^* = -\Delta_i$$

$$u \nabla^2 u^* = -\Delta_i u \tag{2.16}$$

olarak alındığında,

$$\int_\Omega u \nabla^2 u^* \, d\Omega = -\int_\Omega \Delta_i u d\Omega = -u_i \tag{2.17}$$

yazılabilir. Bu son ifade ile birlikte $\frac{\partial u^*}{\partial n} = q^*$ alındığında, "Eş.2.15'' denklemi

$$u_i + \int_{\Gamma_2} u q^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} u^* \bar{q} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} u^* q \, d\Gamma \tag{2.18}$$

şeklini alır. Burada, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ olmak üzere

$$\int_\Gamma u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* \, d\Gamma \tag{2.19}$$

ve

$$\int_{\Gamma} u^* q \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} u^* \overline{q} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u^* q \, d\Gamma \tag{2.20}$$

alınırsa, "Eş.2.18'' denklemi

$$u_i + \int_{\Gamma} u \, q^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q \, d\Gamma \tag{2.21}$$

şeklinde daha basit bir formda ifade edilebilir. Bu denklem Ω bölgesinin içindeki herhangi bir i noktasında geçerlidir. Bu sebeple bu denkleme "iç nokta denklemi" denir. Ancak, sınırdaki noktalar için farklı bir denkleme ihtiyaç vardır.

## 2.3. Sınır İntegrali Denklemi (Brebbia, 1978)

Bir önceki bölümde bölge içerisinde bir iç nokta için "Eş.2.21'' sınır integral denklemi elde edildi. i noktası sınır üzerinde olduğu zaman iç nokta denklemi kullanılamaz. Bu denklem yerine sınır noktaları için integral denklemi kullanmak gerekir. Bunun için sınırda bir i noktasının mevcut olduğu kabul edilir. Problemin tanımlı olduğu bölge iki boyutlu ise i noktasının bölgesi ε yarıçaplı bir daire ile üç boyutlu ise ε yarıçaplı bir küre ile genişletildiği "Eş.2.1'' deki gibi kabul edilir.

Bu durumda i noktası ε yarıçaplı bir dairenin veya kürenin merkezinde olacak ve bir iç nokta için yapılan hesaplamalar $\varepsilon \to 0$ için limitler alınarak hesaplanabilecektir. İlk aşamada "Eş 2.21''iç nokta denklemini,

$$u_i + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u q^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u q^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u^* q \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* q \, d\Gamma \tag{2.22}$$

şeklinde ele alalım. "Eş.2.22'' içinde yer alan sınır integralleri üç boyutlu bölge için,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* q \, d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{4\pi\varepsilon} q \right) d\Gamma$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} q \int_{\Gamma_\varepsilon} 1 \, . \, d\Gamma$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon} q \, 2\pi\varepsilon^2 \right)$$

$$= 0 \, , \tag{2.23}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \, q^* d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{\Gamma_\varepsilon} u \left( \frac{-1}{4\pi\varepsilon^2} \right) d\Gamma \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} u \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} u \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} 2\pi\varepsilon^2$$

$$= -\frac{1}{2} u \qquad (2.24)$$

ve iki boyutlu bölge için,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* q \, d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) q \, d\Gamma$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) q \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) q \, \Pi \, \varepsilon$$

$$= 0 \ , \qquad (2.25)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \, q^* d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{\Gamma_\varepsilon} u \left(\frac{-1}{2\pi\varepsilon}\right) d\Gamma \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} u . \left(\frac{-1}{2\pi\varepsilon}\right) \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} u \, . \left(\frac{-1}{2\pi\varepsilon}\right) . \pi\varepsilon$$

$$= \frac{-1}{2} u \qquad (2.26)$$

şeklinde hesaplanır. Bu değerler "Eş.2.22'' denkleminde yerine yazıldığında

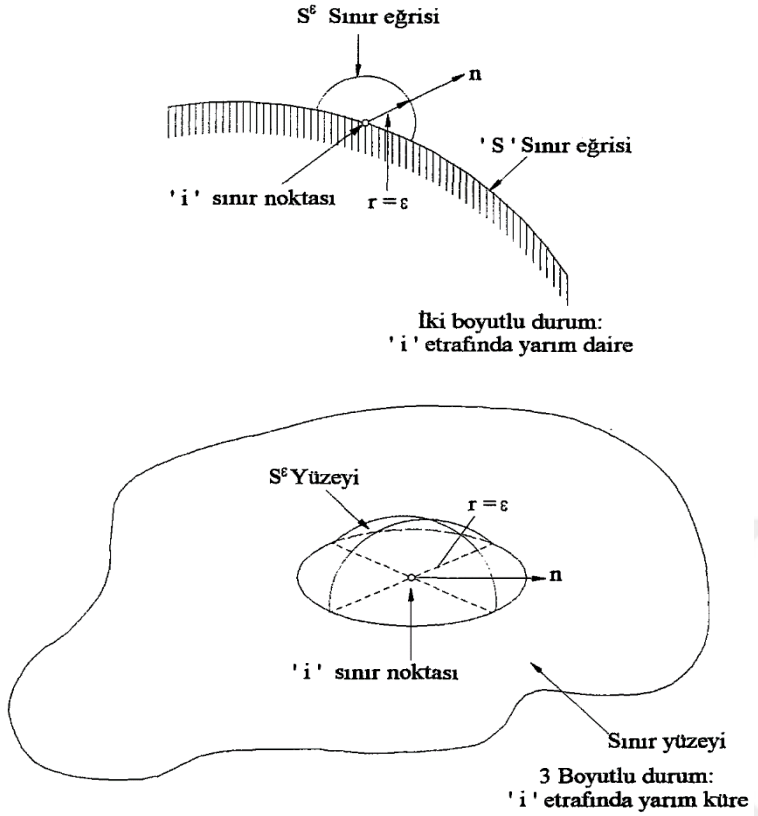
$$\frac{1}{2} u_i + \int_\Gamma u \, q^* d\Gamma = \int_\Gamma u^* q \, d\Gamma \qquad (2.27)$$

elde edilir. "Eş.2.27'' denklemine sınır noktaları için integral denklemi denir.

## 2.4. Laplece Denklemi için Sınır Elemanları Yöntemi (Brebbia, 1978)

Sınır elemanları yöntemi iki aşamalı çözümü olan bir yöntemdir. Öncelikle verilen sınır şartlarına bağlı olarak,

$$\frac{1}{2} u_i + \int_\Gamma u \, q^* d\Gamma = \int_\Gamma u^* q \, d\Gamma \qquad (2.28)$$




Şekil 2.1. İki ve üç boyutlu durumlar için sınır noktalar (Partridge ve ark., 1992).

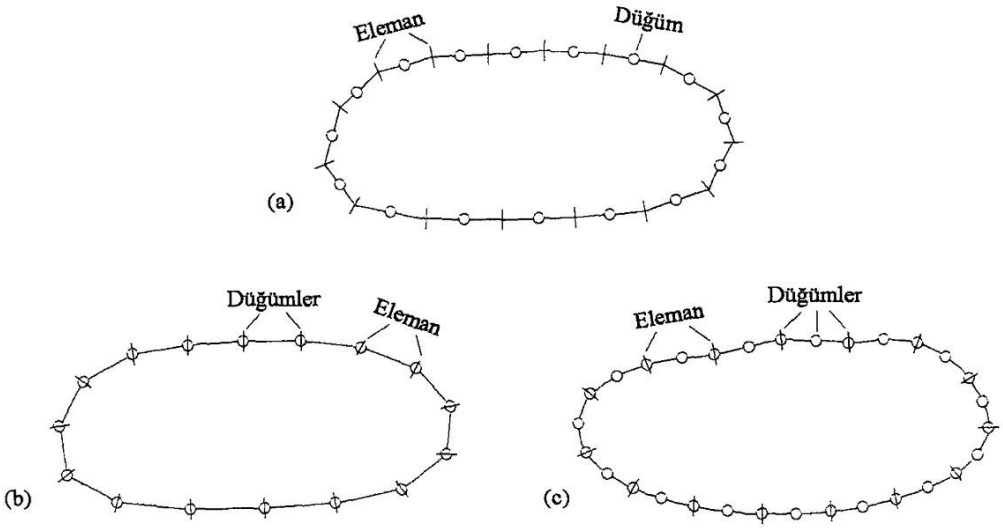
Denklemi kullanılarak sınırda bilinmeyen noktalar için çözüm elde edilir. Sonrasında bu bilgiler yardımıyla

$$u_i = \int_\Gamma q u^* \, d\Gamma - \int_\Gamma u \, q^* d\Gamma \qquad (2.29)$$

kullanılarak bölgenin içerisinde istenilen noktalarda çözüm elde edilir. Şimdi öncelikle sınır üzerindeki değerlerin bulunabilmesi için "Eş.2.28'' denkleminin, bir sınır denklem sistemi elde etmek için nasıl parçalandığını ve düğüm noktalarının nasıl elde edildiğini inceleyelim. Basitçe izah edebilmek için iki boyutlu bir bölge alınacak ve bölgenin sınırı N elemana bölünecektir.

Problemin tanımlandığı bölgenin sınırı parçalandıktan sonra elde edilen her bir parçaya "eleman" denir. Bilinmeyen değerlerin olduğu noktaya "düğümler" denir. Farklı tiplerde sınır elemanı kullanılarak bu yöntem ile çözümler elde edilebilir. Örneğin; sabit, lineer ve karesel elemanlar alınabilir. Sabit elemanlarda düğümler elemanın tam ortasında alınır Şekil 2.2-a. Lineer elemanda düğümler elemanın uç

noktalarında alınırken Şekil 2.2-b karesel elemanda düğümler elemanın uç noktalarında ve tam ortasında alınır Şekil 2.2-c. Bu çalışmada yalnızca sabit eleman kullanılacağı için burada sadece bu eleman incelenecektir.




Şekil 2.2. Farklı tiplerdeki sınır elemanları: a) Sabit elemanlar, b) Lineer elemanlar, c) Karesel elemanlar (Partridge ve ark., 1992).

## 2.5. Sabit Elemanlar (Brebbia, 1978)

Sabit elemanlı sınır elemanları yönteminde sınırın N sayıda elemana parçalandığı kabul edilir. Bu durumda "Eş.2.27'' denklemi herhangi bir i düğüm noktası için verilen sınır şartlarını kullanmadan önce

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} uq^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} qu^* d\Gamma \qquad (2.30)$$

şeklinde yazılabilir. Burada her elemanın üzerindeki u ve q değerleri eleman boyunca sabit ve bu değerlerin elemanın ortasındaki düğüm değerine eşit olduğu kabul edilir. Elemanın uçlarındaki noktalar sadece problemin geometrisinin tanımı için kullanılır. Burada u ve q değerleri her zaman sabit olduğu için integralin dışına alınarak,

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^{N} u_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N} q_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \qquad (2.31)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $u_j$ ve $q_j$, j. elemanın u ve q değerlerini temsil etmektedir.

Bu durumda "Eş.2.31'' denklemi içerisinde sadece $\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma$ ve $\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$ integrallerinin hesaplanması gerekir. Bu integraller temel çözümün uygulandığı i düğüm noktası ile herhangi bir j elemanı üzerindeki ilişkiyi verir. Bu sebeple bu integrallerin değerleri bazen "etki katsayıları" olarak isimlendirilir. Genel olarak bu integraller için $\overline{H_{ij}}$ ve $G_{ij}$ notasyonları kullanılarak ifade edilir, öyle ki

$$\overline{H_{ij}} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \tag{2.32}$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \tag{2.33}$$

şeklindedir. Burada $q^*$ ve $u^*$ notasyonları aslında i. düğüm ile j. eleman üzerindeki düğüm arasındaki ilişkiyi vermektedir. Bu notasyonlar kullanıldığında "Eş.2.31'' denklemi özel bir i noktası için

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^{N} \overline{H_{ij}}\, u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\, q_j \tag{2.34}$$

formunu alır. Sol taraftaki $u_j$ terimlerini tek bir katsayı ile ifade etmek için

$$H_{ij} = \overline{H_{ij}} + \frac{1}{2}\delta_j \tag{2.35}$$

kullanılırsa "Eş.2.34'' denklemi

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij}\, u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\, q_j \tag{2.36}$$

formunu alır. Burada $\delta$, kronecher delta olup H matrisinin girdileri,

$$H_{ii} = \begin{cases} \overline{H_{ij}}\,, & i \neq j \\ \overline{H_{ij}} + \frac{1}{2}\,, & i = j \end{cases} \tag{2.37}$$

şeklindedir. "Eş.2.36'' denklemi sınırda herhangi bir "i" noktası için yazılmış olup sınırdaki 1'den N' ye kadar bütün noktalar için yazılırsa bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sisteminin matris formu

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq} \tag{2.38}$$

şeklinde olur. Burada $\mathbf{H}$ ve $\mathbf{G}$ matrisleri girdileri, $H_{ij}$ ve $G_{ij}$ olan $N \times N$ tipinde karesel matrislerdir. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{q}$ ise sınır koşullarına bağlı olarak, u'nun ve u'nun normal türevlerinin bilinen ve bilinmeyen değerlerini içeren $N \times 1$ tipinde vektörlerdir. Burada dikkat edilecek olursa $\Gamma_1$ üzerindeki u'nun $N_1$ ve $\Gamma_2$ üzerindeki q'nun $N_2$ değeri

bilinmektedir ($N = N_1 + N_2$'dir). Dolayısıyla "Eş.2.38'' sistemi içerisinde $\Gamma_2$ üzerinde u'nun $N_2$ tane ve $\Gamma_1$ üzerindeki q'nun değeri $N_1$ tane bilinmez. Yani, **H** ve **G** matrislerinin sütunlarının bilinen ve bilinmeyen değerler için bir taraftan diğer tarafa taşınarak yeniden düzenlenmesiyle

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{By}' \tag{2.39}$$

gibi bir sistem elde edilir. Burada **A** ve **B** matrisleri $N \times N$ tipinde karesel matrisler olup sütunlarını **H** ve **G** matrislerinin sırasıyla bilinmeyen ve bilinen değeri için mevcut olan sütunları oluşturmaktadır. **x** vektörü $N \times 1$ tipinde olup bilinmeyen u ve q değerlerini içerirken $\mathbf{y}'$ vektörü ise $N \times 1$ tipinde olup bilinen u ve q değerlerini içerir. Daha basit bir formda ifade etmek için

$$\mathbf{By}' = \mathbf{y} \tag{2.40}$$

alınırsa "Eş.2.38'' sistemi

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{2.41}$$

şeklinde bir sistem olarak ifade edilebilir. Elde edilen "Eş.2.41'' sistemi çözüldüğü zaman problemin tanımlı olduğu bölgenin sınırı üzerindeki u fonksiyonunun ve onun normal türevinin bilinmeyen bütün değerleri bulunabilir. Bu aşamadan sonra bölgenin içindeki herhangi bir noktadaki u değeri ve u'nun türevini hesaplamak mümkündür. Bunu yapmak için "Eş.2.21'' iç nokta denklemi kullanılır. "Eş.2.21'' denklemi, bölge içerisindeki bir i noktası ile sınırdaki N düğüm noktası arasındaki ilişkiyi vermektedir. Denklem "Eş.2.21'' içerisindeki u ve q değerleri sınırdaki değerler olup hepsi bilinmektedir. Sınır yine N parçaya ayrıldığında yine her bir parça üzerindeki $u_j$ ve $q_j$ değerlerinin sabit olduğu gerçeği kullanıldığında denklem "Eş.2.42''

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} q_j \int_{\Gamma_j} u^* \, d\Gamma - \sum_{j=1}^{N} u_j \int_{\Gamma_j} q^* \, d\Gamma \tag{2.42}$$

şeklinde yazılabilir. Yine "Eş.2.42'' denklemi içerisinde yer alan integraller,

$$\overline{H_{ij}} = \int_{\Gamma_j} q^* \, d\Gamma \tag{2.43}$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* \, d\Gamma \tag{2.44}$$

şeklinde yazıldığında denklem "Eş.2.42''

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^{N} \overline{H_{ij}} u_j \tag{2.45}$$

ifade edilebilir. Buradaki $G_{ij}$ ve $\overline{H_{ij}}$ katsayı matrislerinin girdileri içerideki her bir iç nokta için tekrar hesaplanır. İçeride alınacak M nokta için $\mathbf{G}$ ve $\overline{\mathbf{H}}$ matrisleri $M \times N$ tipinde matrisler, $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{u}$ vektörleri $M \times 1$ tipinde vektörlerdir. "Eş.2.45'' denkleminin sağ tarafındaki bütün matrisler ve vektörler bilinen değerler içerdiği için basit matris vektör çarpımı ile bölge içerisindeki u fonksiyonunun istenilen bütün değerleri hesaplanabilir. İstenilirse her iki kartezyen yönündeki iç akıların (q) değerleri,

$$q_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.46}$$

$$q_y = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.47}$$

Denklem "Eş.2.21'' in her iki yöndeki türevleri alınarak,

$$(q_x)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$$

$$= \int_\Gamma q \frac{\partial u^*}{\partial x}\, d\Gamma - \int_\Gamma u \frac{\partial q^*}{\partial x}\, d\Gamma$$

$$(q_y)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i$$

$$= \int_\Gamma q \frac{\partial u^*}{\partial y}\, d\Gamma - \int_\Gamma u \frac{\partial q^*}{\partial y}\, d\Gamma$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki hesaplar sadece $u^*$ ve $q^*$ temel çözümleri üzerinden yapılır (Brebbia, 1978). Bu integralin hesabı nümerik olarak yapılır. Fakat bu hesapları yapmak biraz zordur. Bunun yerine daha kolay bir yöntem olan Karşılıklı Sınır Elamanları Yöntemi (KSEY) kullanılabilir.

