

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI GRAFLARDA TENSÖR ÇARPIMININ EN UZAK BAĞLANTILILIK
İNDEKSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mesut SEMİZ
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

VAN-2013

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI GRAFLARDA TENSÖR ÇARPIMININ EN UZAK BAĞLANTILILIK
İNDEKSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mesut SEMİZ

VAN-2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR danışmanlığında, Mesut SEMİZ tarafından sunulan “Bazı Graflarda Tensör Çarpımının En Uzak Bağlantılılık İndeksi” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 01/08/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Hakkı DURU

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman EDİZ

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.....

Enstitü Müdürü

ÖZET

BAZI GRAFLARDA TENSÖR ÇARPIMININ EN UZAK BAĞLANTILILIK İNDEKSİ

SEMİZ, Mesut

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

Ağustos 2013, 38 Sayfa

Bir Topolojik indeks, bir molekülün grafına karşılık gelen sayısal bir değer olup bu molekülün çeşitli fiziksel özellikleri, kimyasal reaktivitesi veya biyolojik aktivitesi ile korelasyon içinde olması anlamına gelir. Topolojik indeksler içerisinde son yıllarda en çok kullanılanlardan biri olan En Uzak Bağlantıluluk indeksi bir grafın her bir tepesinin derecesi ile en uzaklığının çarpımlarının toplamıdır. Topolojik indekslerin tensör çarpımındaki değerlerinin hesaplanmasına literatürde yeni başlanmıştır. Bu çalışmada En uzak bağlantıluluk indeksinin bazı özel graf sınıflarının tensör çarpımındaki değeri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Graf, En Uzaklık, En Uzak Bağlantıluluk İndeksi

ABSTRACT

ECCENTRIC CONNECTIVITY INDEX OF TENSOR PRODUCT OF SOME GRAPHS

SEMİZ, Mesut

MSc, Mathematics Science

Supervisor: Asst. Prof. Dr. M. Şerif ALDEMİR

August 2013, 38 Pages

A topological index is a numerical value associated with chemical constitution purporting for correlation of chemical structure with various physical properties, chemical reactivity or biological activity. In recent years, eccentric connectivity index which is the sum of the multiplication of degree and eccentricity of every vertex is one of the most used topological index among the topological indices. The value of topological indices in tensor product of graphs has been recently started. In this study, eccentric connectivity index of the tensor product of some special graph classes are computed.

Key words: Graph, Eccentricity, Eccentric Connectivity Index

ÖN SÖZ

Çalışmalarım süresince yardımları için sayın hocam Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR'e, ve sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman EDİZ'e ve her konuda bana destek olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mesut SEMİZ

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	2
3. TEMEL KAVRAMLAR	3
4. GRAFLARDA KARTEZYEN VE TENSÖR ÇARPIMLARI	9
5. İNDEKSLER	12
6. BAZI GRAFLARIN TENSÖR ÇARPIMININ EN UZAK BAĞLANTILILIK İNDEKSİ	21
6.1. En Uzaklık Teoremleri	21
6.2. Bazı Grafların En Uzak Bağlantılılık İndeksi Teoremleri	29
7. TARTIŞMA ve SONUÇ	35
KAYNAKLAR	36
ÖZ GEÇMİŞ	38

ŞEKİLLER DİZİNİ

	sayfa
Şekil 3.1. $G(V, E)$ grafi	3
Şekil 3.2. K_5 tam grafi	4
Şekil 3.3. G , H ve F grafları	5
Şekil 3.4. Bazı yol grafları	6
Şekil 3.5. Bazı çevre grafları	7
Şekil 4.1. $G+H$ Tensör çarpımında tepelerin matris gösterimi	10
Şekil 4.2. $P_2 + C_3$ Tensör Çarpımının Matris Gösterimi	10
Şekil 4.3. $P_2 + C_4$ Tensör Çarpımının Matris Gösterimi	11
Şekil 4.4. $P_2 + C_4$ Tensör Çarpımı	11
Şekil 5.1. G grafi	15
Şekil 5.2. $P_6 + C_5$ Çarpımının Matris Gösteriminde $(b,1)$ ve $(f,4)$ yolu	17
Şekil 6.1. Tensör Çarpımında her satıra ait en uzaklık değerleri	24
Şekil 6.2. Tensör Çarpımında her satıra ait en uzaklık değerleri	25
Şekil 6.3. Tensör Çarpımında her satıra ait en uzaklık değerleri	27

ÇİZELGELER DİZİNİ

	sayfa
Çizelge 5.1. G grafindaki uzaklıklar	15
Çizelge 5.2. G grafinda derece ve uzaklıklar	16

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

C	Çevre grafi
E	Ayrıtlar kümesi
G	Graf
K	Tam graf
P	Yol grafi
V	Tepeler kümesi

Kısaltmalar

$\deg(v)$	v tepesinin derecesi
$d_G(a, b)$	G grafında a ve b tepeleri arasındaki uzaklık
$ec(u)$	u tepesinin en uzaklığı
$E(G \times H)$	Kartezyen çarpım grafında ayrıtlar kümesi
$E(G + H)$	Tensör çarpım grafında ayrıtlar kümesi
$G + H$	G ve H graflarının tensör çarpım grafi
$G \times H$	G ve H graflarının kartezyen çarpım grafi
$GA(G)$	G grafının Geometrik-Aritmetik indeksi
$H(G)$	G grafının Harary indeksi
$\max$	Maksimum
$M(G)$	G grafının Zagreb indeksi
$PI(G)$	G grafının Pi indeksi
$R(G)$	G grafının Randic indeksi
$W_+(G)$	G grafının Schultz indeksi

$V(G+H)$	Tensör çarpım grafında tepeler kümesi
$V(G\times H)$	Kartezyen çarpım grafında tepeler kümesi
$W(G)$	G grafının Wiener indeksi
$WW(G)$	G grafının hyper-Wiener indeksi
$\xi(G)$	G grafının En uzak bağlantılılık indeksi

1. GİRİŞ

Bir graf, elemanları tepe olarak isimlendirilen boş olmayan sonlu bir V kümesi ve elemanları ayrıt olarak isimlendirilen ve yine elemanları bu V kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesinin oluşturduğu $G=(V, E)$ şeklindeki bir sıralı ikili ile ifade edilir. Graf Teorisi'nin bilinen en eski problemi 'Königsberg Köprü Problemi' dir. L.Euler 1736 yılında bu problemin imkansız olduğunu bir graf modeli yardımıyla göstermiştir. Graf Teorisi, bugün kendine özgü tanım ve teoremleriyle, uygulama alanı oldukça geniş olan ayrı bir matematik dalı olarak göze çarpmaktadır. Özellikle ekonomi, yönetim bilimi, satış pazarlama, endüstri alanının her kesiminde kullanılan dağıtım şebekeleri, üretim akışı modelleri ve yol haritalarında graflarla ilgili örneklerle rastlamak mümkündür.

Grafların tensör çarpımı, mühendislikte ağlarda bağlantılılık ile ilgili bir çok uygulamaya sahiptir. Graf teorisinde tensör çarpımının baskınlık, bağlantılılık ve moleküler graf teorisinde uygulamaları mevcuttur. Moleküler graf teorisinde tensör çarpımı literatürde son zamanlarda çoklukla yer almaya başlamıştır. Graflarda uzaklık ve derece kavramları ile ilişkili indeksler içerisinde en popüler olanlardan birisi de en uzak bağlantılılık indeksidir. Bu indeksin graflarda tensör çarpımındaki değeri ile ilgili çalışmalara literatürde rastlanmamıştır. Bu çalışmada en uzak bağlantılılık indeksi ve graflarda tensör çarpımının temel özellikleri verildikten sonra bazı graflarda tensör çarpımının en uzak bağlantılılık indeksi araştırılmıştır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Graflarda kronocker çarpımı da denilen tensör çarpımı ile ilgili ilk bilgiler Weichsel tarafından verilmiştir (Weichsell, 1962). Topolojik indeksler içinde ilk ve en önemli çalışma Wiener tarafından yapılmış ve bu çalışmada Parafinin kaynama noktası, bu molekülün grafindaki tepeleri arasındaki uzaklıklar türünden modellenmiştir (Wiener, 1947). Graflarda en uzak bağlantılılık indeksi Sharma ve arkadaşları tarafından tanımlanarak, metil ester türevlerinden oluşan 94 molekülün ağırlı kesici etkisinin tahmininde Wiener indeksinden daha iyi korelasyon verdiği bulunmuştur (Sharma ve ark., 1997). Gupta ve arkadaşları 76 karboksilik asitten oluşan moleküllerin iltihap sökücü etkisinin tahmininde yine en uzak bağlantılılık indeksinin Wiener indeksinden daha iyi korelasyon verdiğini bulmuşlardır (Gupta ve ark., 2002). En uzak bağlantılılık indeksin matematiksel özellikleri ile ilgili ilk çalışmada bu indeksin graf değişmezleri ile olan ilişkisi bulunmuştur (Zhou ve Du, 2010). Bu indeksin kimyasal ağaç graflarındaki değeri Ilic ve Gutman tarafından incelenmiştir (Ilic ve Gutman, 2011). Morgan ve arkadaşları en uzak bağlantılılık indeksin bazı graf değişmezleri ile olan ilişkisini çalışmışlardır (Morgan ve ark., 2011). Das ve Trinajstick en uzak bağlantılılık indeksin Zagreb indeksi ile olan ilişkisini kimyasal graflar ve kimyasal ağaç graflarında karşılaştırmışlardır (Das ve Trinajstick, 2011). Konu ile ilgili son çalışmayı Hua ve Das en uzak bağlantılılık indeksin Zagreb indeksi ile olan ilişkisini genel graflar için çalışmışlardır (Hua ve Das, 2013). Tensör çarpımının kimyasal indeksleri ile ilgili ilk çalışmayı Hoji ve arkadaşları Wiener ve PI indeksine uygulayarak yapmışlardır (Hoji ve ark., 2010). Yarahmadi, tensör çarpımını Randic, Geometrik-aritmetik, Zagreb, Harary ve Schultz indeksleri üzerine çalışmıştır (Yarahmadi, 2011). Tensör çarpımının ters-Wiener ve hyper-Wiener indeksleri Khodashenas ve Arani tarafından çalışılmıştır (Khodashenas ve Arani, 2012). Konu ile ilgili son çalışmada, bir grafin çok parçalı bir diğer grafla tensör çarpımının Wiener, hyper-Wiener ve PI indekslerinin değeri formülize edilmiştir (Pattabiraman ve Paulraja, 2012). Bu çalışmada ise en uzak bağlantılılık indeksinin, grafların tensör çarpımındaki değeri araştırılmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilerleyen bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı tanım ve örneklere yer verilmiştir.

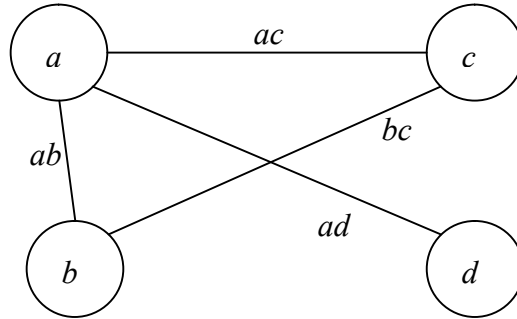
3.1. Tanım (Graf)

Elemanları tepe olarak isimlendirilen boş olmayan sonlu bir V kümesi ve elemanları ayırıt olarak isimlendirilen ve yine elemanları bu V kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir E kümesinin oluşturduğu $G = (V, E)$ sıralı ikilisine bir *graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

Graflar genellikle düzlem üzerindeki diyagramlar ile gösterilirler. Bu diyagramlar, tepeler ve ayırıtlar arasındaki ilişkileri anlamayı kolaylaştırmak amacıyla kullanılmaktadırlar ve birer fonksiyon grafiği değildirler. Örnek 3.2 de bir graf tanımlanmış ve bu graf Şekil 3.1 de gösterilmiştir.