## 2.6. Sınır İntegrallerin Hesaplanması (Brebbia, 1978)

$G_{ij}$ ve $\overline{H_{ij}}$ katsayıları $i \neq j$ için nümerik integral formülleri ile hesaplanabilir. $i = j$ olduğunda temel çözümlerindeki singülerite sebebi ile daha doğru bir integral şemasına ihtiyaç duyulur. Sabit elemanlar için $\overline{H_{ii}}$ ve $G_{ii}$ katsayıları analitik olarak

hesaplanabilir. Uzaklık vektörü $\vec{r}$ ile normal vektörü $\vec{n}$ daima birbirine dik oldukları için $\overline{H_{ii}}$ katsayıları sıfırdır. Yani,

$$\overline{H_{ii}} = \int_{\Gamma_i} q^* \, d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u^*}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma$$

$$= 0 \qquad (2.48)$$

$G_{ii}$ integrali analitik olarak hesaplanabilir. İki boyutlu eleman için,

$$G_{ii} = \int_{\Gamma_i} u^* \, d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \, d\Gamma \qquad (2.49)$$

şeklindedir. Yukarıda ki integrali hesaplamak için koordinat değişimi kullanılabilir. Öyle ki,

$$(1)\text{————————}(0)\text{————————}(2)$$
$$\xi = -1 \qquad \xi = 0 \qquad \xi = 1$$

şeklinde $\xi$ koordinatları kullanılabilir. Bu durumda "Eş.2.49'' denklemi

$$G_{ii} = \frac{1}{2\Pi} \int_{(1)}^{(2)} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma$$

$$= \frac{1}{2\Pi} \cdot 2 \int_{(0)}^{(2)} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma$$

$$= \frac{1}{\Pi} \int_{(0)}^{(2)} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma \qquad (2.50)$$

olur. Burada, $r = \| \frac{\ell}{2} \xi \|$ için $d\Gamma = dr = \frac{\ell}{2} d\xi$ olmak üzere,

$$G_{ii} = \frac{1}{\Pi} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{\ell\xi}\right) \frac{\ell}{2}$$

$$= \frac{\ell}{2\Pi} \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{2}{\ell}\right) - \ln(\xi)\right] \, d\xi$$

$$= \frac{\ell}{2\Pi} \left[\ln\left(\frac{2}{\ell}\right) \int_0^1 d\xi - \int_0^1 \ln(\xi) d\xi\right]$$

$$= \frac{\ell}{2\Pi} \left[\ln\left(\frac{2}{\ell}\right) - \int_0^1 \ln(\xi) d\xi\right]$$

$$= \frac{\ell}{2\Pi}\left[\ln\left(\frac{2}{\ell}\right) - (-1)\right]$$

$$= \frac{\ell}{2\Pi}\left[\ln\left(\frac{2}{\ell}\right) + 1\right] \quad (2.51)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $G_{ij}$ ve $\overline{H_{ij}}$ katsayılarını $i \neq j$ için hesaplayalım. Bu aşamada vektörler için kullanılan i, j notasyonu yerine karışıklık olmaması için e, f notasyonuna geçilecektir. Bu durumda

$i \longrightarrow e$, $j \longrightarrow f$ için iki boyutlu Laplace denklemi için temel çözüm,

$$u^* = \frac{1}{2\Pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\Pi}\ln(r)$$

$$= -\frac{1}{2\Pi}\ln|\vec{r} - \vec{r_f}| \quad (2.52)$$

şeklinde ifade edilir. Temel çözümün normal türevi ise,

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial n}$$

$$= -\frac{1}{2\Pi}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\ln(r)\cdot\frac{1}{r}\left(r_x\cdot\cos(n\cdot x) + r_y\cdot\cos(n\cdot y)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\Pi}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}\left(r_x\cdot\cos(n\cdot x) + r_y\cdot\cos(n\cdot y)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\Pi}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot(r_x\cdot\cos(n\cdot x) + r_y\cdot\cos(n\cdot y)$$

$$= -\frac{1}{2\Pi}\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_f}|^2}\left(\left(r_x, r_y\right)\cdot(\cos(n\cdot x), \cos(n\cdot y))\right)$$

$$= -\frac{1}{2\Pi}\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_f}|^2}\left((\vec{r} - \vec{r_f})\cdot\vec{n}\right) \quad (2.53)$$

olarak elde edilir. O halde "Eş.2.52'' ve "Eş.53''eşitlikleri kullanılarak $\bar{\mathbf{H}}$ ve $\mathbf{G}$ matrislerinin girdileri,

$$\overline{H_{fe}} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_e}\frac{(\vec{r}-\vec{r_f}).\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r_f}|^2}d\Gamma \quad (2.54)$$

$$G_{fe} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_e}\ln|\vec{r} - \vec{r_f}|\,d\Gamma \quad (2.55)$$

şeklinde ifade edilir.

## 2.7. Uygulama Problemi

Bu problem Sınır Elemanları Yöntemini örneklendirmek amacıyla burada verilmiştir. Problemi ifade eden diferansiyel denklem Laplace denklemi olup Şekil 2.3 de verildiği gibi kare bir bölge üzerinde tanımlanmıştır.

Üst ve alt duvarda Dirichlet tipinde sınır koşulları verilirken düşey duvarlarda Neumann tipinde sınır koşulları verilmiştir. Problemin çözümü için önce SEY katsayılar matrisleri elde edilecek ve sonrasında bu matrisler yardımıyla elde edilen lineer denklem sistemi çözülecektir. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Uygulama problemi,

$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 \le x.y \le 1$$

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(x,1) = 100 \qquad 0 \le x \le 1$$

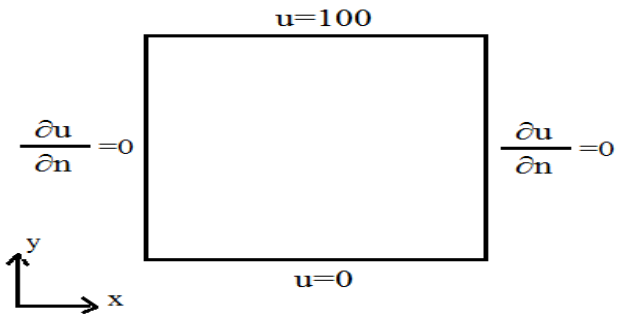
$$q(0,y) = 0 \qquad 0 \le y \le 1$$

$$q(1,y) = 0 \qquad 0 \le y \le 1$$

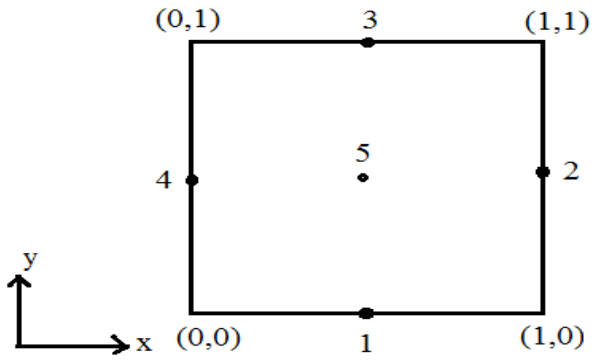
şeklinde tanımlanabilir. Bu problemin analitik çözümü

$$u(x,y) = 100y$$

olup sınır koşulları bu çözüm yardımıyla elde edilmiştir. Yukarıdaki tanımlı problemde basit bir örnek olması açısından Şekil 2.4'deki gibi sınırlarda birer sabit eleman kullanılacaktır.




Şekil 2.3. Problemin tanım bölgesi.




Şekil 2.4. Sınırların sabit eleman kullanılarak ayrıklaştırılması.

Uygulanan prosedür sonucunda sınırlarda ve $(0.5,0.5)$ noktasında çözüm elde edilecektir. Her bir duvarda birer tane sabit eleman kulanıldığı için sınır koşullarının kullanılması ile birlikte u ve q vektörleri,

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 100 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Sınırda bilinmeyen **u** ve **q** değerlerinin hesaplanabilmesi için "Eş.2.37'', "Eş.2.48'' ve "Eş.2.54'' eşitlikleri ile **H** matrisi ve "Eş.2.51'' ve "Eş.2.55'' eşitlikleri ile **G** matrisi

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0{,}500 & -0{,}176 & -0{,}147 & -0{,}176 \\ -0{,}176 & 0{,}500 & -0{,}176 & -0{,}147 \\ -0{,}147 & -0{,}176 & 0{,}500 & -0{,}176 \\ -0{,}176 & -0{,}147 & -0{,}176 & 0{,}500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0{,}269 & 0{,}053 & -0{,}006 & 0{,}053 \\ 0{,}053 & 0{,}269 & 0{,}053 & -0{,}006 \\ -0{,}006 & -0{,}053 & 0{,}269 & 0{,}053 \\ 0{,}053 & -0{,}006 & -0{,}053 & 0{,}500 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $\bar{\mathbf{H}}$ ve **G** matrislerinin köşegen elemanları

$$\overline{H_{11}} = \overline{H_{22}} = \overline{H_{33}} = \overline{H_{44}} = 0$$

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = G_{44} = 0{,}269$$

şeklindedir. Ayrıca simetriden dolayı,

$$\overline{H_{12}} = \overline{H_{21}} = \overline{H_{23}} = \overline{H_{32}} = \overline{H_{34}} = \overline{H_{43}} = \overline{H_{41}} = \overline{H_{14}} = -0{,}176$$
$$\overline{H_{13}} = \overline{H_{31}} = \overline{H_{24}} = \overline{H_{42}} = -0{,}147$$
$$G_{12} = G_{21} = G_{23} = G_{32} = G_{34} = G_{43} = G_{41} = G_{14} = 0{,}053$$
$$G_{13} = G_{31} = G_{24} = G_{42} = -0{,}006$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu durumda,

$$\mathbf{Hu} = \begin{bmatrix} 0{,}500 & -0{,}176 & -0{,}147 & -0{,}176 \\ -0{,}176 & 0{,}500 & -0{,}176 & -0{,}147 \\ -0{,}147 & -0{,}176 & 0{,}500 & -0{,}176 \\ -0{,}176 & -0{,}147 & -0{,}176 & 0{,}500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 100 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Gq} = \begin{bmatrix} 0{,}269 & 0{,}053 & -0{,}006 & 0{,}053 \\ 0{,}053 & 0{,}269 & 0{,}053 & -0{,}006 \\ -0{,}006 & -0{,}053 & 0{,}269 & 0{,}053 \\ 0{,}053 & -0{,}006 & -0{,}053 & 0{,}500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup,

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq}$$

eşitliği yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

sistemi elde edilir öyle ki,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}269 & -0{,}176 & 0{,}006 & -0{,}176 \\ -0{,}053 & 0{,}500 & -0{,}053 & -0{,}147 \\ 0{,}006 & -0{,}176 & -0{,}269 & -0{,}176 \\ -0{,}053 & -0{,}147 & -0{,}053 & 0{,}500 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

dir. Sistemin sağ taraf vektörü ise

$$\mathbf{b} = \mathbf{By}'$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}500 & 0{,}053 & 0{,}147 & 0{,}053 \\ 0{,}176 & 0{,}269 & 0{,}176 & -0{,}006 \\ 0{,}147 & 0{,}053 & -0{,}500 & 0{,}053 \\ 0{,}176 & -0{,}006 & 0{,}176 & 0{,}269 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14{,}700 \\ 17{,}600 \\ -50{,}00 \\ 17{,}600 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sistem çözüldüğünde sınırda bilinmeyen **u** ve **q** değerlerini içeren x vektörü,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -117{,}3655 \\ 49{,}9397 \\ 117{,}9072 \\ 49{,}9397 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, bilinmeyen **u** ve **q** değerleri,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 49{,}9397 \\ 100 \\ 49{,}9397 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -117{,}3655 \\ 0 \\ 117{,}9072 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. İç nokta $(0.5,0.5)$ te bilinmeyen u değerini hesaplamak amacıyla iç noktalar için **H** ve **G** katsayılar matrislerini hesaplayalım. Yine simetriden dolayı,

$$\overline{\mathrm{H}_{11}} = \overline{\mathrm{H}_{12}} = \overline{\mathrm{H}_{13}} = \overline{\mathrm{H}_{14}} = -0{,}250$$

$$\mathrm{G}_{11} = \mathrm{G}_{12} = \mathrm{G}_{13} = \mathrm{G}_{14} = 0{,}0893$$

olup,

$$\mathbf{u}_{\text{iç}} = \mathbf{Hu} - \mathbf{Gq}$$

eşitliğinden,

$$u_5 = [0{,}0893\ 0{,}0893\ 0{,}0893\ 0{,}0893\ ]\begin{bmatrix}-117{,}3655\\0\\117{,}9072\\0\end{bmatrix}$$

$$-[-0{,}250\ -0{,}250\ -0{,}250\ -0{,}250]\begin{bmatrix}0\\49{,}9397\\100{,}000\\49{,}9397\end{bmatrix}$$

$$= 0{,}5417 + 49{,}96985 = 50{,}5116$$

olur. Bu problemin bilinmeyen noktalardaki analitik çözümleri

$$u_{\text{Analitik}} = \begin{bmatrix}0\\50\\100\\50\end{bmatrix}$$

$$q_{\text{Analitik}} = \begin{bmatrix}-100\\0\\100\\0\end{bmatrix}$$

$$u_{\text{Analitik}}(0.5,0.5) = 50$$

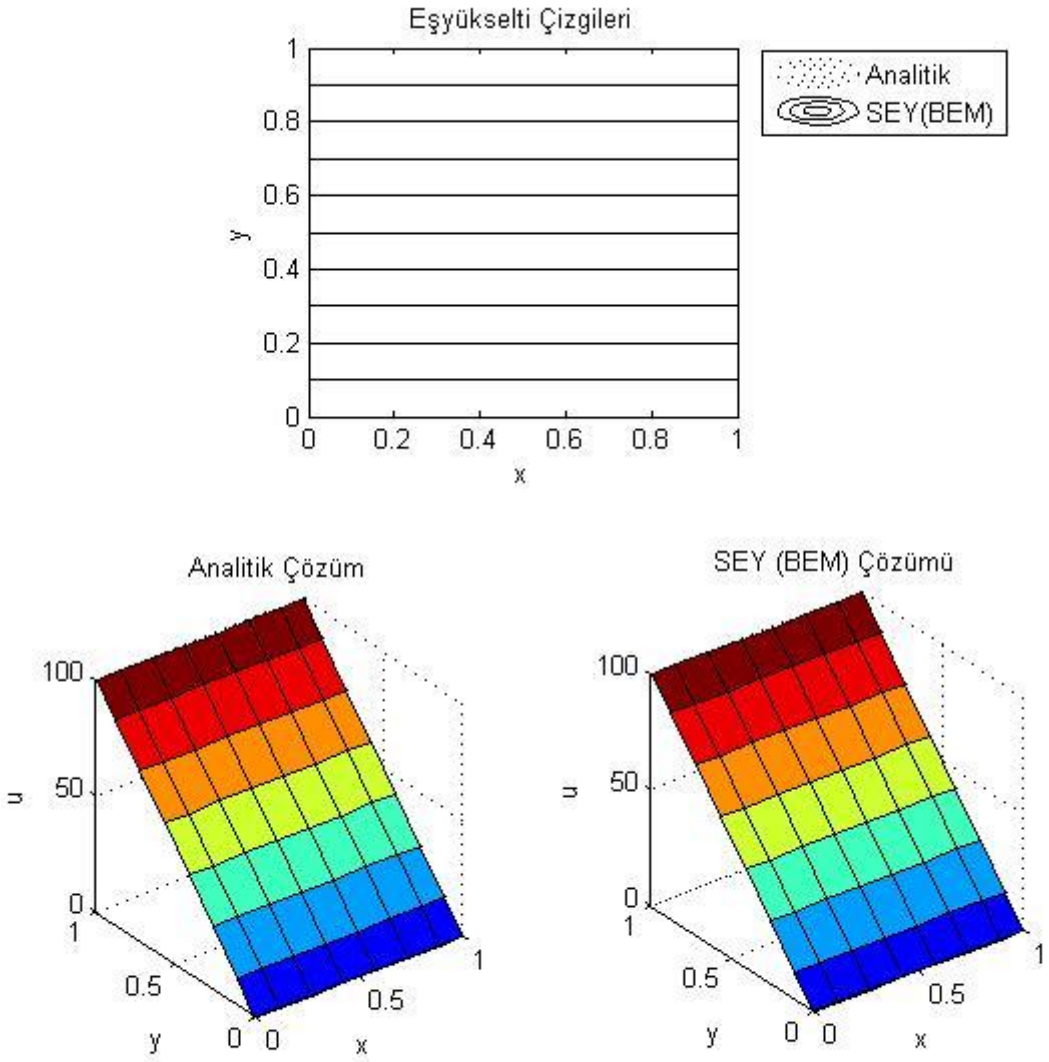
şeklindedir. Görüldüğü gibi **u** değerleri oldukça iyi hesaplanırken **q** değerleri çok daha az memnun edicidir. Ancak elde edilen çözümler için sadece dört sabit eleman kullanılmış olup eleman sayısını artırarak daha iyi çözümler elde edilebilir.

Grafiksel çözümler farklı sabit eleman sayısı kullanılarak Şekil 2.5, Şekil 2.6, Şekil 2.7 de sırasıyla $52,\ 68,84$ eleman kullanılarak ve analitik çözümler ile karşılaştırılarak verilmiştir. Verilen sonuçlar için maksimum mutlak hata

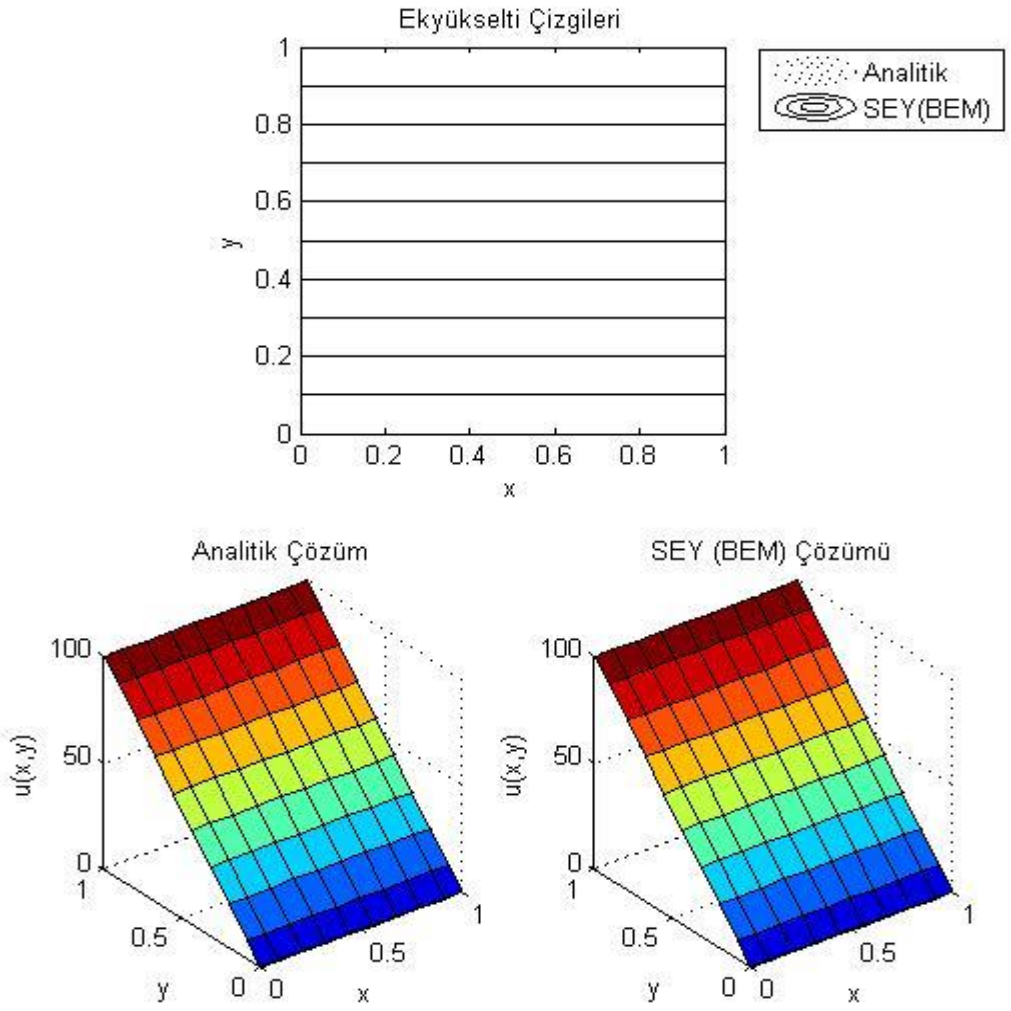
$$\max_i |u_{\text{Nümerik}}(i) - u_{\text{Analitik}}(i)| \leq 10^{-5} \qquad i = 1, \dots, N + L$$

şeklinde alınmıştır.