3.2. Örnek

Tepeleri kümesi $V(G) = \{a, b, c, d\}$ ve ayırıtları kümesi $E(G) = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ olan $G(V, E)$ grafi Şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. $G = (V, E)$ grafi

3.3. Tanım (Komşuluk)

Bir grafa ait ayrıtların gösterimini kolaylaştırmak amacıyla, $\{a,b\}$ ayrıtı yerine ab gösterimi kullanılır. Eğer ab , G nin bir ayrıtı ise a ile b tepeleri *komşudurlar* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.4. Tanım (Bir Tepenin Derecesi)

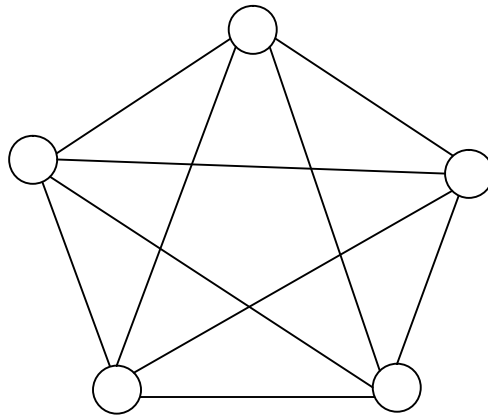
Bir v tepesine komşu olan tepelerin sayısına da v nin *derecesi* denir ve $\deg(v)$ ile gösterilir (Meng ve ark., 2007).

3.5. Tanım (k – düzenli graf)

G bir graf olsun. $\forall v \in V(G)$ için $\deg(v) = k$ ise, G grafına bir k – *düzenli graf* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.6. Tanım (Tam Graf)

Bir G grafının bütün tepeleri birbirleriyle komşu ve dereceleri $n-1$ ise, G ye *tam graf* denir (Meng ve ark., 2007). Tepe sayısı n olan bir tam graf K_n ile gösterilir. Şekil 3.2 de K_5 tam grafi gösterilmiştir.



Şekil 3.2. K_5 tam grafi

3.7. Tanım (Alt Graf, Özalt Graf)

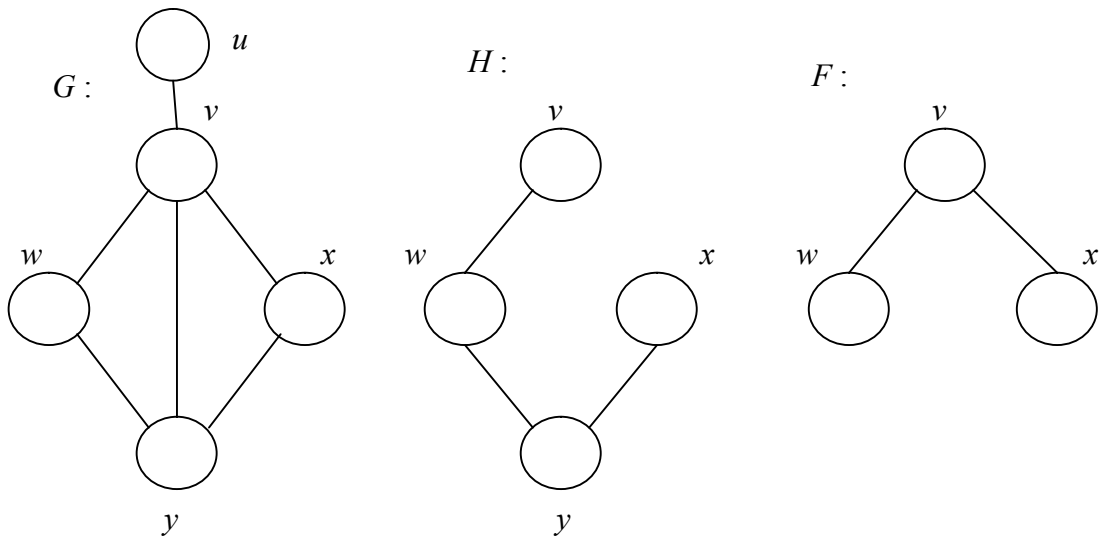
G ve H grafları için $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ koşulları sağlanıyorsa, H ye G nin bir *alt grafi* denir ve $H \subseteq G$ şeklinde gösterilir. Diğer taraftan $V(H) \subset V(G)$ veya $E(H) \subset E(G)$ ise H ye G nin bir *özalt grafi* denir ve $H \subset G$ şeklinde gösterilir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.8. Tanım (İndirgenmiş Alt Graf)

G ve H grafları için $H \subseteq G$ olsun. Bu durumda $\forall u, v \in V(F)$ için $uv \in E(G)$ iken $uv \in E(F)$ oluyorsa, F ye G nin bir *indirgenmiş alt grafi* denir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.9. Örnek

Şekil 3.3 de bir G grafi ve G nin bazı alt grafları gösterilmiştir. Şekildeki H grafi G nin bir indirgenmiş alt grafi değildir. Çünkü $v, x \in V(H)$ ve $vx \in E(G)$ iken $vx \notin E(H)$ olmaktadır. Diğer taraftan şekildeki F grafi G nin bir indirgenmiş alt grafidir.



Şekil 3.3. G , H ve F grafları

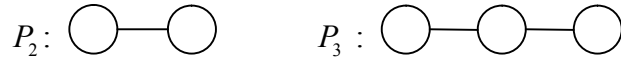
3.10. Tanım (Yürüyüş)

Bir G grafında v tepeleri için $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ biçiminde oluşan tepe ve ayrıt dizilişine yürüyüş denir (Buckley ve Harary, 1990).

3.11. Tanım (Yol Grafi)

Bir tepeden farklı bir tepeye varışta kullanılan her bir tepe bir kez kullanılıyorsa bu yürüyüşe yol denir. n tepeli bir yolda ayrıt sayısı $n-1$ dir (Buckley ve Harary, 1990).

Bir yol grafının başlangıç ve bitiş tepelerinin dereceleri 1, iç tepelerinin dereceleri ise 2 dir. Şekil 3.4 de bazı yol grafları gösterilmiştir.



Şekil 3.4. Bazı yol grafları

3.12. Tanım (Bir Yolun Uzunluğu)

Bir tepeden farklı bir tepeye varışta kullanılan ayrıt sayısına yolun uzunluğu denir (Buckley ve Harary, 1990).

3.13. Tanım (Bağlantılı Graf)

Bir G grafının herhangi iki tepesi arasında en az bir tane yol varsa G grafına *bağlantılı (birleştirilmiş) graf* denir (Buckley ve Harary, 1990).

3.14. Tanım (Graf Değişmezi)

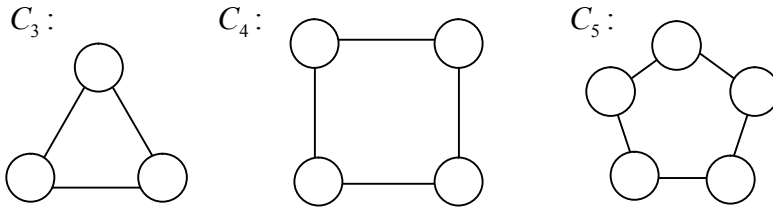
Bir grafa şekilden bağımsız olan değerlere *graf değişmezi* denir (Buckley ve Harary, 1990).

3.15. Tanım (Uzaklık)

G bir bağlantılı graf ve $u, v \in V(G)$ olsun. G deki $u-v$ yollarından en az sayıda ayrıt içeren yolun ayrıt sayısına, u ile v arasındaki *uzaklık* denir ve $d(u, v)$ ile gösterilir (Chartrand ve Zhang, 2005).

3.16. Tanım (Çevre Grafı)

Bir G grafının tüm tepelerinin derecesi iki ise bu grafa *çevre grafı* denir, n tepeli bir çevre grafı C_n ile gösterilir. n tepeli bir çevre grafının ayrıt sayısı n dir (Buckley ve Harary, 1990). Şekil 3.5 te bazı çevre grafları gösterilmiştir.



Şekil 3.5. Bazı çevre grafları

3.17. Tanım (İki Parçalı Graf)

G bir graf ve $V(G) = (X, Y)$ grafın tepelerinin bir parçalanışı olmak üzere, G nin bütün ayrıtları sadece X ve Y deki tepelerin karşılıklı olarak birleştirilmesinden oluşuyorsa G ye *iki parçalı graf* denir (Harju, 2007).

3.18. Tanım (Çevresiz Graf)

G grafı içerisinde herhangi bir çevre grafı barındırmıyorsa, G ye *çevresiz graf* denir (Meng ve ark., 2007).

3.19. Tanım (Ağaç Grafi)

G birleştirilmiş grafi çevresiz ise, G ye bir *ağaç* denir (Meng ve ark., 2007).

4. GRAFLARDA KARTEZYEN VE TENSÖR ÇARPIMLARI

Bu bölümde Grafların kartezyen çarpımı ile kronecker çarpımda denilen tensör çarpımı hakkında bazı temel kavramlara, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

4.1. Tanım (Grafların Kartezyen Çarpımı)

G ve H iki bağlantılı graf olsun. G ve H in kartezyen çarpımı $G \times H$ grafinin tepe ve ayrıt kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır (Balakrishnan ve Ranganathan, 2012).

$$V(G \times H) = \{vw \mid v \in V(G), w \in V(H)\} = V(G) \times V(H)$$

$$E(G \times H) = \{(vw)(v'w') \mid (v = v' \wedge ww' \in E(H)) \vee (w = w' \wedge vv' \in E(G))\}$$

4.2. Tanım (Tensör Çarpımı)

G ve H iki bağlantılı graf olsun. G ve H in tensör çarpımı $G+H$ grafinin tepe ve ayrıt kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır (Weichsell, 1962).

$$V(G+H) = \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\} = V(G) \times V(H)$$

$$E(G+H) = \{(uv)(u'v') \mid uu' \in E(G), vv' \in E(H)\}$$

4.3. Tanım (Tensör Çarpımının Matris Gösterimi)

G ve H iki bağlantılı graf olsun. $G+H$ tensör çarpım grafinin tepe ve ayrıtları matris şeklinde gösterilebilir (Weichsell, 1962).