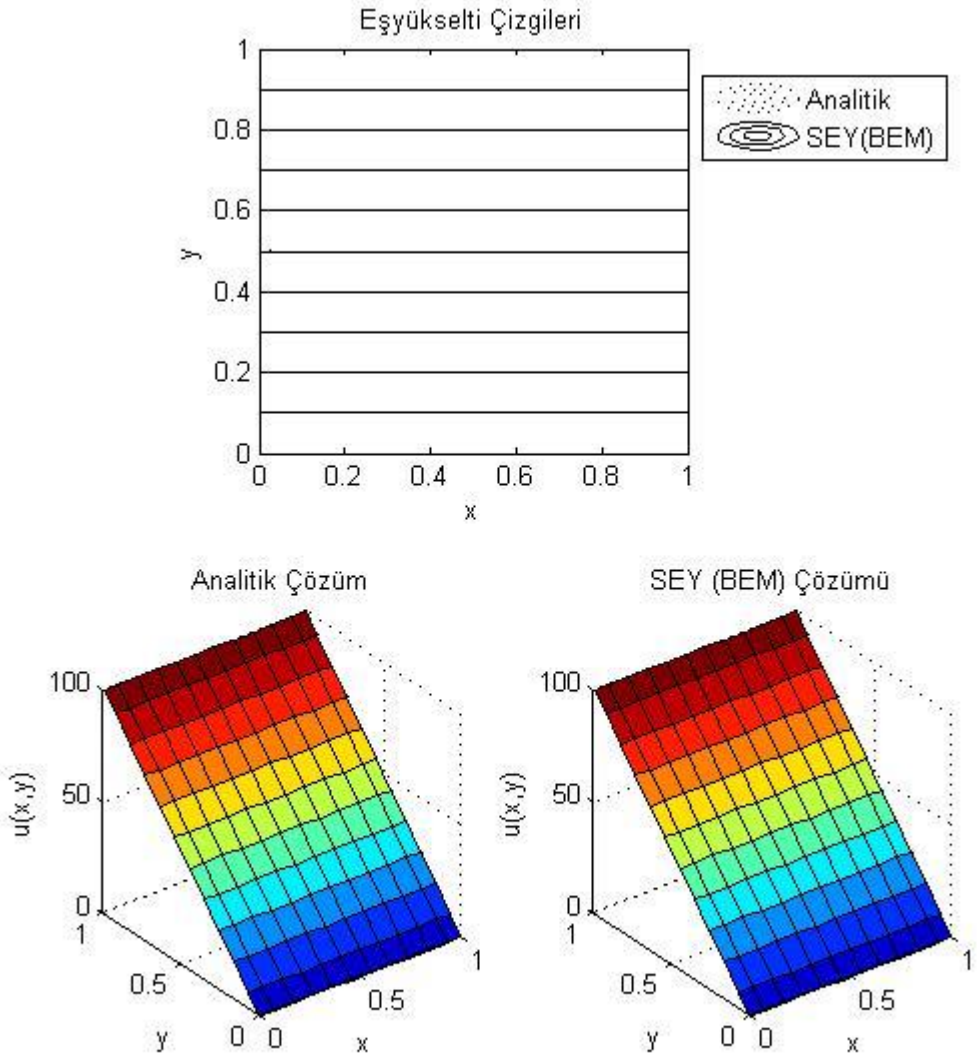
Şekillerden görüldüğü üzere az sayıda sınır elemanı kullanılarak elde edilen çözümler bile oldukça iyidir. Eleman sayısını arttırmak şekillerin daha düzgün elde edilmesine yardımcı olur ancak matris boyutlarını arttıracağı için ekstra hesaplama yükü getirecektir.




Şekil 2.5. Laplace denkleminin $N + L = 52 + 36$ için SEY (BEM) çözümü.




Şekil 2.6. Laplace denkleminin $N + L = 68 + 64$ için SEY (BEM) çözümü.




Şekil 2.7. Laplace denkleminin $N + L = 84 + 100$ için SEY (BEM) çözümü.

# 3. KARŞILIKLI SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Bu bölümde, karşılıklı sınır elemanları yöntemi sağ tarafı sadece bölgede yer alan noktaların koordinatlarına bağlı bir fonksiyon olan Poisson denklemi için sınır integrali inşa edilecektir.

## 3.1. Poisson Denklemi için Formülasyon (Partridge ve ark., 1992)

Daha önceki bölümde sınır elemanları yöntemi,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= b(x,y), && (x,y)\epsilon\Omega \\ u(x,y) &= \bar{u}(x,y), && (x,y)\epsilon\,\Gamma_1 \\ q(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}(x,y), && (x,y)\epsilon\Gamma_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

için açıklandı. Sonrasında sağ taraftaki homojen olmayan terim $b = 0$ alınarak Laplace denklemi için inşa edildi. $b \neq 0$ olması durumunda ise Laplace denkleminde olduğu gibi ağırlıklı kalan formülasyonu uygulandığında,

$$\int_\Omega (\nabla^2 u - b)\, u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q})\, u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u})\, q^*\, d\Gamma \tag{3.2}$$

bulunur. “Eş.3.2’’ denklemine iki defa kısmi integrasyon prosedürü uygulandığında,

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla^2 u^*) u\, d\Omega - \int_\Omega b u^*\, d\Omega = &- \int_{\Gamma_2} \overline{q}\, u^*\, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q\, u^*\, d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_2} u\, q^*\, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \overline{u}\, q^*\, d\Gamma \end{aligned} \tag{3.3}$$

denklemi elde edilir. Laplace denkleminin temel çözümü $u^*$, denklem “Eş.3.3’’ içine yerleştirilip bütün sınır terimleri birlikte gruplandığında,

$$c_i u_i + \int_\Gamma u q^*\, d\Gamma + \int_\Omega b u^*\, d\Omega = \int_\Gamma q\, u^*\, d\Gamma \tag{3.4}$$

olur. Burada $b$ fonksiyonu bilinen durumundadır. Burada amaç homojen olmayan terimden kaynaklı bölge integralini yine sınır integraline çevirmektir. “Eş.3.1’’ denkleminin çözümü

$$u = \tilde{u} + \hat{u} \tag{3.5}$$

şeklinde olup, homojen denklemin yani Laplace denkleminin çözümü $\tilde{u}$ ve özel çözüm $\hat{u}$' in toplamı şeklinde yazılabilir öyle ki,

$$\nabla^2 \hat{u} = b \tag{3.6}$$

şeklindedir. Ancak genellikle $\hat{u}$ özel çözümünü lineer olmayan veya zamana bağlı problemlerde bulmak oldukça zordur. Karşılıklı sınır elemanları yönteminde tek bir $\hat{u}$ fonksiyonu kullanmak yerine bir seri $\hat{u}_j$ özel çözümleri kullanır. $\hat{u}_j$ özel çözümlerinin sayısı problemde kullanılan toplam nokta sayısına eşittir. Eğer N tane sınır düğümü ve L tane iç nokta var ise $N + L$ tane $\hat{u}_j$ değeri vardır. b fonksiyonu için

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \tag{3.7}$$

şeklinde bir yaklaşım kullanılır. Burada, $\alpha_j$ başlangıçta bilinmeyen katsayılar ve $f_j$ yaklaşım fonksiyonlarıdır. $\hat{u}_j$ özel çözümleri ve $f_j$ fonksiyonları arasında

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \tag{3.8}$$

şeklinde bir ilişki kurulur. $f_j$ fonksiyonları problemin geometrisine bağlı fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar için herhangi bir kısıtlama mevcut olmayıp farklı tipteki fonksiyonlar kullanılabilir. Kullanılan her farklı $f_j$ fonksiyonu için "Eş.3.8'' deki ilişkiyi sağlayacak şekilde farklı $\hat{u}_j$ fonksiyonları belirlenmelidir. "Eş.3.8'' denklemi "Eş.3.7'' denkleminde yerine yazıldığında,

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \nabla^2 \hat{u}_j \tag{3.9}$$

elde edilir. "Eş.3.9'' denklemi de "Eş.3.1'' denkleminde yerine yazılırsa,

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \nabla^2 \hat{u}_j \tag{3.10}$$

şeklinde bir eşitlik elde edilir. Elde edilen bu son denklem de eşitliğin her iki tarafında Laplace operatörü bulunmaktadır. "Eş.3.10'' denklemi için artık sınır elemanları yöntemi uygulanabilir. "Eş.3.10'' denklemi Laplace denkleminin temel çözümü ile çarpılır ve $\Omega$ bölgesinde integrali alınırsa,

$$\int_\Omega (\nabla^2 u) u^* \, d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_\Omega \left(\nabla^2 \hat{u}_j\right) u^* \, d\Omega \tag{3.11}$$

elde edilir. "Eş.3.11'' denklemindeki Laplace terimlerinin bir önceki bölümdeki gibi kısmi integralleri alındığında her bir i noktası için

$$c_i u_i + \int_\Gamma q^* u \, d\Gamma - \int_\Gamma u^* q \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[ c_i \hat{u}_{ij} + \int_\Gamma q^* \hat{u}_j \, d\Gamma - \int_\Gamma u^* \hat{q}_j \, d\Gamma \right] \tag{3.12}$$

elde edilir. Burada,

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial n} \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlıdır öyle ki **n**, Γ yüzeyinin normalidir. Bu tanım

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \tag{3.14}$$

şeklinde genişletilebilir. Dikkat edilecek olursa "Eş.3.12'' denklemi bölge integrali içermez. Sağ taraf terimi b yerine eşdeğer olan sınır integrali yerleştirilmiştir. "Eş.3.12'' denklemi, "Eş.3.11'' denkleminin her iki tarafına sınır elemanları yöntemi fikri uygulanarak elde edildiği için yöntem karşılıklı sınır elemanları yöntemi (DRBEM) olarak isimlendirilir. Sınır elemanları yönteminde olduğu gibi bir sonraki adım "Eş.3.12'' denklemini ayrıklaştırılmış formda yazmaktır. Bunun için sınır parçalara ayrılır ve sınır integrali yerini toplam ifadelerine bırakır. Böylece bir i kaynak noktası için,

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} q^* u \, d\Gamma - \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} u^* q \, d\Gamma =$$
$$\sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[ c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} q^* \hat{u}_j \, d\Gamma - \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} u^* \hat{q}_j \, d\Gamma \right] \tag{3.15}$$

ifadesi elde edilir. Burada, f fonksiyonu başlangıçta tanımlandığında $\hat{u}$ ve $\hat{q}$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlardır. Dolayısıyla, $\hat{u}$ ve $\hat{q}$ fonksiyonlarının her bir sınır elemanı üzerindeki değişimleri için u ve q fonksiyonlarında olduğu gibi interpolosyon fonksiyonlarının ve noktasal değerlerinin kullanıldığı bir yaklaşıma gerek yoktur. O halde "Eş.3.15'' denklemi

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^{N} u_k \int_{\Gamma_k} q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^{N} q_k \int_{\Gamma_k} u^* d\Gamma =$$
$$\sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[ c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^{N} \hat{u}_{kj} \int_{\Gamma_k} q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^{N} \hat{q}_{kj} \int_{\Gamma_k} u^* d\Gamma \right] \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, sınır elamanları yönteminde elde edilen aynı **H** ve **G** matrisleri "Eş.3.16'' denklemindeki eşitliğin her iki tarafı için tanımlanabilir. Her bir sınır elemanı üzerindeki integraller alındığında "Eş.3.16'' denklemi

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^{N} \overline{H_{ik}} \, u_k - \sum_{k=1}^{N} G_{ik} \, q_k =$$
$$\sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[ c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^{N} \overline{H_{ik}} \, \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^{N} G_{ik} \, \hat{q}_{kj} \right] \tag{3.17}$$

şeklinde sadece noktasal değerler olarak ifade edilebilir. Burada k indeksi sınır düğümleri için kullanılır. Sınırdaki her bir düğüm noktası için "Eş.3.17'' denklemi yazıldığında sınır elemanları yöntemine benzer şekilde

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\mathbf{H}\hat{u}_j - \mathbf{G}\hat{q}_j\right) \tag{3.18}$$

şeklinde matris form elde edilir. Burada her bir $\hat{u}_j$ ve $\hat{q}_j$ vektörleri $\widehat{\mathbf{U}}$ ve $\widehat{\mathbf{Q}}$ matrislerinin birer sütunu olarak alındığında "Eş.3.18'' denklemi toplam sembolleri olmaksızın

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = (\mathbf{H}\widehat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\widehat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} \tag{3.19}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{H}$ ve $\mathbf{G}$ matrisleri $N \times N$ tipinde, $\widehat{\mathbf{U}}$ ve $\widehat{\mathbf{Q}}$ matrisleri $N \times (N + L)$ tipinde matrislerdir, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{q}$ vektörleri $N \times 1$ tipinde ve $\boldsymbol{\alpha}$ vektörü $(N + L) \times 1$ tipinde vektörlerdir. Denklem "Eş.3.19'' karşılıklı sınır elemanları yöntemi için bir tabandır ve sadece sınırın ayrıklaştırılmasıyla elde edilmiştir.

## 3.2. İç Noktalar (Partridge ve ark., 1992)

İç noktalar istenilen sayıda ve istenilen lokasyonlarda tanımlanabilir. İç bölgedeki çözümler hangi noktalarda istenilirse o noktalar için yapılır. Genellikle, iç noktaların tanımlanması sınırda çözümler elde etmek için gerekli bir şart değildir. Ancak, çözümler genellikle bir miktar iç nokta kullanıldığında çok daha doğru olacaktır. İç noktaların hesaplanması yine sınır elemanları yönteminde olduğu gibi "Eş.3.17'' denkleminde $c_i$=1 alınarak

$$\begin{aligned} u_i = &- \sum_{k=1}^{N} \overline{H_{ik}}\, u_k + \sum_{k=1}^{N} G_{ik}\, q_k \\ &+ \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[\hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^{N} H_{ik}\, \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^{N} G_{ik}\, \hat{q}_{kj}\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

şeklinde iç noktalar denklemi elde edilir. Denklem "Eş.3.20''

$$\mathbf{I}u_i = \mathbf{Gq} - \mathbf{Hu} + \left[\mathbf{I}\hat{u}_i + \mathbf{H}\widehat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\widehat{\mathbf{Q}}\right]\boldsymbol{\alpha} \tag{3.21}$$

şeklinde matris vektör formunda yazılabilir. Dış ve iç noktalar için elde edilen denklemleri şemalar yardımıyla sırasıyla,

$$\underbrace{[\mathbf{H}]}_{N\times N}\underbrace{[\mathbf{u}]}_{N\times 1} - \underbrace{[\mathbf{G}]}_{N\times N}\underbrace{[\mathbf{q}]}_{N\times 1} = \left[\underbrace{[\mathbf{H}]}_{N\times N}\ \underbrace{\left[\widehat{\mathbf{U}}\right]}_{N\times(N+L)} - \underbrace{[\mathbf{G}]}_{N\times N}\ \underbrace{\left[\widehat{\mathbf{Q}}\right]}_{N\times(N+L)}\right]\underbrace{[\boldsymbol{\alpha}]}_{(N+L)\times 1}$$

ve

$$\underbrace{[\mathbf{I}]}_{L\times L}\underbrace{[\mathbf{u}]}_{L\times 1} = \underbrace{[\mathbf{G}]}_{L\times N}\underbrace{[\mathbf{q}]}_{N\times 1} - \underbrace{[\mathbf{H}]}_{L\times N}\underbrace{[\mathbf{u}]}_{N\times 1} + \left[\underbrace{[\mathbf{H}]}_{L\times N}\ \underbrace{\left[\widehat{\mathbf{U}}\right]}_{N\times(N+L)} - \underbrace{[\mathbf{G}]}_{L\times N}\ \underbrace{\left[\widehat{\mathbf{Q}}\right]}_{N\times(N+L)}\right]\underbrace{[\boldsymbol{\alpha}]}_{(N+L)\times 1} + \underbrace{[\mathbf{I}]}_{L\times L}\underbrace{[\hat{\mathbf{u}}]}_{L\times(N+L)}\underbrace{[\boldsymbol{\alpha}]}_{(N+L)\times 1}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ayrıca denklem "Eş.3.19'' ve denklem "Eş.3.21'' de elde edilen sistemler mevcut matris ve vektörler genişletilerek birleştirilebilir ve

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{H_B}}_{N\times N} & \underbrace{\mathbf{0}}_{N\times L} \\ \underbrace{\mathbf{H_i}}_{L\times N} & \underbrace{\mathbf{I}}_{L\times L} \end{bmatrix}}_{(N+L)\times(N+L)} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{u_B}}_{N\times 1} \\ \underbrace{\mathbf{u_i}}_{L\times 1} \end{bmatrix}}_{(N+L)\times 1} - \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{G_B}}_{N\times N} & \underbrace{\mathbf{0}}_{N\times L} \\ \underbrace{\mathbf{G_i}}_{L\times N} & \underbrace{\mathbf{0}}_{L\times L} \end{bmatrix}}_{(N+L)\times(N+L)} \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{q_B}}_{N\times 1} \\ \underbrace{\mathbf{q_i}}_{L\times 1} \end{bmatrix}}_{(N+L)\times 1} =$$

$$\left[\begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{H_B}}_{N\times N} & \underbrace{\mathbf{0}}_{N\times L} \\ \underbrace{\mathbf{H_i}}_{L\times N} & \underbrace{\mathbf{I}}_{L\times L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{\hat{u}_B}}_{N\times(N+L)} \\ \underbrace{\mathbf{u_j}}_{L\times(N+L)} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{G_B}}_{N\times N} & \underbrace{\mathbf{0}}_{N\times L} \\ \underbrace{\mathbf{G_i}}_{L\times N} & \underbrace{\mathbf{0}}_{L\times L} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{\hat{Q}_B}}_{N\times(N+L)} \\ \underbrace{\mathbf{0}}_{L\times(N+L)} \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} \underbrace{\boldsymbol{\alpha}}_{(N+L)\times 1} \end{bmatrix}$$

şeklinde hem sınır noktaları hem de iç noktalar için verilen denklemleri kapsayan tek bir form verilebilir.

### 3.3. α Vektörü (Partridge ve ark., 1992)

$\boldsymbol{\alpha}$ vektörü $\mathbf{b}$ vektörü için yapılan,

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \tag{3.22}$$

yaklaşımı içerisinde yer alan başlangıçta bilinmeyen bir vektör olup mevcut bilgiler ile hesaplanabilir. "Eş.3.22'' denklemi $N + L$ farklı noktada değerlendirildiğinden elde edilen denklem sistemi

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} \tag{3.23}$$

şeklinde matris formunda ifade edilebilir. Burada $\mathbf{F}$ matrisinin her bir kolonu $\vec{\mathbf{f}_j}$ vektörlerinden oluşur öyle ki $\vec{\mathbf{f}_j}$ vektörleri $f_j$ fonksiyonlarının $N + L$ noktadaki değerlerini içermektedir. Burada değerlendirilen

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{3.24}$$

vektörü koordinatlara bağlı bilinen bir vektördür. $\boldsymbol{\alpha}$ vektörünü elde etmek için "Eş.3.23'' denklemi

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.25}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\boldsymbol{\alpha}$ artık bilinen $\mathbf{F}$ matrisi ve $\mathbf{b}$ vektörü ile kolaylıkla hesaplanabilir. Bir önceki bölümde elde edilen

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = \left(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}\right)\boldsymbol{\alpha} \tag{3.26}$$

denkleminde yerine yazıldığında,

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = \mathbf{d} \tag{3.27}$$

olur, öyle ki

$$\mathbf{d} = \left(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}\right)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.28}$$

denklemi elde edilir. Burada "Eş.3.27'' denkleminin sağ tarafı bilinen matris ve vektörlerden oluşmaktadır. Bu durumda basit matris vektör çarpımıyla **d** vektörü elde edilebilir. Sınır koşulları uygulandığında sınır elemanları yönteminde olduğu gibi **H** ve **G** matrislerinin sütunları bilinen ve bilinmeyen **u** ve **q** değerlerine bağlı olarak bir taraftan diğer tarafa taşınarak yeniden düzenlenebilir. Bu durumda

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{By}' + \mathbf{d} \tag{3.29}$$

gibi bir sistem elde edilir. "Eş.3.29'' denklemi daha basit bir formda yazılırsa

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{3.30}$$

olur, öyle ki

$$\mathbf{y} = \mathbf{By}' + \mathbf{d} \tag{3.31}$$

şeklinde olur. Burada **x** vektörü sınırda bilinmeyen **u** ve **q** değerlerini içermektedir.

### 3.4. Farklı f Açılımları (Partridge ve ark., 1992)

Karşılıklı sınır elemanları yönteminde kullanılan û özel çözümü, onun normal türevi olan q̂ ve û ile ilişkili yaklaşım fonksiyonu olan f üzerinde, **F** matrisinin tekil olmaması dışında herhangi bir sınırlama yoktur. Bu çalışmada amaç **F** matrisinin tersi olacak şekilde f fonksiyonlarını seçmek ve sonrasında û özel çözümleri ile arasındaki ilişkiyi kullanıp û ve q̂ fonksiyonlarını hesaplamaktır. Bu amaçla çok fazla tipte fonksiyon kullanılabilir ancak burada basit olması açısından uzaklık fonksiyonu olan r açıklamalarda kullanılacaktır. Özel çözümler ile f arasındaki ilişki

$$\nabla^2 \hat{u} = f \tag{3.32}$$

olup kutupsal koordinatlardaki iki boyutlu Laplace denklemi kullanıldığında

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \hat{u}}{\partial r}\right) = f \tag{3.33}$$

şeklini alır. Eğer $f = r$ alınırsa,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \hat{u}}{\partial r}\right) = r \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \hat{u}}{\partial r}\right) = r^2$$

$$r\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} = \frac{r^3}{3} \Longrightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} = \frac{r^2}{3}$$

$$\hat{u} = \frac{r^3}{9} \tag{3.34}$$

olur. r uzaklık fonksiyonunun tanımını hatırlayacak olursak $\left(\vec{r} - \vec{r_f} = \left(r_x, r_y\right)\right)$,

$$r = |\vec{r} - \vec{r_f}|$$

$$= \sqrt{{r_x}^2 + {r_y}^2}$$

$$= \sqrt{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2} \tag{3.35}$$

şeklindedir. Burada,

$$r^2 = {r_x}^2 + {r_y}^2 \tag{3.36}$$

olup $r_x$ ve $r_y$, r vektörünün sırasıyla x ve y yönündeki koordinatlarıdır. Böylece $\hat{q}$ fonksiyonu,

$$\hat{q} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}$$

$$= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n}$$

$$= \frac{\partial \hat{u}}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial n} \tag{3.37}$$

şeklinde yazılabilir. “Eş.3.36’’ denkleminden,

$$2r\frac{\partial r}{\partial n} = 2r_x\frac{\partial r_x}{\partial n} + 2r_y\frac{\partial r_y}{\partial n}$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{r}\left(r_x\frac{\partial r_x}{\partial n} + r_y\frac{\partial r_y}{\partial n}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(r_x\cos(n,x) + r_y\cos(n,y)\right) \tag{3.38}$$

olur. “Eş.3.38’’ ifadesi, “Eş.3.37’’ denkleminde yerine yazıldığında

$$\hat{q} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{r^2}{3} \cdot \frac{1}{r}\left(r_x \cos(n,x) + r_y \cos(n,y)\right)$$

$$= \frac{r}{3}\left(r_x \cos(n,x) + r_y \cos(n,y)\right) \tag{3.39}$$

şeklinde normal türev elde edilir. Eğer $f = 1 + r$ alınırsa,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \hat{u}}{\partial r}\right) = 1 + r$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \hat{u}}{\partial r}\right) = r + r^2$$

$$r\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} = \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} = \frac{r}{2} + \frac{r^2}{3}$$

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \tag{3.40}$$

ve

$$\hat{q} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}$$

$$= \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$= \left(\frac{r}{2} + \frac{r^3}{3}\right) \cdot \frac{1}{r}\left(r_x \cos(n,x) + r_y \cos(n,y)\right)$$

$$= \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{3}\right)\left(r_x \cos(n,x) + r_y \cos(n,y)\right) \tag{3.41}$$

şeklinde olur.

## 3.5. $\nabla^2 u = b\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ Tipinde Denklemler için Karşılıklı Sınır Elemanları Yöntemi (Partridge ve ark., 1992)

Bu bölümde homojen olmayan terimin farklı durumları için metodu inşa edeceğiz.

$$\nabla^2 u = b(x, y, u) \tag{3.42}$$

denklemi Laplace terimine ek olarak u değişkenin bir fonksiyonunu içerebilir. Bu durumda denklem lineer veya lineer olmayan bir denklem olabilir. Karşılıklı sınır

elemanları yönteminde lineer olmayan problemler iteratif teknikler gerektirir. Başlangıç olarak gerekli temel ilişkileri verebilmek için basit durumlar incelenecektir.

$$\nabla^2 \mathrm{u} = -\mathrm{u} \tag{3.43}$$

Bu ilk durumda $\mathrm{b} = -\mathrm{u}$ olarak tanımlanmıştır. Bu durumda,

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \tag{3.44}$$

olur.

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \left(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}\right)\boldsymbol{\alpha} \tag{3.45}$$

denkleminde yerine yazılacak olursa

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \left(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}\right)(-\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u}) \tag{3.46}$$

şeklini alır.

$$\mathbf{S} = \left(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}\right)\mathbf{F}^{-1} \tag{3.47}$$

olarak alındığında "Eş.3.46'' denklemi,

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = -\mathbf{S}\mathbf{u} \tag{3.48}$$

halini alır. "Eş.3.48'' denklemi yeniden düzenlendiğinde,

$$(\mathbf{H} + \mathbf{S})\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{3.49}$$

denklemi elde edilir. Buradan da

$$\mathbf{H}'\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{3.50}$$

formunu alır ki,

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{S} \tag{3.51}$$

matris olup sınır koşullarına bağlı olarak sınır elemanları yönteminde olduğu gibi yeniden düzenlenerek

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{3.52}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $\mathbf{A}$ matrisinin boyutu $(\mathrm{N} + \mathrm{L}) \times (\mathrm{N} + \mathrm{L})$ olup $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin boyutu $(\mathrm{N} + \mathrm{L}) \times 1$'dir. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri sırasıyla u'nun ve q'nun bilinmeyen ve bilinen değerlerini içermektedir.

$$\nabla^2 \mathrm{u} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} \tag{3.53}$$

olduğu durumda ise,

$$\mathrm{b} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} \tag{3.54}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\boldsymbol{\alpha}$ vektörü,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \tag{3.55}$$

formundadır ve "Eş.3.45'' denklemi,

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = \left(\mathbf{H}\widehat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\widehat{\mathbf{Q}}\right)\mathbf{F}^{-1}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \tag{3.56}$$

şeklini veya

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = \mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) \tag{3.57}$$

şeklini alır. b vektörü için kullanılan fikrin bir benzeri burada kullanılabilir. Yani,

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \tag{3.58}$$

öyle ki, $\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\alpha}$ kabul edelim. "Eş.3.58'' denkleminin her iki tarafının türevini alırsak

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} \tag{3.59}$$

elde edilmiş olur. Buradan $\boldsymbol{\beta}$ vektörü "Eş..3.58'' denkleminden

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \tag{3.60}$$

şeklinde yazılabilir. "Eş.3.60'' denklemi "Eş.3.59'' denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \tag{3.61}$$

formunu alır. "Eş.3.61'' denklemi "Eş.3.57'' denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = \mathbf{S}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \tag{3.62}$$

veya

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}^{-1} \tag{3.63}$$

olduğu kabul edilirse "Eş.3.62'' denklemi

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = \mathbf{Ru}$$

formunu alır. Bir önceki duruma benzer şekilde,

$$(\mathbf{H}-\mathbf{R})\mathbf{u}-\mathbf{G}\mathbf{q}=\mathbf{0} \tag{3.64}$$

formundan,

$$\mathbf{H}'\mathbf{u}-\mathbf{G}\mathbf{q}=\mathbf{0} \tag{3.65}$$

elde edilir, öyle ki

$$\mathbf{H}'=\mathbf{H}-\mathbf{R} \tag{3.66}$$

matrisidir. “Eş.3.65’’ denklemi de “Eş.3.50’’ denklemindeki gibi benzer bir yolla çözülebilir. Burada $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ ve $\mathbf{F}^{-1}$ matrisleri girdileri sıfır olmayan $(\mathrm{N}+\mathrm{L})\times(\mathrm{N}+\mathrm{L})$ tipinde karesel matrislerdir. $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ matrisinin girdileri f’nin türevi alınarak

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}}\cdot\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}}$$

$$=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}}\cdot\frac{\mathrm{r_x}}{\mathrm{r}} \tag{3.67}$$

elde edilir. Benzer bir uygulama

$$\nabla^2\mathrm{u}=\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} \tag{3.68}$$

durumu içinde kullanılabilir. Bu durumda,

$$\mathbf{R}=\mathbf{S}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{F}^{-1} \tag{3.69}$$

ve

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}}\cdot\frac{\mathrm{r_y}}{\mathrm{r}} \tag{3.70}$$

şeklinde olur.

$$\nabla^2\mathrm{u}=\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} \tag{3.71}$$

durumunda ise fikir yine aynıdır. Bu durumda ise

$$\mathbf{H}\mathbf{u}-\mathbf{G}\mathbf{q}=\mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}\right) \tag{3.72}$$

olup buradan,

$$\mathbf{H}\mathbf{u}-\mathbf{G}\mathbf{q}=\mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \tag{3.73}$$

elde edilir. Yine,

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right)\mathbf{F}^{-1} \tag{3.74}$$

kabul edilirse "Eş.3.73'' denklemi

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = \mathbf{Ru} \tag{3.75}$$

formunda olur. Buradan da

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{R}$$

kabul edilerek

$$\mathbf{H}'\mathbf{u} - \mathbf{Gq} = \mathbf{0} \tag{3.76}$$

denklemi elde edilir ki önceki durumlara benzer şekilde çözüm elde edilir.

## 3.6. $\nabla^2 u = b(x, y, u, t)$ Tipinde Denklemler için Karşılıklı Sınır Elemanları Yöntemi (Partridge ve ark., 1992)

Genel olarak yöntemi izah etmek amacıyla difüzyon problemi ele alınacaktır. Difüzyon problemi,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.77}$$

denklemi ile ifade edilir öyle ki $k$ burada materyal sabitidir. Problemin tanımı uygun sınır koşullarının tanımlanması ve başlangıç şartının

$$u(x, y, t_0) = u_0(x, y) \tag{3.78}$$

şeklinde verilmesiyle tamamlanır. Bir önceki bölümde tanımlanan sağ taraf fonksiyonu $b$ ile karşılaştırıldığında burada $b$ fonksiyonu $u$ fonksiyonunun zaman türevinin $\frac{1}{k}$ sabiti ile çarpımı şeklinde tanımlanır. Karşılıklı sınır elemanları yöntemi bir önceki bölümde verildiği gibi inşa edilerek

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gq} = \left(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}\right)\boldsymbol{\alpha} \tag{3.79}$$

matris denklemi elde edilir. Şimdiki durumda yine sağ taraf fonksiyonu için

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{K+L} f_j(x.y)\alpha_j(t) \tag{3.80}$$

yaklaşımı kullanılır. Burada $f_j$ problemin geometrisine bağlı olarak bilinen bir fonksiyon ve $\alpha_j(t)$ başlangıçta bilinmeyen zamana bağlı bir fonksiyondur. $\widehat{\mathbf{U}}$ ve $\widehat{\mathbf{Q}}$ matrisleri bir önceki bölüm de verilen aynı matrislerdir. Yine bir önceki bölümde yapıldığı gibi sağ taraf fonksiyonu

$$\mathbf{\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = F\alpha} \tag{3.81}$$

şeklinde yazılabilir ve buradan

$$\mathbf{\alpha = \frac{1}{k}F^{-1}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}} \tag{3.82}$$

olarak ifade edilebilir. Yukarıdaki "Eş.3.82'' denklemi "Eş.3.79'' denklemi içerisinde yerine yazıldığında,

$$\mathbf{Hu - Gq = \frac{1}{k}\left(H\widehat{U} - G\widehat{Q}\right)F^{-1}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}} \tag{3.83}$$

eşitliği elde edilir. Daha basit bir formda yazabilmek için,

$$\mathbf{C = -\frac{1}{k}S}$$

$$\mathbf{= -\frac{1}{k}\left(H\widehat{U} - G\widehat{Q}\right)F^{-1}} \tag{3.84}$$

kabul edilir ve $\mathbf{\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}}$ notasyonu kullanılırsa "Eş.3.83'' denklemi,

$$\mathbf{C\dot{u} + Hu = Gq} \tag{3.85}$$

formunu alır. Böylece herhangi bir standart zaman ayrıklaştırma yöntemi "Eş.3.85'' sisteminin çözümü için kullanılabilir.

Örneğin; zaman türevi için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa

$$\dot{u} = \frac{u^{t+1} - u^t}{\Delta t} \tag{3.86}$$

ve "Eş.3.86'' denklemi "Eş.3.85'' içerisinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{C\left(\frac{u^{t+1} - u^t}{\Delta t}\right) + Hu^{t+1} = Gq^{t+1}} \tag{3.87}$$

denklemi elde edilir. "Eş.3.87'' denklemi düzenlenirse,

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\Delta \mathbf{t}}\mathbf{C}+\mathbf{H}\right)\mathbf{u}^{\mathbf{t+1}}-\mathbf{G}\mathbf{q}^{\mathbf{t+1}}=\frac{\mathbf{1}}{\Delta \mathbf{t}}\mathbf{C}\mathbf{u}^{\mathbf{t}} \tag{3.88}$$

formunu alır. "Eş.3.88'' denkleminin sağ tarafı $(t+1)\Delta t$ anında bilinen durumundadır. $(t+1)\Delta t$ anında sınır koşulları kullanılarak ve önceki bölümlerde olduğu gibi sol taraf yeniden düzenlenerek sistem her bir zaman seviyesi için çözülebilir. Burada $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$ ve $\mathbf{C}$ matrisleri tamamen problemin geometrisine bağlı matrisler olup problem çözümünün en başında bir kere hesaplanır.

# 4. KSEY (DRBEM) UYGULAMALARI

Bu bölümde karşılıklı sınır elemanları yönteminin bazı uygulamaları verilmiştir. Yöntemin farklı denklemler için kullanılışının örneklendirildiği problemler dikdörtgensel bölgede tanımlanmış ve hem Dirichlet hem de Neumann tipinde sınır koşullarının yer aldığı örneklere yer verilmiştir. Elde edilen nümerik çözümler grafikler ve çizelgeler yardımıyla analitik çözümler ile karşılaştırılarak değerlendirilmiştir. Hesaplamalarda maksimum mutlak hata

$$\text{Maksimum Mutlak Hata} = \text{mak}_i|u_{\text{Nümerik}}(i) - u_{\text{Analitik}}(i)| \qquad i = 1, \dots, N + L$$

olarak tanımlanmıştır. Bu bölümde çözülmüş bütün problemler için sabit eleman kullanılmış olup radyal fonksiyon olarak $f = 1 + r$ alınmıştır. Bilgisayar programları FORTRAN dilinde yazılmıştır ve grafikler MATLAB kullanılarak çizilmiştir.