4.4. Örnek

Tepe sayısı m olan G grafi ile tepe sayısı n olan H grafinin $G+H$ tensör çarpımı Şekil 4.1 de matris formunda gösterilmiştir. $(u_i, v_j) \in (G+H)$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{m-1} v_1 & u_{m-1} v_2 & \dots & u_{m-1} v_n \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \end{bmatrix}$$

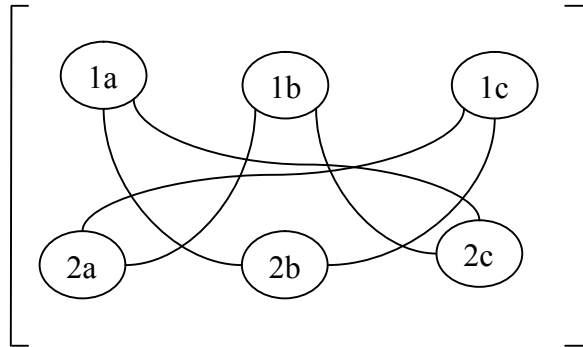
Şekil 4.1. G+H Tensör çarpımında tepelerin matris gösterimi

4.5. Gözlem:

Şekil 4.1 de görüldüğü gibi tepe sayısı m olan G grafi ile, tepe sayısı n olan H grafinin tensör çarpımında $n \times m$ veya $m \times n$ türünde bir matris elde edilir. Graflarda ayrıt ve tepeler graf değişmezi olduğundan şekilden bağımsız olup matrisin $n \times m$ veya $m \times n$ türünde alınmasında herhangi bir farklılık olmaz.

4.6. Örnek

$P_2 + C_3$ tensör çarpımının matris formunda gösterimi Şekil 4.2 deki gibi olur.



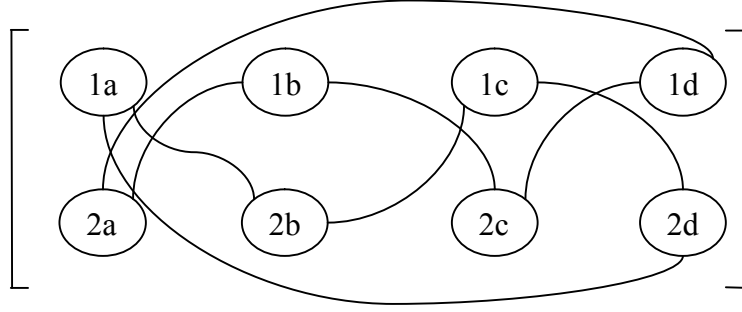
Şekil 4.2. $P_2 + C_3$ Tensör Çarpımının Matris Gösterimi

4.7. Teorem:

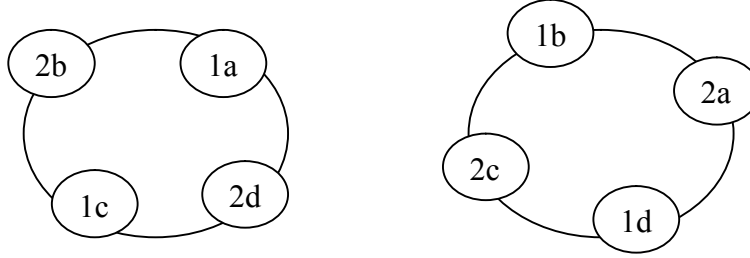
G ve H graflarının tensör çarpımlarının bağlantılı olması için G ve H graflarından en az biri tek çevre grafi içermelidir (Bottreau ve Metivier, 1998).

4.8. Örnek:

$P_2 + C_4$ tensör çarpımı Şekil 4.3 te matris formunda gösterilmiştir.



Şekil 4.3. $P_2 + C_4$ Tensör Çarpımının Matris Gösterimi



Şekil 4.4. $P_2 + C_4$ Tensör Çarpımı

4.9. Gözlem

Şekil 4.4 te 1a tepesi ile 1d tepesi arasında yol olmadığı açıktır. Dolayısıyla graf bağlantısız bir graftır. Bağlantısız olması iki grafında tek çevre içermemesinden kaynaklanmaktadır. Ayrıca grafa tepe ve ayrıtlar graf değişmezi olduğundan Şekil 4.4 te Tensör çarpım grafının bağlantısız olduğu açıkça görülebilir.

5. İNDEKSLER

Bu bölümde İndeks kavramı ve çeşitleri ile ilgili tanım, teorem ve örnekler verilmiştir.

5.1.1. Tanım (Moleküler Graf)

Bir grafta en yüksek dereceli tepenin derecesi “4” ise bu grafa moleküler graf veya kimyasal graf denir (Ghorbani ve ark., 2009).

5.1.2. Tanım (Topolojik İndeks)

Bir molekülün grafını karakterize etmek için kullanılan sayısal değerlere topolojik indeks denir (Hosoya, 1971). Topolojik indeksler moleküllerin fiziko kimyasal özelliklerini modellemede kullanılır.

5.1.3. Tanım (Wiener, Hyper Wiener İndeksleri)

Bir moleküler G grafında $u, v \in V(G)$ ve $uv \in E(G)$ olsun. Bu grafta sırasız tepe ikilileri arasındaki uzaklıklar toplamına Wiener indeksi denir (Wiener, 1947).

$$W(G) = \sum_{u,v \subseteq V} d_G(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in V \times V} d_G(u,v)$$

Hyper Wiener indeksi de aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Klein ve ark., 1995).

$$WW(G) = \frac{1}{2} W(G) + \frac{1}{4} \sum_{(u,v) \in V \times V} d_G^2(u,v)$$

5.1.4. Tanım (PI indeksi)

G grafında $u, v \in V(G)$ ve $e = uv$, G grafının bir kenarı olsun. $m_{eu}(e|G)$, u tepesine v tepesinden daha yakın tepelerin sayısı ve $m_{ev}(e|G)$, v tepesine u tepesinden daha yakın tepelerin sayısı olmak üzere G grafının PI indeksi aşağıdaki gibi tanımlanır (Deng ve Chen, 2007).

$$PI(G) = \sum_{e \in E(G)} (m_{eu}(e|G) + m_{ev}(e|G))$$

5.1.5. Tanım (Randic İndeksi)

Bir G grafında $u, v \in V(G)$ ve $uv \in E(G)$ olsun. Randic İndeksi aşağıdaki gibi tanımlanır (Randic, 1975).

$$R(G) = \sum_{uv \in E(G)} (\deg(u) \cdot \deg(v))^{-\frac{1}{2}}$$

5.1.6. Tanım (Zagreb İndeksi)

G grafi için $u, v \in V(G)$ olmak üzere Zagreb indeksi aşağıda belirtildiği gibi iki şekilde tanımlanmıştır (Gutman ve Trinajstić, 1972).