## 4.1 Problem 1 (Bialecki ve Karageorghis, 2004)

İlk olarak Poisson denklemi Dirichlet sınır koşulları ile birlikte

$$\nabla^2 u = -f \qquad \Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$u = 0 \qquad \partial\Omega$$

öyle ki

$$f(x,y) = 32\pi^2 \sin(4\pi x) \sin(4\pi y)$$

olarak ele alınmıştır. Problemin analitik çözümü

$$u(x,y) = \sin(4\pi x) \sin(4\pi y)$$

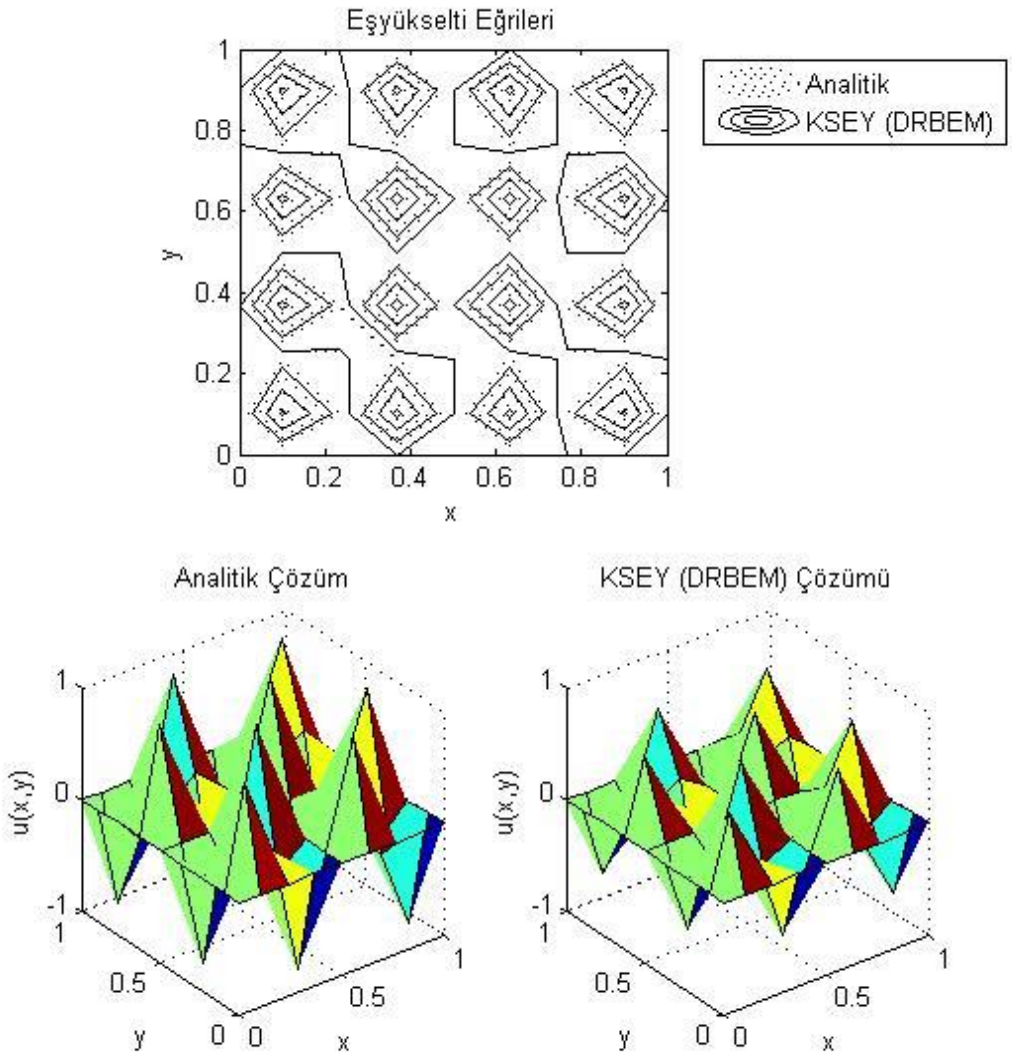
şeklindedir.

Problem "Eş.3.1'' formunda olup yöntemin inşa edilişi ve kullanılışı Bölüm 3.1 de detaylı olarak verilmiştir. Problem farklı sayıda sabit eleman kullanılarak çözülmüştür. Bu problem için elde edilen sonuçlar maksimum mutlak hata olarak Çizelge 4.1 de verilmiştir.

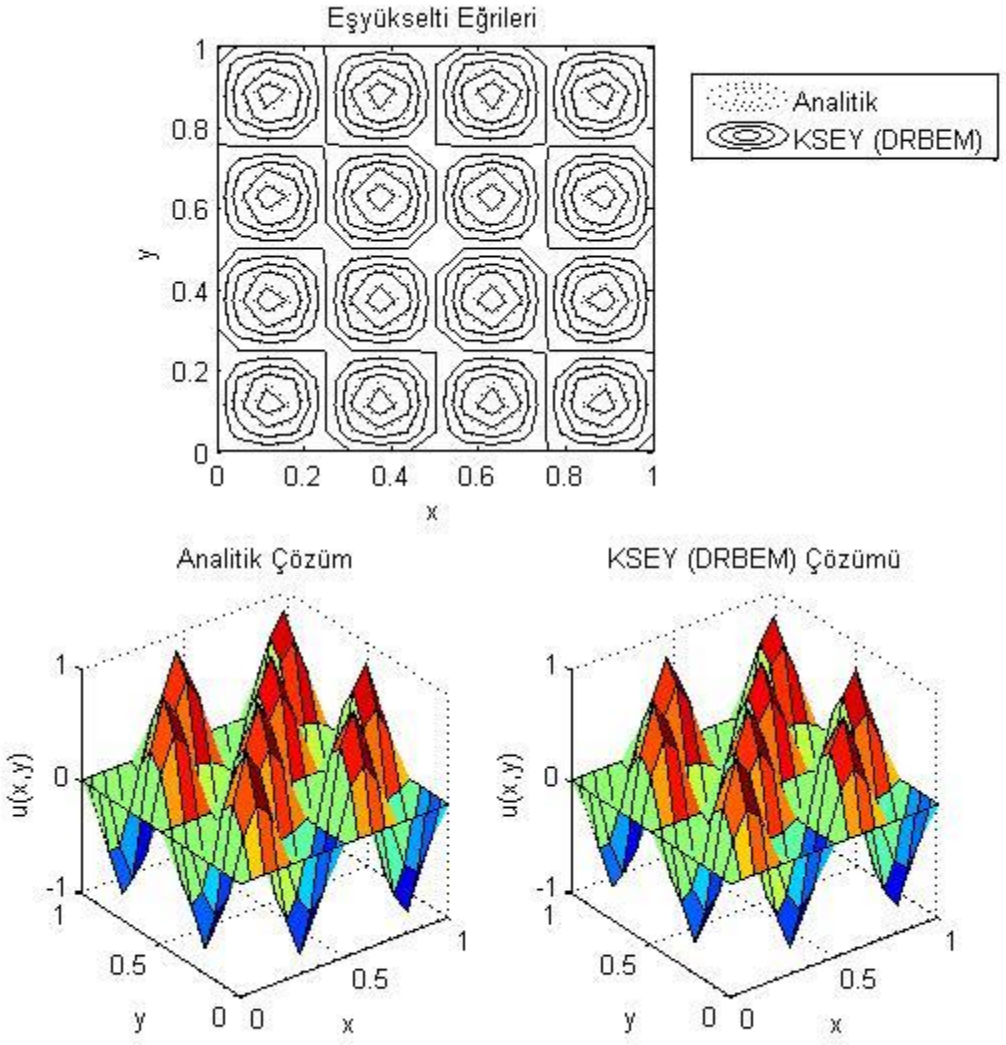
Çizelge 4.1. Problem 1 için farklı sınır eleman sayısı kullanımında maksimum mutlak hatalar

| N | L | Maksimum Mutlak Hata |
|---|---|---|
| 60 | 49 | $3.13 \times 10^{-1}$ |
| 84 | 100 | $1.44 \times 10^{-2}$ |
| 100 | 144 | $9.84 \times 10^{-3}$ |
| 124 | 225 | $5.63 \times 10^{-4}$ |
| 140 | 289 | $3.76 \times 10^{-5}$ |
| 164 | 400 | $2.48 \times 10^{-6}$ |
| 180 | 484 | $1.93 \times 10^{-7}$ |

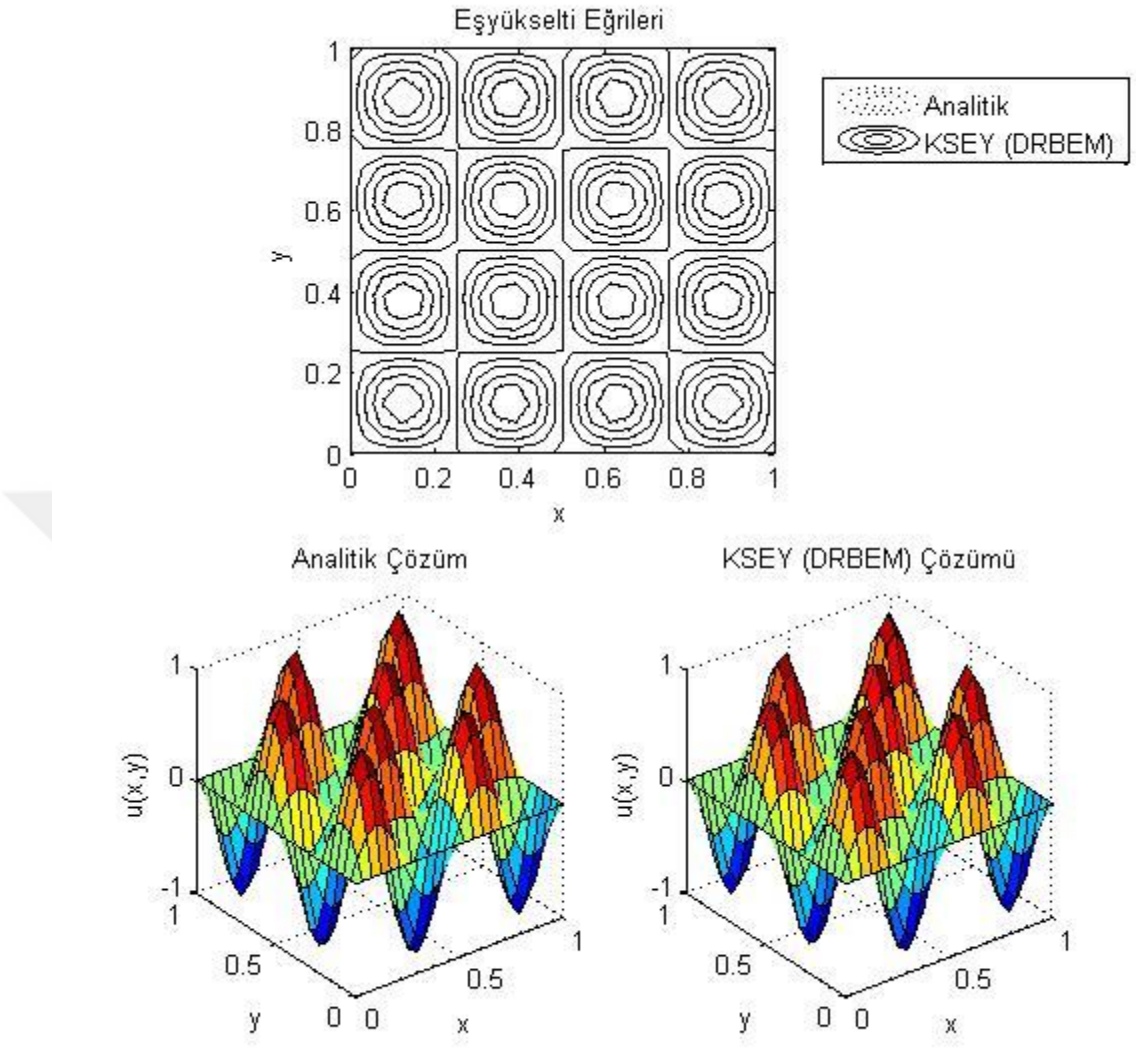
Çizelgede verilen sonuçlara bakıldığında eleman sayısı arttırılarak sonuçlardaki hatanın azaldığı görülmektedir. Ayıca Şekil 4.1- Şekil 4.3 incelendiğinde eleman sayısını arttırarak eş yükselti eğrilerinin ve grafiklerin daha düzgün elde edildiği sonucuna varılabilir. Bu problem için $N + L = 100 + 144$ için bile güzel sonuçlar elde edilebildiği görülmektedir. Daha fazla elemanın kullanılması sınır elemanları katsayılar matrislerinin boyutlarını arttırarak hesap yükünün ve süresinin artmasına sebep olmaktadır. Bu bölümdeki diğer problemler için bütün grafiksel sonuçlar hatanın az ve şekillerin düzgün elde edilebildiği, mümkün olan en uygun sınır eleman sayısı kullanılarak verilecektir.




Şekil 4.1 Problem 1'in $N + L = 60 + 49$ için KSEY (DRBEM) çözümü.




Şekil 4.2. Problem 1'in $N + L = 124 + 225$ için KSEY (DRBEM) çözümü.




Şekil 4.3. Problem 1'in $N + L = 180 + 448$ için KSEY (DRBEM) çözümü.

### 4.2. Problem 2 (Partridge ve ark., 1992)

Bir diğer Dirichlet sınır koşuları ile verilmiş problem

$$\nabla^2 u = -f \qquad \Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$u = 0 \qquad \partial\Omega$$

öyle ki,

$$f(x, y, u) = -u$$

olup problemin analitik çözümü

$$u(x, y) = \sin x$$

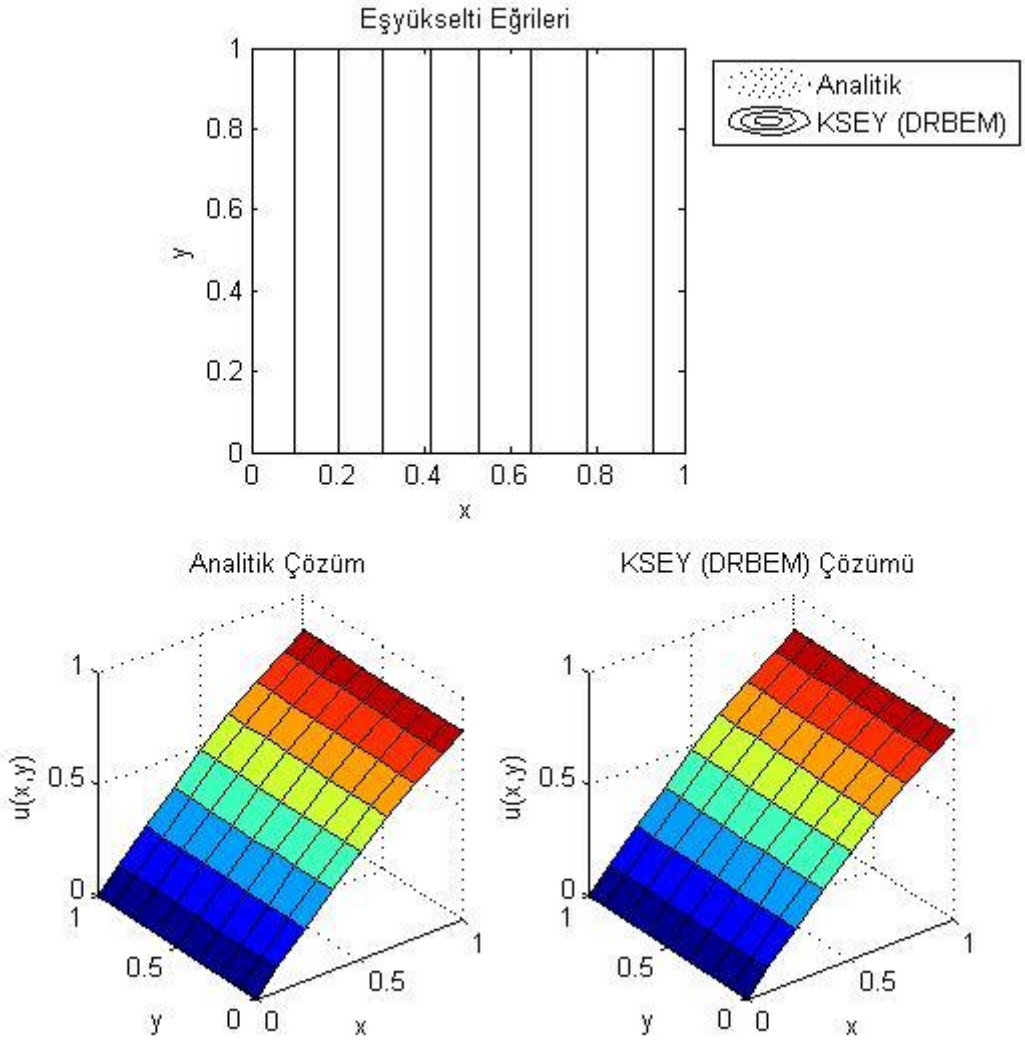
şeklindedir. Burada "Eş.3.43'' için verilen yol izlenerek yöntem uygulanacaktır.

Hesaplamalarda bir önceki problem ile aynı sayıda sınır eleman kullanılmıştır ve analitik çözüm ile karşılaştırıldığında elde edilen sonuçlar Çizelge. 4.2 de mutlak maksimum hata olarak verilmiştir.

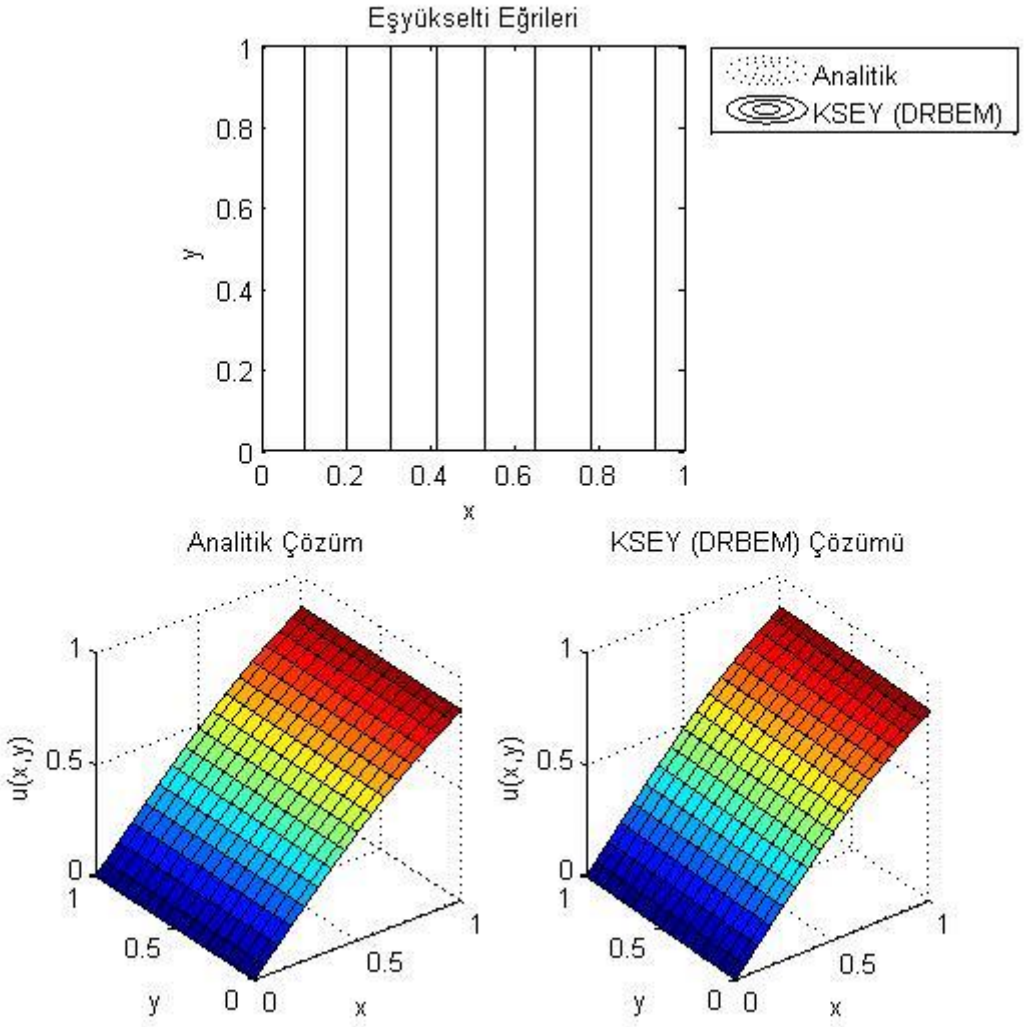
Çizelge 4.2. Problem 2 için farklı sınır eleman sayısı kullanımında maksimum mutlak hatalar

| N | L | Maksimum Mutlak Hata |
|---|---|---|
| 60 | 49 | $3 \times 10^{-5}$ |
| 84 | 100 | $1{,}9 \times 10^{-5}$ |
| 100 | 144 | $1{,}7 \times 10^{-6}$ |
| 124 | 225 | $1{,}6 \times 10^{-6}$ |
| 140 | 289 | $1{,}5 \times 10^{-6}$ |
| 164 | 400 | $1{,}4 \times 10^{-7}$ |
| 180 | 484 | $1{,}4 \times 10^{-8}$ |

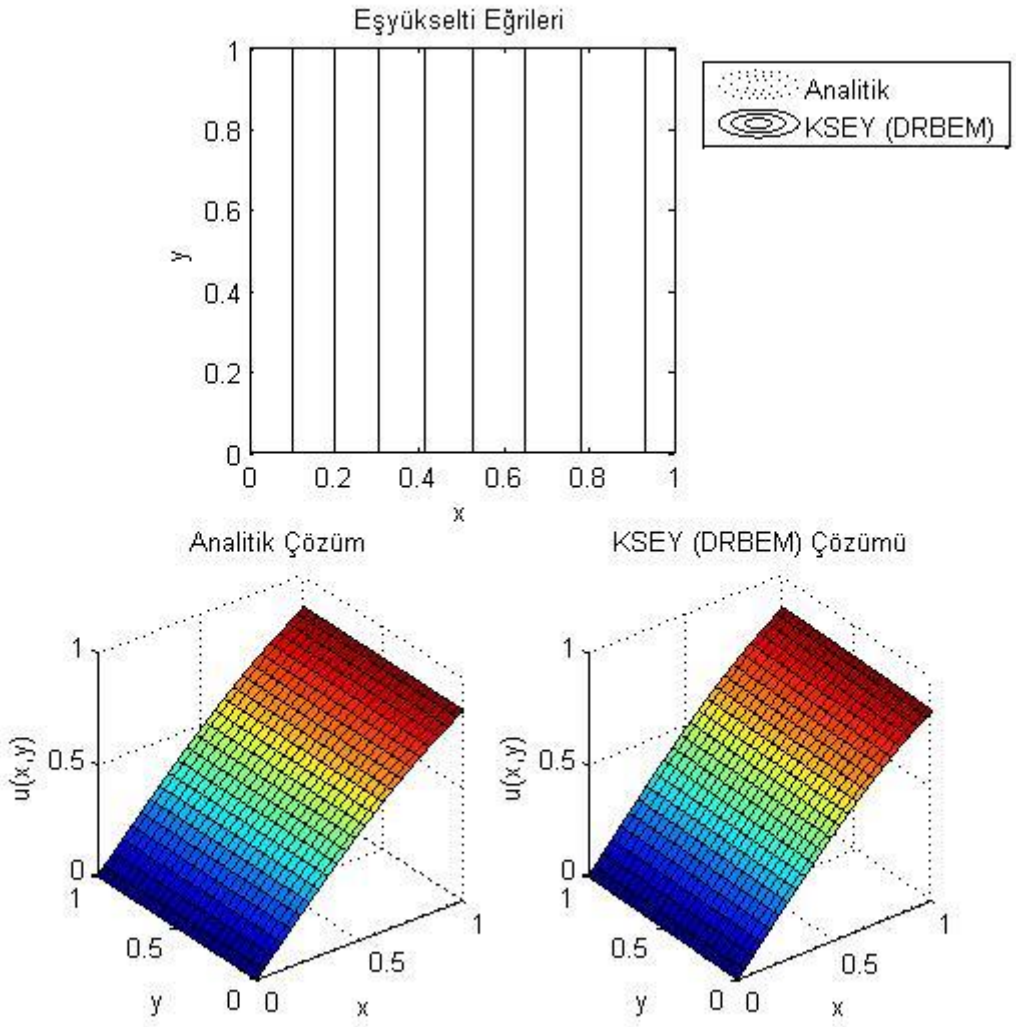
Çizelge 4.2 de verilen sonuçlar değerlendirildiğinde $N + L = 60 + 49$ sınır eleman ve iç nokta kullanılması ile yeteri kadar doğru sonuçlar elde edilebilmektedir. Ayrıca Problem 1 ile karşılaştırıldığında ise çok daha az sınır eleman ve iç nokta kullanılarak doğru sonuçlar alınabildiği yorumu yapılabilir. Çözümlerin davranışlarını görebilmek için $N + L = 60 + 49$, $124 + 225$ ve $180 + 448$ sınır elemanı ve iç nokta kullanılarak sırası ile Şekil 4.4, Şekil 4.5, Şekil 4.6' da eşyükselti eğrileri, analitik ve KSEY (DRBEM) çözümlerinin grafikleri verilmiştir. Burada bir önceki problemde olduğu gibi kullanılan sınır eleman ve iç nokta sayısını artırmaya gerek kalmadan güzel sonuçların elde edilebildiği sonucu çok açık bir şekilde yine görülebilmektedir.




Şekil 4.4. Problem 2'nin $N + L = 60 + 49$ için KSEY (DRBEM) çözümü.




Şekil 4.5. Problem 2'nin $N + L = 124 + 225$ için KSEY (DRBEM) çözümü.




Şekil 4.6. Problem 2'nin $N + L = 180 + 448$ için KSEY (DRBEM) çözümü.

### 4.3. Problem 3 (Patridge ve ark., 1992)

Bir sonraki problemde konvektif terimlerin bulunduğu diferansiyel denklem için yöntemin uygulanışı örneklendirilmiştir. Problemin değişkeninin x'e ve y'e göre türevlerinin yer aldığı bu durum için

$$\nabla^2 u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$u = 0 \qquad \partial\Omega$$

problemi ele alınmıştır. Problemin analitik çözümü

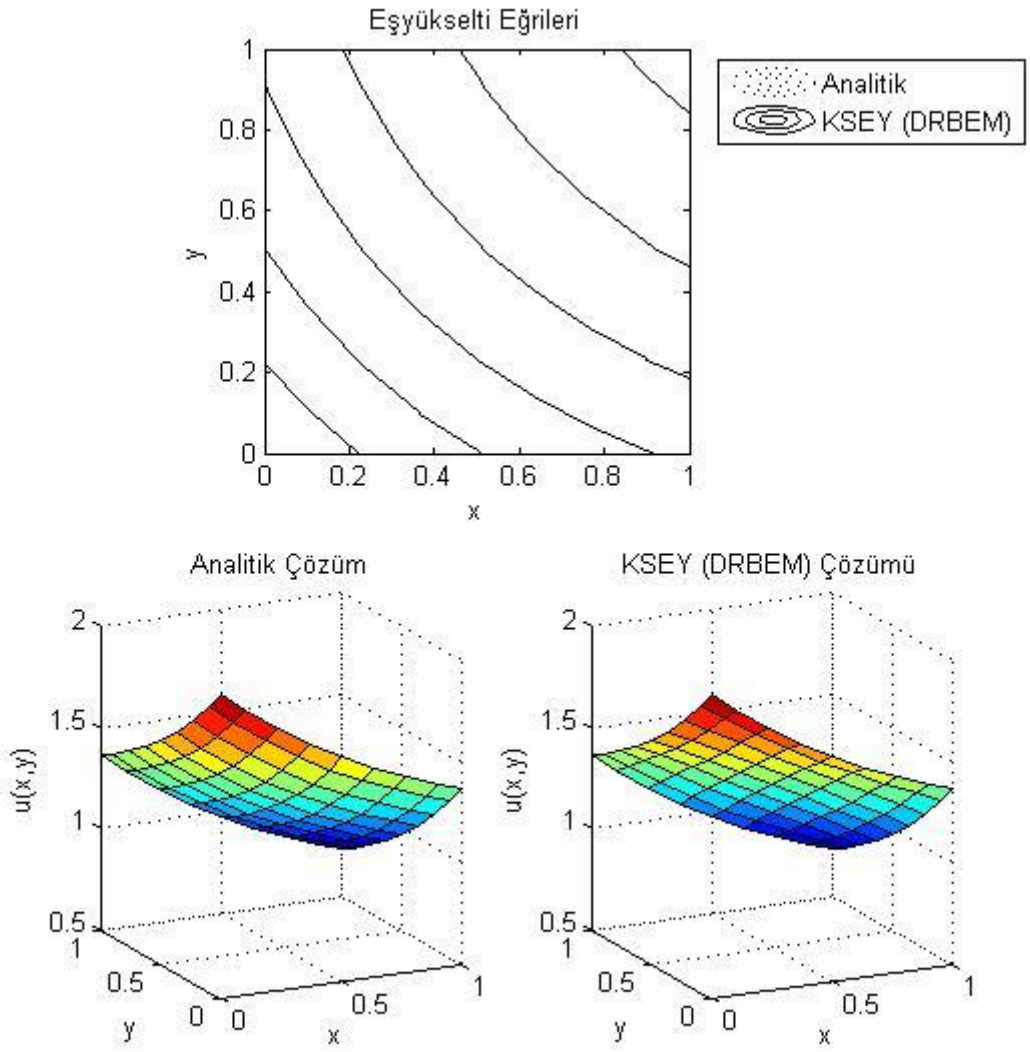
$$u(x,y) = e^{-x} + e^{-y}$$

şeklindedir. Farklı sayıda sınır elemanının kullanıldığı çözümlerde elde edilen mutlak maksimum hata değerleri Çizelge 4.3'te verilmiştir.

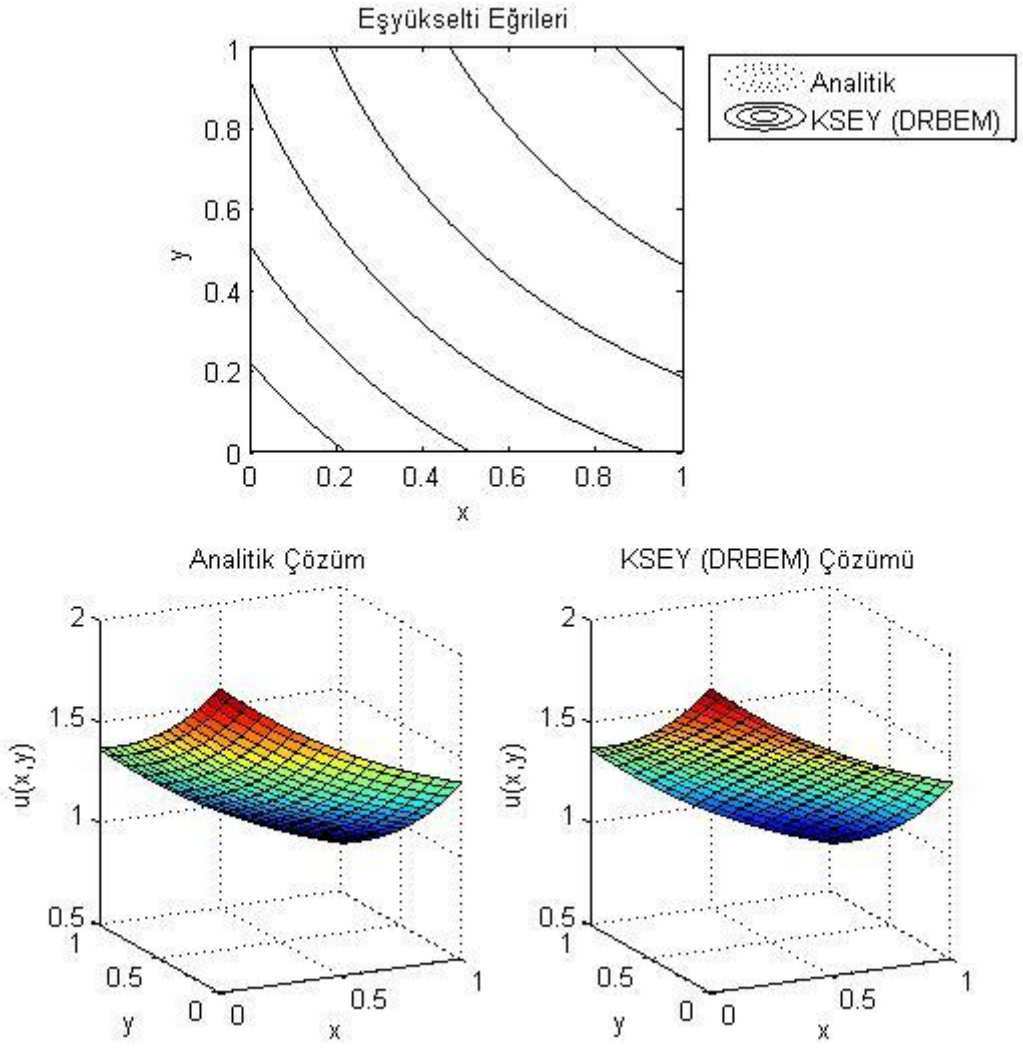
Çizelge 4.3. Problem 3 için farklı sınır eleman sayısı kullanımında maksimum mutlak hatalar

| N | L | Maksimum Mutlak Hata |
|---|---|---|
| 60 | 49 | $9.1 \times 10^{-2}$ |
| 84 | 100 | $1.2 \times 10^{-2}$ |
| 100 | 144 | $7.4 \times 10^{-3}$ |
| 124 | 225 | $1.1 \times 10^{-3}$ |
| 140 | 289 | $5.2 \times 10^{-4}$ |
| 164 | 400 | $3.3 \times 10^{-4}$ |
| 180 | 484 | $2.4 \times 10^{-4}$ |

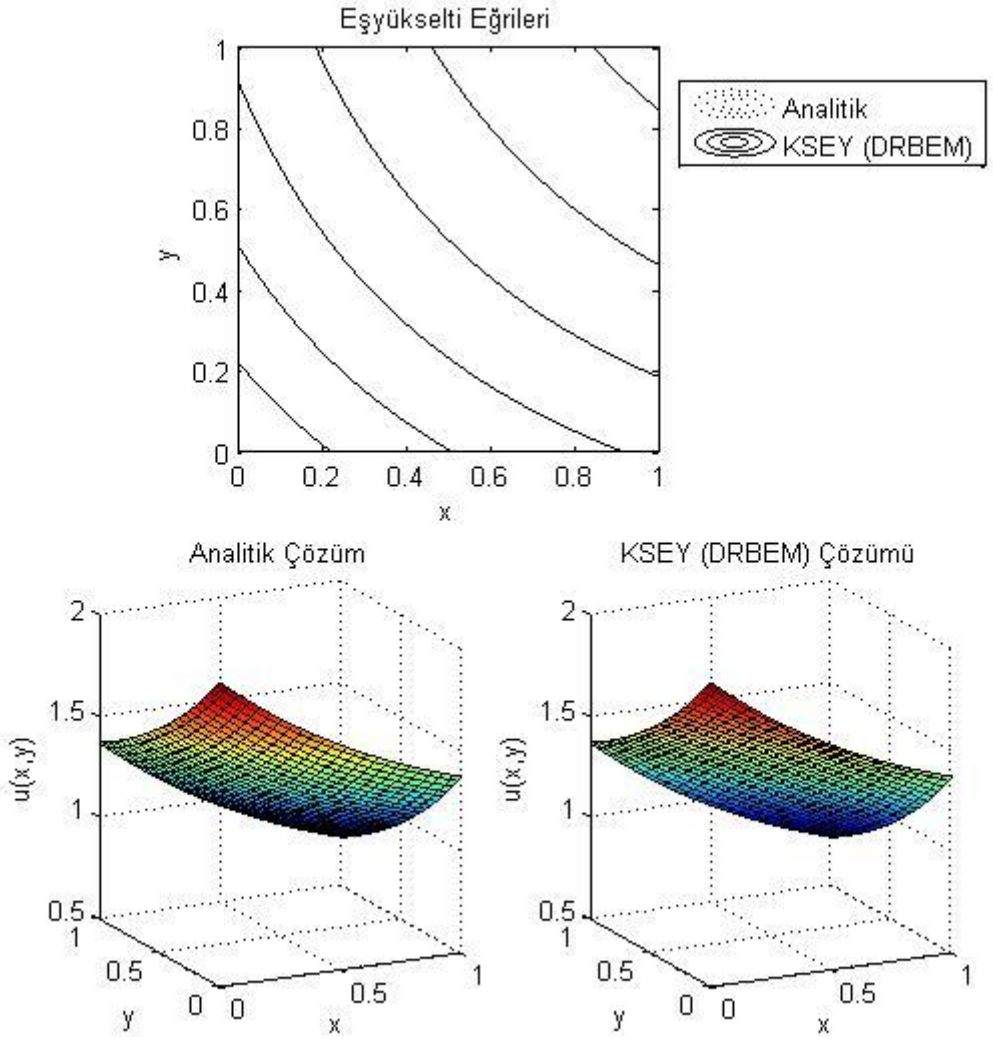
Çizelge incelendiğinde diğer örneklerde olduğu gibi eleman sayısı artırıldığında hatanın azaldığı görülmektedir. Buna ek olarak problemin b fonksiyonunun zorluğunun etkisi yine elde edilen sonuçlardan hissedilmektedir. Bu problem için verilen eşyükselti eğrilerinin, analitik ve KSEY (DRBEM) çözümlerinin yer aldığı Şekil 4.7, Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 incelendiğinde daha çok eleman kullanmanın grafiklerde çok büyük farklılık göstermediği şeklinde yorumlanabilir.