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} (\deg(u))^2$$

$$M_2(G) = \sum_{u, v \in V(G)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

5.1.7. Tanım (Aritmetik-Geometrik İndeks)

G grafında $u, v \in V(G)$ ve $uv \in E(G)$ olmak üzere, aritmetik-geometrik indeks aşağıdaki gibi tanımlanır (Vukicevic ve Furtula, 2009).

$$GA(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{\deg(u) \cdot \deg(v)}}{\frac{1}{2}(\deg(u) + \deg(v))}$$

5.1.8. Tanım (Schultz İndeksi)

G grafi için $u, v \in V(G)$ ve $uv \in E(G)$ olmak üzere, Schultz indeksi aşağıda belirtildiği gibi tanımlanır (Gutman ve ark., 2007).

$$W_+(G) = \sum_{(u,v) \subseteq V(G)} (\deg(u) + \deg(v)) \cdot d(u, v)$$

5.1.9. Tanım (Harary İndeksi)

Bir G grafında $u, v \in V(G)$ ve $uv \in E(G)$ olmak üzere, Harary indeksi aşağıdaki gibi tanımlanır (Su ve ark., 2013).

$$H(G) = \sum_{(u,v) \subseteq V(G)} (\deg(u) \cdot \deg(v))^{-\frac{1}{2}}$$

5.1.10. Tanım (En Uzaklık)

Bir G grafında $u, v \in V(G)$ olmak üzere, herhangi bir u tepesine uzaklığı en fazla olan tepe v ise bu uzaklığa u tepesinin en uzaklığı denir ve $ec(u)$ ile gösterilir (Gupta ve ark., 2002).

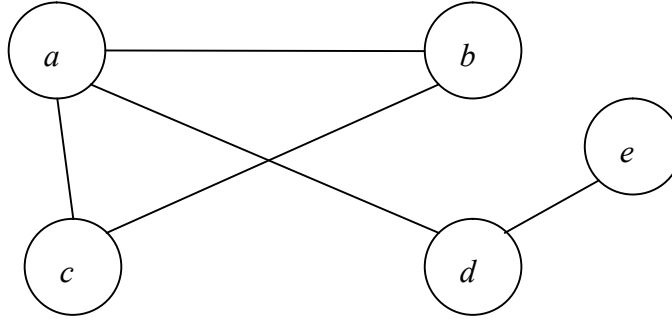
5.1.11. Tanım (En Uzak Bağlantılılık İndeksi)

Bir G grafında $u, v \in V(G)$ ve $uv \in E(G)$ olmak üzere, en uzak bağlantılılık indeksi aşağıdaki gibi tanımlanır (Gupta ve ark., 2002).

$$\xi(G) = \sum_{u \in V(G)} ec(u) \cdot \deg(u)$$

5.1.12. Örnek

Şekil 5.1 deki G grafının Wiener ve En uzak bağlantılılık indekslerini araştıralım.



Şekil 5.1. G grafi

Çözüm

Çizelge 5.1. G grafindaki uzaklıklar

$d(a,b)$	$= 1$
$d(a,c)$	$= 1$
$d(a,d)$	$= 1$
$d(a,e)$	$= 2$
$d(b,c)$	$= 1$
$d(b,d)$	$= 2$
$d(b,e)$	$= 3$
$d(c,d)$	$= 2$
$d(c,e)$	$= 3$
$d(d,e)$	$= 1$

Wiener indeksi uzaklıklar toplamı olduğundan: $W(G) = 17$

Çizelge 5.2. G grafında derece ve en uzaklıklar

Tepe	Derece(deg)	En uzaklık(ec)
<i>a</i>	3	2
<i>b</i>	2	3
<i>c</i>	2	3
<i>d</i>	2	2
<i>e</i>	1	3

$\xi(G) = \sum_{u \in V(G)} ec(u) \cdot \deg(u)$ olduğundan En uzak bağlantılılık indeksi

$$\xi(G) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 25 \text{ olur.}$$

5.1.13. Gözlem

Örnek 5.1.11 de görüleceği üzere indeks sonuçlarında farklı değerler elde edilmiştir. İndekslerde herhangi bir kimyasal molekülün, herhangi bir fiziko kimyasal özelliğinin tahminindeki yaklaşımlarının doğrulukları istatistiksel analizlerle yapılmaktadır. En uzak bağlantılılık indeksinin hesabında bizim araştırmamız gereken asıl hususun en uzaklık değeri olduğu açıkça görülmektedir.

5.1.14. Lemma

$d_{G+H}((u, v), (u', v')) \geq \max \{d_G(u, u'), d_H(v, v')\}$ (Khodashenas ve Arani, 2012)