Şekil 4.7. Problem 3'ün $N + L = 60 + 49$ için KSEY (DRBEM) çözümü.




Şekil 4.8. Problem 3'ün $N + L = 124 + 225$ için KSEY (DRBEM) çözümü.




Şekil 4.9. Problem 3'ün $N + L = 180 + 448$ için KSEY (DRBEM) çözümü.

### 4.4 Problem 4 (Patridge ve ark., 1992)

Son olarak zamana bağlı türev durumunu örneklendirmek için difüzyon denkleminin KSEY (DRBEM) çözümü verilecektir. Difüzyon denkleminin yönetim denklemi "Eş.3.77'' formunda olup genel formu

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$u(0,y,t)=0 \qquad u(x,0,t)=0$$

$$q(1,y,t)=0 \qquad q(x,1,t)=0$$

$$u(x,y,0)=u_0$$

şeklindedir ve burada k difüzyon katsayısı olarak tanımlanır.

Bu problemin analitik çözümü

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\exp\left[-\left(\frac{kn^2\pi^2}{L^2}+\frac{km^2\pi^2}{L^2}\right)t\right]$$

olup burada

$$A_{nm}=\frac{4u_0}{nm\pi^2}[(-1)^n-1][(-1)^m-1]$$

dir. Bu çalışmadaki hesaplamalarda $L=1.5$, $k=1.25$ ve $u_0=30$ olarak alınmıştır.

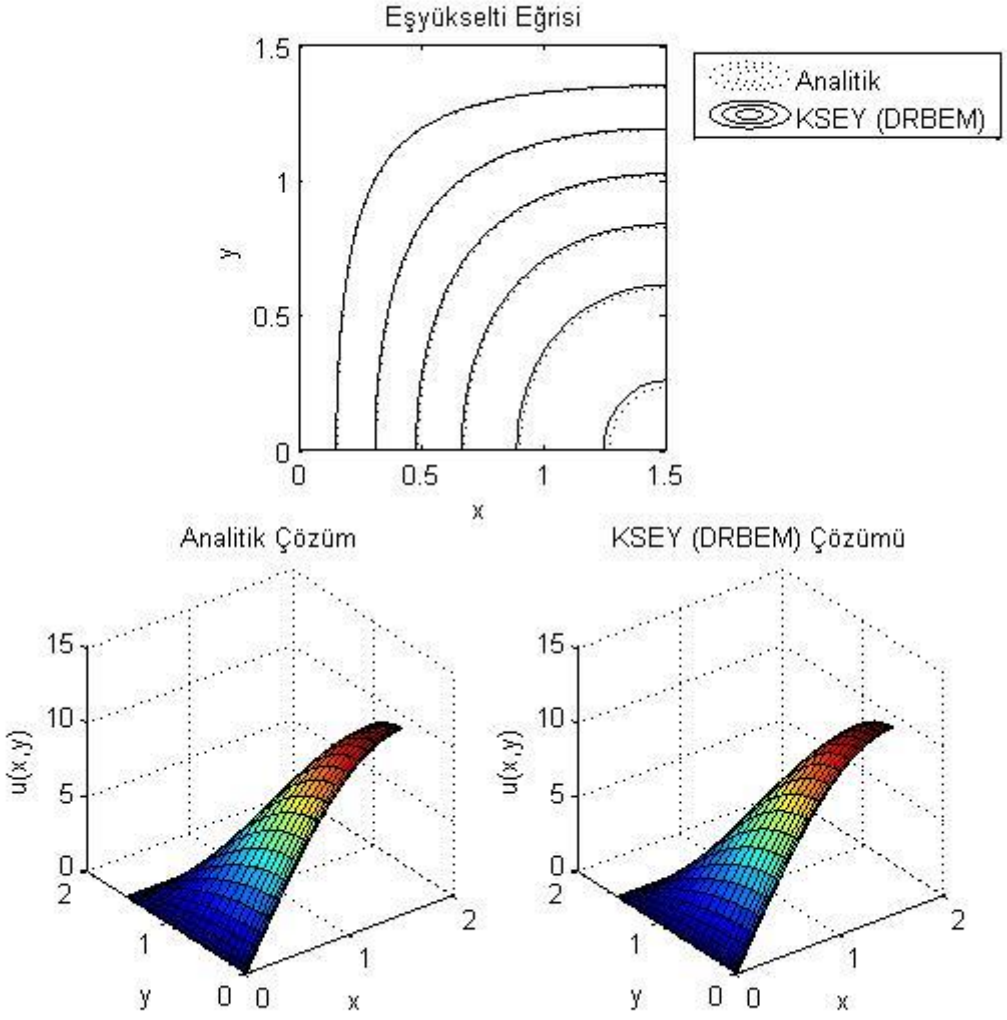
İlk üç örneğe bakıldığında uygun sayıda sınır eleman ve iç nokta kullanmak iyi sonuçlar elde etme imkânı verirken hesaplama yükünü de minimize edebilmektedir. Bu örnekte KSEY (DRBEM) prosedürü sonucu elde edilen denklem "Eş.3.88'' iteratif formda olup kararlı çözümlerin elde edilebilmesi için zaman yönünde çözülen adım boyuna bağlı olarak sistemin tekrarlanarak çözülmesi gerekir. Bu ise oldukça fazla hesap yükü ve depolama alanı gerektirir. Önceki örnekler değerlendirildiğinde $N+L=100+144$ çözümlerin davranışlarını gösterebilmesi açısından yeterli sayıda sınır elemanı olarak kabul edilebilir ve diffüzyon denkleminin çözümü için yapılan bütün analizlerde kullanılmıştır.

Başlangıç olarak $\Delta t$ seçiminin çözümlerdeki etkisini gösteren sonuçlar Çizelge 4.4 te verilmiştir.

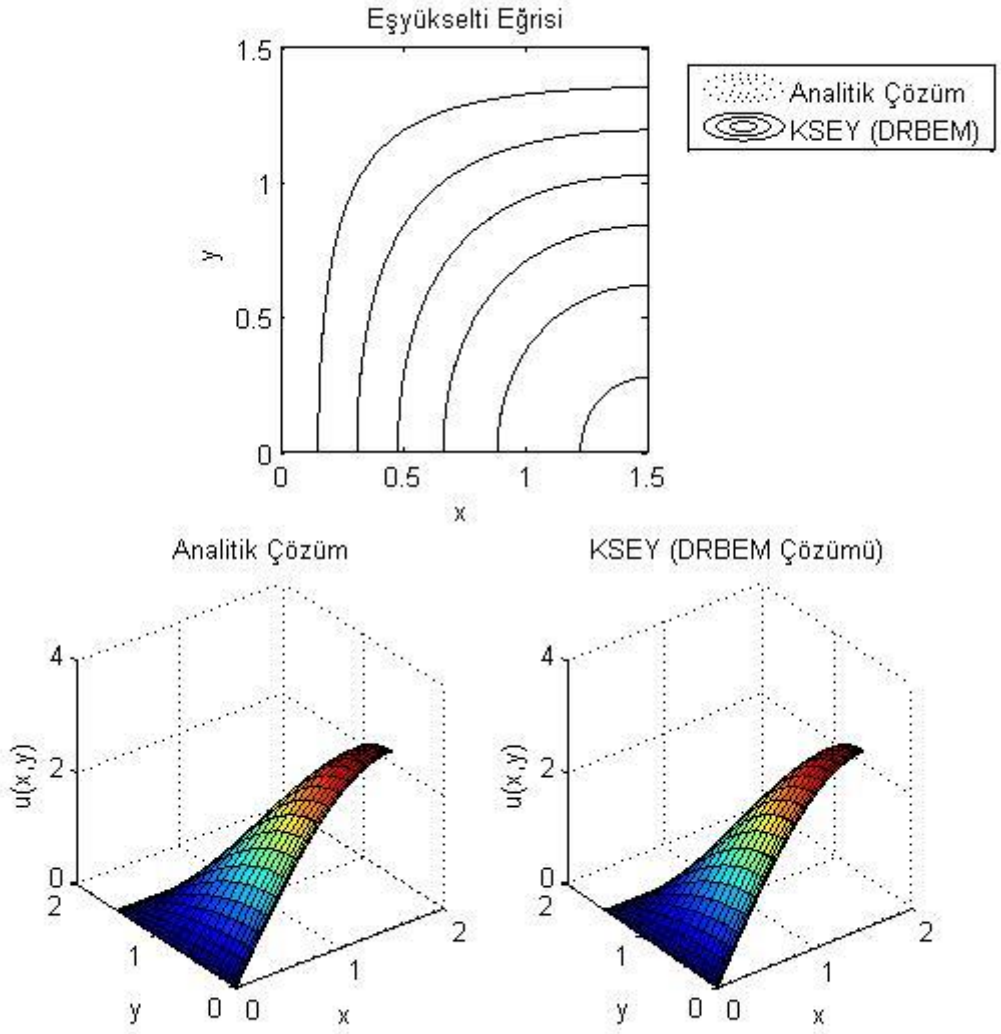
Çizelge 4.4. Problem 4 için $\mathbf{t = 1.2}$ anında farklı $\mathbf{\Delta t}$ kullanımında maksimum mutlak hatalar

| $\Delta t$ | İterasyon | Maksimum Mutlak Hata |
|---|---|---|
| 0.012 | 100 | $4 \times 10^{-2}$ |
| 0.006 | 200 | $1 \times 10^{-2}$ |
| 0.003 | 400 | $1 \times 10^{-3}$ |
| 0.001 | 1200 | $2 \times 10^{-4}$ |

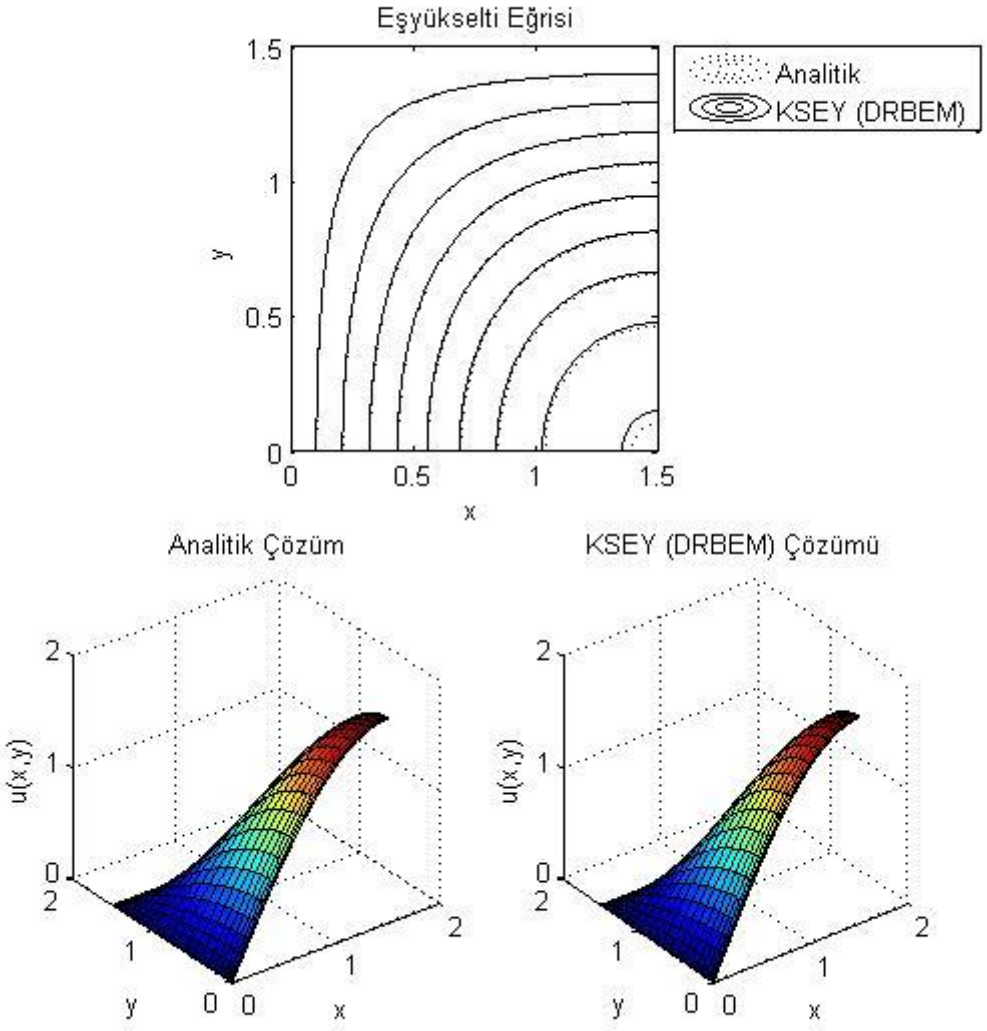
Zaman yönündeki adım boyu seçimi için yapılan ve sonuçlarının Çizelge 4.4 de verildiği çalışma gösteriyor ki küçük adım boyu kullanımı sonuçların daha az hata ile analitik çözümlere yakın sonuçlar elde edilmesinde etkili olmaktadır. Ancak çok küçük adım boyu kullanmak yine iterasyon sayısını artırdığı için ekstra hesap yükü getirecektir. Ayrıca küçük adım boyu kullanımı yuvarlama hatalarını da beraber getireceği için elde edilen sayısal sonuçların da kararsız olmasına sebep olacaktır. Bütün bu sonuçların ışığında bu çalışmanın geri kalanında analizler $\Delta t = 0.001$ alınarak yapılacaktır.



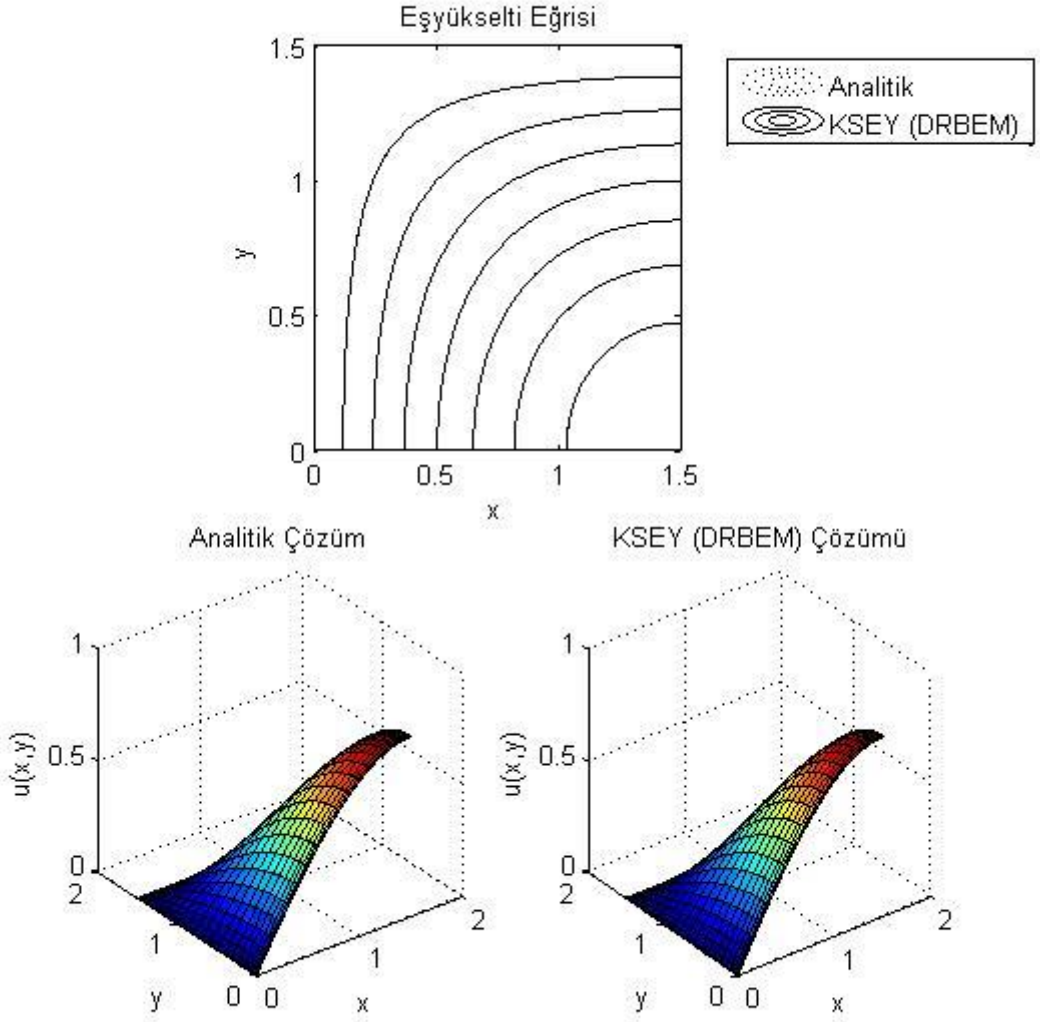

Şekil 4.10. Problem 4'ün $t = 0.5$ için KSEY (DRBEM) çözümü.



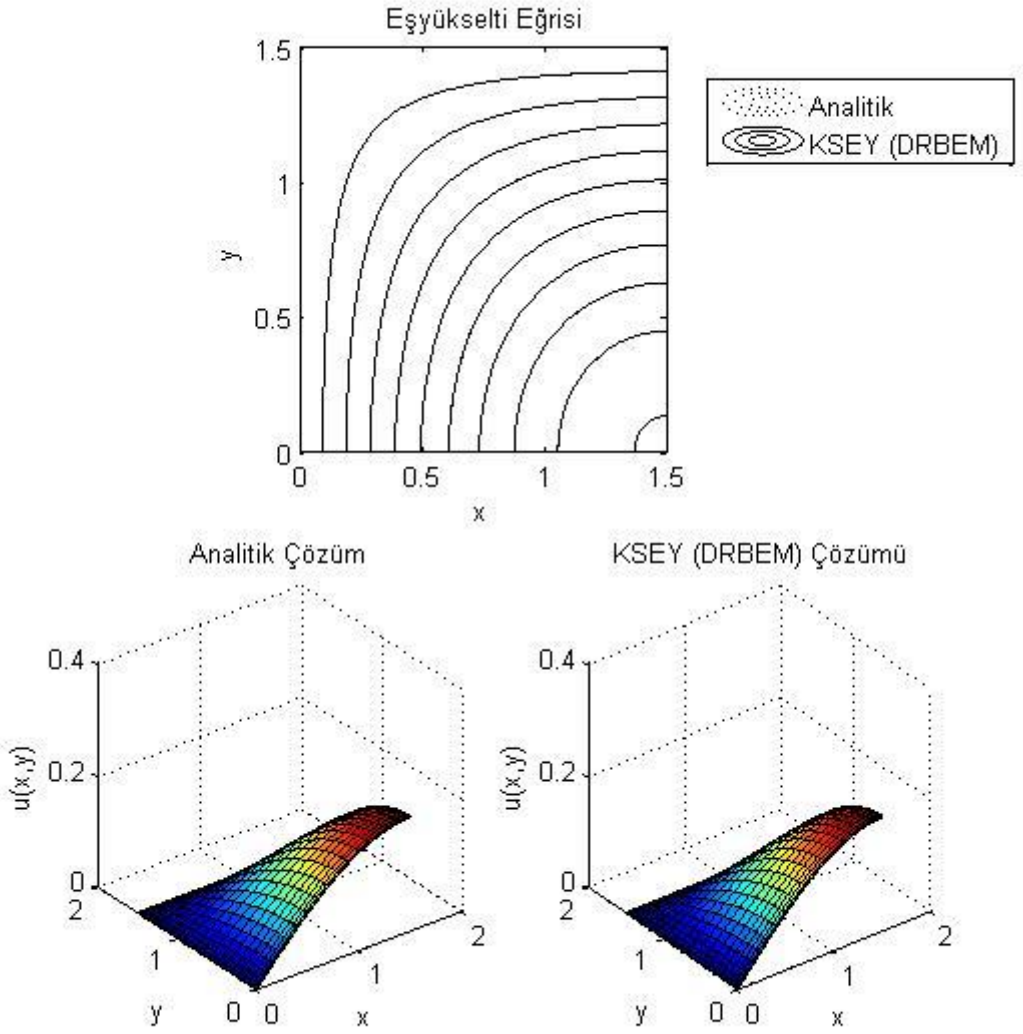

Şekil 4.11. Problem 4'ün $t = 1$ için KSEY (DRBEM) çözümü.



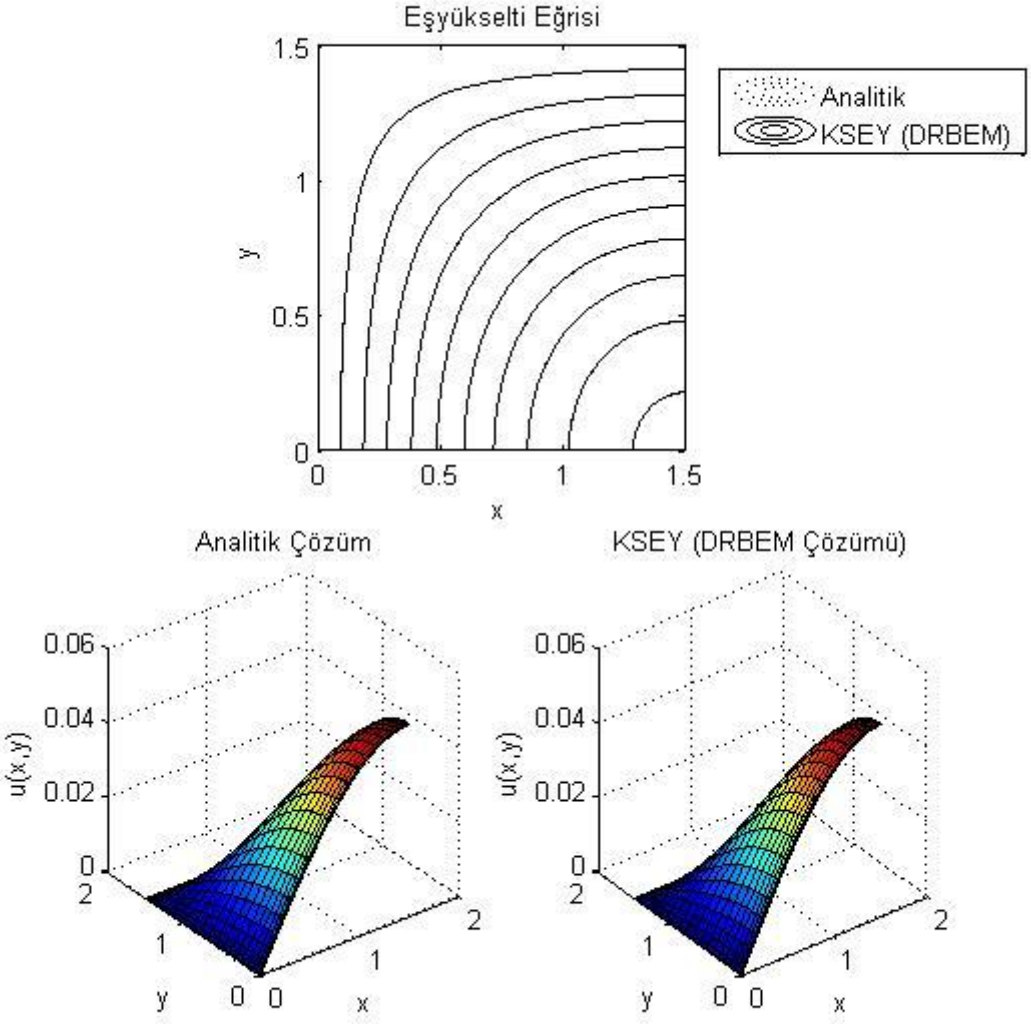

Şekil 4.12. Problem 4'ün $t = 1.2$ için KSEY (DRBEM) çözümü.



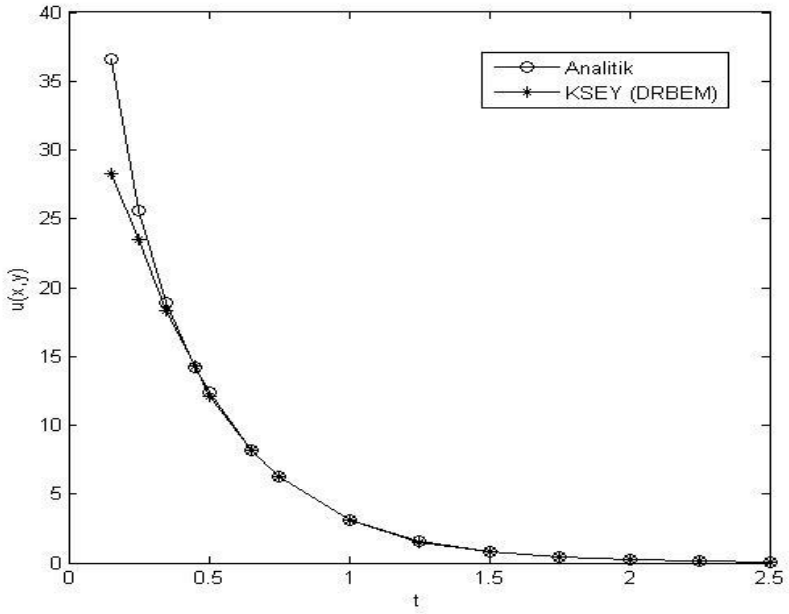

Şekil 4.13. Problem 4'ün $t = 1.5$ için KSEY (DRBEM) çözümü.




Şekil 4.14. Problem 4'ün $t = 2.0$ için KSEY (DRBEM) çözümü.




Şekil 4.15. Problem 4'ün $t = 2.5$ için KSEY (DRBEM) çözümü.




Şekil 4.16. Problem 4 için bölgenin sağ alt köşesinde zaman ilerlerken $u(x,y)$deki değişim.

Bu çalışmada farklı zaman seviyesinde elde edilen nümerik sonuçlar analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır. Şekil 4.10, Şekil 4.11, Şekil 4.12, Şekil 4.13, Şekil 4.14 ve Şekil 4.15 de sırasıyla $t = 0.5,\ 1,\ 1.2,\ 1,\ 1.5,\ 2$ ve $2.5$ zaman seviyeleri için verilen nümerik çözümler, analitik çözümler ile birlikte verilmiştir. Şekiller incelendiğinde u fonksiyonu minumum değerini $(u = 0)$ bölgenin sol $(x = 0, y \in [0, 1.5])$ ve üst $(x \in [0, 1.5], y = 0)$ duvarında alırken maksimum değerini ise sağ alt köşede $(x = 1.5\ ,\ y = 1.5)$ almaktadır. Bu maksimum değer zaman ilerledikçe azalmaktadır ve $t > 2.5$ ulaştığında çözümler kararlı hale gelmektedir. Sağ alt köşede elde edilen çözümler bu noktadaki analitik çözümler ile karşılaştırıldığında Şekil 4.16 gösteriyor ki başlangıçta hata büyük iken zaman ilerledikçe hata azalmaktadır. Bu sonuç termal probleminin fiziksel özelliği ile ilgili olup beklenilen bir davranıştır.

# 5. SONUÇ

Bu tez, karşılıklı sınır elemanları yönteminin inşa edilmesi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bazı basit örneklerine uygulanması üzerine bir çalışmadır. Genel olarak bu çalışma yöntemin kullanılışına giriş niteliğinde olup yöntem daha karmaşık yönetim denklemine sahip veya farklı geometrik bölgelerde tanımlı problemlere de uygulanabilmektedir.

Sınır eleman yöntemi, bilim ve mühendislikte geniş bir yelpazedeki problemlere sayısal çözümler sunan köklü bir sayısal tekniktir. Yöntemin temel avantajı, sadece sınır değerleri kullanılarak çözümler elde edildiği için daha az hesaplama süresi ve veri hazırlama çabası gerektirmesidir. Bununla birlikte, bir diferansiyel denklemin çözümünde sınır elemanları yönteminin uygulanabilmesi daima orijinal diferansiyel denklemin temel çözümünün bilinmesini gerektirir. Birçok durumda, özellikle doğrusal olmayan denklemler için, temel bir çözüm bulmak zordur ve bu durum yöntemin bir dezavantajıdır. Bu gibi durumlarda denklemin tamamı sınır integrallerine dönüştürülemez ve hala elimizde hesaplanması gereken bölge integrali mevcut olur. Böyle bir durumda ikinci bir hesaplama gerekir ki bu ise yöntemin kazanımlarını ortadan kaldırır.

Diferansiyel denklemin tamamı için temel bir çözüm elde edilmesine dayanmayan tekniklerden biri, karşılıklılık sınır elemanları yöntemidir. Bu yöntem, temel olarak yine bir sınır elemanları yöntemi olduğu için sınır elemanları yönteminin avantajlarına sahip olmak ile birlikte homojen ve doğrusal olmayan terimler sebebi ile ortaya çıkabilecek bölge integrallerini hesaplamak amacı ile tanımlı olduğu bölgenin tamamını ayrıklaştırmaya ihtiyaç duymayan bir tekniktir.

Bu tezde ilk olarak tekniğin temelini oluşturan sınır elemanları yöntemi çalışmanın başında detaylı olarak ele alınmıştır. Yöntemin temel fikrini verebilmek adına Laplace ve Poisson denkleminin çözümünde gerekli olan temel formülasyonlar sunulmuştur. Öncelikle Laplace denklemini çözmek için temel integral teknikleri geliştirmeye odaklanılmıştır. Bu kısımda genel integral denklemi, kısmi diferansiyel denklem ve sınır koşulundan elde edilmiştir. Burada elde edilen bu integral denklemi,

temel çözüm ve Green teoremi kullanılarak bir sınır integral denklemine dönüştürülmüştür. Daha sonra sınır koşullarının nasıl uygulandığı açıklanarak deklem matris formunda ifade edilmiştir. Bölümün sonunda sınır elemanları yöntemini örneklendirmek adına Laplace denklemi önce az sayıda sabit eleman ile çözülerek sınır elemanları yöntemi katsayılar matrisinin girdilerinin nasıl hesaplandığı açıklanmaya çalışılmıştır, devamında yazılan bilgisayar programı ile elde edilen çözümler grafikler ile verilmiştir.

Bir sonraki bölümde karşılıklı sınır elemanları yöntemi homojen olmayan denklemlerin en basit formu olan Poisson denklemi için inşa edilmiştir. Sonrasında homojen olmayan terimin farklı durumları için yöntemin genelleştirilmesi verilmiştir. Burada homojen olmayan terimin içerisinde bilinmeyen fonksiyonun kendisi, x ve y yönündeki birinci mertebeden kısmi türevleri ve bunların kombinasyonları, zaman yönünde birinci mertebeden kısmi türevinin yer aldığı durumlar ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu bölümün sonunda yukarıda adı geçen her bir duruma karşılık gelen dört test problem çözülmüş ve elde edilen sayısal sonuçlar analitik çözümler ile karşılaştırılarak değerlendirilmiştir.

**KAYNAKLAR**


Alsoy-Akgün, N., 2013. ***The Dual Reciprocity Boundary Element Method Solution of Helmholtz Type Equations in Fluid Dynamic*** (doktora tezi). ODTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
Technical University.

Alsoy-Akgün, N., Tezer-Sezgin, M., 2013a. DRBEM and DQM Solutions of Natural Convection Flow in a Cavity Under a Magnetic Field. ***Progress in Computational Fluid Dynamics, 13:*** 270-284.

Alsoy-Akgün, N., Tezer-Sezgin, M., 2013b. DRBEM Solution of the Thermo-Solutal Buoyancy Induced Mixed Convection Flow Problems . ***Engineering Analysis with Boundary Elements***, **37**: 513-526.

Asmar, N. H., 2005. ***Partial Differential Equations With Fourier Series and Boundary Value problems.*** Second Edition. Pearson ınternational edition. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

Banerjee, P. K., and Butterfield, R., 1981. ***Boundary Element Methods in Engineering Science.*** McGraw-Hill, London.

Bellman, R. E., Casti, J., 1971. Differential Quadrature and long-term Integration. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications,*** **34**: 235-238.

Bialecki, B., Karageorghis, A., 2004. Legendre Gauss spectral collocation for Helmholtz
equation on a rectangle. ***Numerical Algorithms,*** **36:** 203-227.

Brebbia, C. A., 1978. ***The Boundary Element Method for Engineers.*** Pentech Press, London.

Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C., 1984. ***Boundary Element Techniques.*** Springer-Verlag, Berlin and New York.

Chen, C. S., Rashed , Y. F., 1998. Evaluation of Thin Plate Spline Based Particular Solutions for Helmholtz-type Operators for DRB***. Mechanics Research Communications***. **25**: 195-201.

Çağlayan, M., Çelebi, O., 2010. ***Kısmi Diferansiyel Denklemler.*** Dora, Bursa.

Golberg, M. A., Chen, C. S., 1994. Boundary Elements Communications. **5**: 57-61.

Hassani, S., 2009. ***Dirac Delta Function in Mathematical Models***. Springer, New York.

Leveque, J. R., 2007. Steady-state and Time-dependent Problems. ***Finite Difference Methods For Ordinary and Partial Differential Equations.*** Society for Industrial and Applied Mathematics**.** PA, Philadelphia.

Muleshkov, A. S., Golberg, M. A., Chen, C. S., 1999. Particular Solution of Helmholtz-type Operators using Higher Order Poly harmonic Splines***, Computational Mechanics,*** **23**: 411-419.

Nardini, D., Brebbia, C. A., 1983. A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements, ***Applied Mathematical Modelling***. **7**: 157-162.

Partridge, P. W., Brebbia, C. A., 1990.Computer Implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the Solution of General Field Equations, **Communications in Applied Numerical Methods, 6**: 83-92.

Partridge, P. W., Brebbia, C. A., Wrobel, L. C., 1992. ***The Dual Reciprocity Boundary Element Method.*** Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston.

Partridge, P.W., Wrobel, L.C., 1990. The Dual Reciprocity Boundary Element Method for Spontaneous Ignition. ***Numericall Methods in Engineering,*** **30**: 953-963.

Pletcher, R. H., Tannehill, J. C., Anderson, D. A., 2013. ***Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer***. CRC PRESS, Taylor&Francis Group, Washington, USA.

Reddy, J. N., Gartling, D. K., 2010. ***The finite element method in heat transfer and fluid Dynamics.*** Taylor & Francis, London, UK.

Wrobel, L. C., Brebbia, C. A., Nardini, D., 1986. ***Formulation for Transient Heat Conduction, Finite Elements in Water Resources VI***. Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York**.**

# ÖZ GEÇMİŞ

Lisans öğrenimine 2010 yılında Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladı ve 2014 yılında lisans öğrenimini tamamladı. Yüksek lisans öğrenimine 2018 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladı. 2021 yılında tezini tamamlayarak mezun oldu.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 11/06/2021

Tez Başlığı / Konusu: **"Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Karşılıklı Sınır Elemanları Yöntemi ile Çözümleri"**

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 77 sayfalık kısmına ilişkin, 11/ 06 / 2021 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNITIN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 6 (ALTI) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

11 / 06 / 2021

Adı Soyadı: İnci ZIRAPLI

Öğrenci No: 18910002081

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Statüsü: Y. Lisans ☐ Doktora ☐

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Dr. Öğr. Üyasi Nagehan AKGÜN

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)