İspat

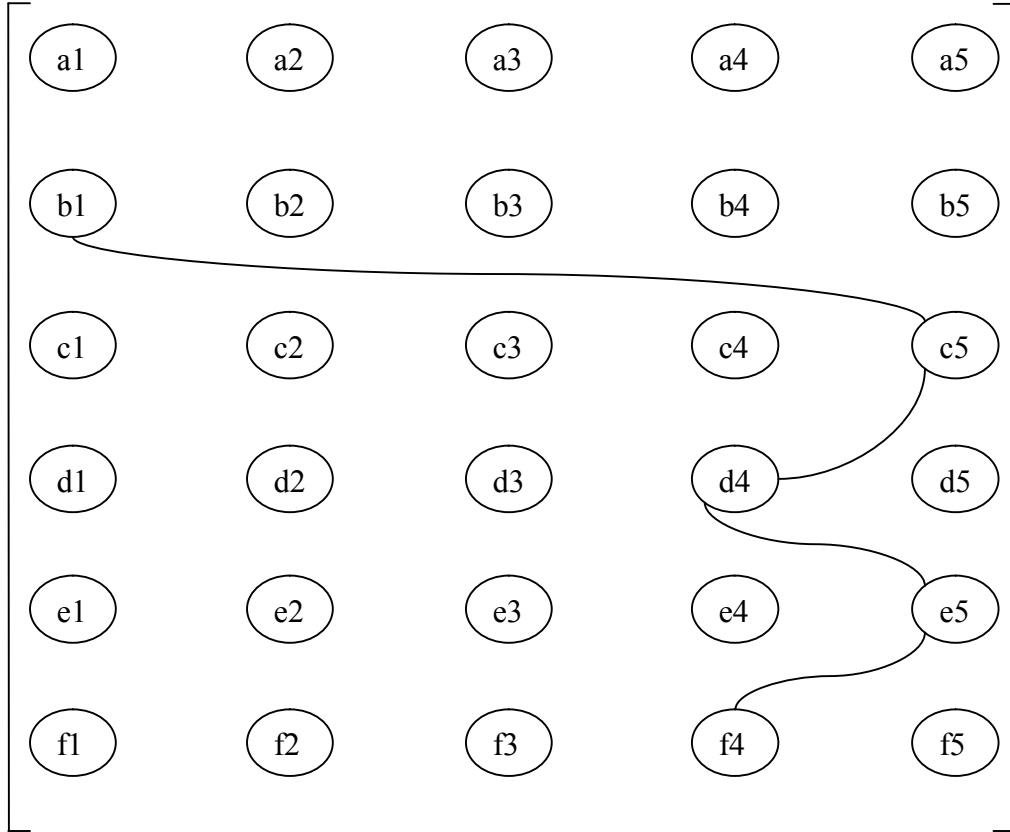
Açıktır ki, (u, v) ve (u', v') birleştiren en kısa yol; u, u' ve v, v' aralarındaki yürüyüşleri içerir.

5.1.15. Örnek

$P_6 + C_5$ tensör çarpımına göre, $d((b,1),(f,4))$ uzaklığını bulalım.

Çözüm

b ile f arasındaki en kısa yolun $bcdef$ yürüyüşü olduğu açıktır. Ayrıca 1 ile 4 tepeleri arasındaki en kısa yolun 154 yürüyüşü olduğu görülür. Şekil 5.2 de tensör çarpımındaki bütün ayrıtlar çizilmeden $(b,1)$ ile $(f,4)$ tepeleri arasındaki en kısa yol gösterilmiştir.



Şekil 5.2. $P_6 + C_5$ Çarpımının Matris Gösteriminde $(b,1)$ ve $(f,4)$ yolu

$(b,1)$ ve $(f,4)$ arasındaki $(b,1),(c,5),(d,4),(e,5),(f,4)$ yolu 4 uzunlukludur.

Bu sebeple $d((b,1),(f,4)) = 4$ olur.

5.1.16. Gözlem

Örnek 5.1.15 te $(b,1),(c,5),(d,4),(e,5),(f,4)$ yolu, P_6 grafında b ile f tepeleri arasındaki $bcdef$ yürüyüşünü ve C_5 grafında 1 ile 4 tepeleri arasındaki 154 yürüyüşlerini içerir.

5.1.17. Tanım (Kuvvetli Üçgensel Graf)

H bir graf ve $u, v \in V(H)$ olsun. $\forall u, v$ tepesi için, bu iki tepeye komşu olan bir w tepesi varsa H grafına kuvvetli üçgensel graf denir (Khodashenas ve Arani, 2012).

5.1.18. Teorem

H bir kuvvetli üçgensel graf; G ve H bağlantılı iki graf olsun. $\forall (u, v), (u', v') \in V(G + H)$ için:

$$d_{G+H}((u, v), (u', v')) = \begin{cases} 2 & , uu' \in E(G), vv' \notin E(H) \text{ ve } uu' \text{ G'de bir üçgenin kenarıdır} \\ & uu' \in E(G), v = v' \text{ ve } uu' \text{ G'de bir üçgenin kenarıdır} \\ 3 & , uu' \in E(G), vv' \notin E(H) \text{ ve } uu' \text{ G'de bir üçgenin kenarı değil} \\ & uu' \in E(G), v = v' \text{ ve } uu' \text{ G'de bir üçgenin kenarı değildir} \\ d_G(u, u') & , \text{ Diğer durumlar için} \end{cases}$$

olur (Khodashenas ve Arani, 2012).

İspat

G grafında, $P: u = u_1, u_2, \dots, u_n = u'$; u ve u' arasındaki en kısa yol

H grafında, w , v ve v' ile komşu ve z , v ve w ile komşu olsun. İspat için üç durum vardır.

DURUM 1:

$u = u'$ ve $v = v'$ olmak üzere, (u, v) ve (u', v') $G+H$ grafının iki tepesi olsun.

Bu durumu üç adımda ispatlayacağız.

1. Adım:

$d_G(u, u') = 2k + 1$, $k > 0$ olsun.

Eğer $vv' \in E(H)$ ise; $(u_1, v), (u_2, v'), (u_3, v), \dots, (u_{n-1}, v), (u_n, v')$ yolu (u, v) ve (u', v') arasındaki en kısa yol olup, uzunluğu $d_G(u, u')$ dür.

Eğer $vv' \notin E(H)$ ise; $(u_1, v), (u_2, w), (u_3, z), (u_4, v'), (u_5, z), \dots, (u_{n-1}, z), (u_n, v')$ yolu (u, v) ve (u', v') arasındaki en kısa yol olup, uzunluğu $d_G(u, u')$ dür.

Lemma'dan $d_{G+H}((u, v), (u', v')) = d_G(u, u')$

2. Adım:

$d_G(u, u') = 2k$, $k > 0$ olsun.

$(u_1, v), (u_2, w), (u_3, v), (u_4, w), \dots, (u_{n-1}, w), (u_n, v')$ yolu (u, v) ve (u', v') arasındaki en kısa yol olup, uzunluğu $d_G(u, u')$ dür. Lemma'dan $d_{G+H}((u, v), (u', v')) = d_G(u, u')$

3. Adım:

$d_G(u, u') = 1$ olsun.

$vv' \in E(H)$ ise, (u, v) ve (u', v') yolunun uzunluğu 1 dir.

$vv' \notin E(H)$ olsun.

Eğer uu' bir üçgenin kenarı ise $vv' \notin E(H)$ olduğundan $d_{G+H}((u, v), (u', v')) \geq 2$. u'' nün u ve u' ne komşu olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(u, v), (u'', w), (u', v')$ yolunun uzunluğu 2 dir. Buradan $d_{G+H}((u, v), (u', v')) = 2$

Eğer uu' bir üçgenin kenarı değilse açıktır ki $d_{G+H}((u, v), (u', v')) \geq 3$ olur.

Diğer taraftan, $(u, v), (u', w), (u, z), (u', v')$ uzunluğu 3 olan bir yol olur ki,
 $d_{G+H}((u, v), (u', v')) = 3$

DURUM 2:

$u \neq u'$ ve $v = v'$ olmak üzere, (u, v) ve (u', v') $G+H$ grafinin iki tepesi olsun. v_1 in v ve w ye komşu olduğunu kabul edelim.

Eğer $d_G(u, u') = 2k, k > 0$ ise

$(u_1, v), (u_2, v_1), (u_3, w), \dots, (u', v)$ yolu (u, v) ve (u', v') arasındaki $d_G(u, u')$ uzunluklu en kısa yoldur.

Eğer $d_G(u, u') = 2k + 1, k > 0$ ise

$(u_1, v), (u_2, v_1), (u_3, w), (u_4, v), \dots, (u_{n-1}, w), (u', v)$ yolu (u, v) ve (u', v') arasındaki $d_G(u, u')$ uzunluklu en kısa yoldur.

Lemma'dan $d_{G+H}((u, v), (u', v')) = d_G(u, u')$

DURUM 3:

$u = u'$ ve $v \neq v'$ olmak üzere, (u, v) ve (u', v') $G+H$ grafinin iki tepesi olsun.

Bu durumda $(u_1, v), (u_2, w), (u_3, v')$ yolu (u, v) ve (u', v') arasındaki 2 uzunluklu yoldur. İspat tamamlanmış olur.

6. BAZI GRAFLARIN TENSÖR ÇARPIMININ EN UZAK BAĞLANTILILIK İNDEKSİ

Bu bölümde bazı özel grafların tensör çarpımlarının en uzak bağlantılılık indeksi için lazım olan en uzaklık hesabı ve en uzak bağlantılılık indeksi için elde edilen teorem ve ispatları ile örneklerle yer verilmiştir.

6.1. En Uzaklık Teoremleri

Bu kısımda elde edilen teoremlere yer verilecektir.

6.1.1.Lemma

$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olmak üzere, $G_m + H_n$ tensör çarpımında herhangi bir tepe $(u_i, v_j) \in (G_m + H_n)$ olmak üzere (u_i, v_j) tepesinin en uzaklığını veren tepe (u_m, v_j) , (u_i, v_n) , $\left(u_i, v_{j \mp \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\right)$, $\left(u_{i \mp \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}, v_j\right)$, $(u_{i \mp 1}, v_j)$, $(u_i, v_{j \mp 1})$, tepelerinden biridir.

İspat

Açıktır ki, (u_i, v_j) tepesinin en uzaklığını veren tepe (u_m, v_j) , (u_i, v_n) , $\left(u_i, v_{j \mp \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\right)$, $\left(u_{i \mp \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}, v_j\right)$, $(u_{i \mp 1}, v_j)$, $(u_i, v_{j \mp 1})$, tepelerinden biridir.

6.1.2. Teorem

$K_m + K_n$ tensör çarpımında $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $\forall (u_i, v_j) \in (K_m + K_n)$ için, $ec(u_i, v_j) = 2$ dir.

İspat

$\forall (u_i, v_j) \in (K_m + K_n)$ için Lemma 'dan (u_i, v_j) tepesine en uzak olan tepe $(u_{i\mp 1}, v_j)$ veya $(u_i, v_{j\mp 1})$ tepelerinden biridir. Bu tepeler arasındaki uzaklık $(u_{i\mp 1}, v_j)$ tepesi için, $(u_i, v_j), (u_{i\mp 2}, v_{j+1}), (u_{i\mp 1}, v_j)$ olup 2 uzunluklu yoldur. Benzer şekilde diğer tepe içinde bulunur.

6.1.3. Teorem

$C_m + K_n$ tensör çarpımında $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $\forall (u_i, v_j) \in (C_m + K_n)$ için, $m \geq 6$ ise $ec(u_i, v_j) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dir.

İspat

$m \geq 6$ olsun.

$\forall (u_i, v_j) \in (C_m + K_n)$ için Lemma dan (u_i, v_j) tepesine en uzak olan tepe $\left(u_{i\mp \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}, v_{j\mp t} \right)$ tepesidir. Bu tepeler arasındaki uzaklık $(u_i, v_j), (u_{i\mp 1}, v_{j\mp 1}), \dots, \left(u_{i\mp \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}, v_{j\mp t} \right)$ olup $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ uzunluklu yoldur.

6.1.4. Teorem

$C_m + C_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (C_m + K_n), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $n = 2k + 1, k > 0$ olsun. $\forall (u_i, v_j)$ için en uzaklıklar aşağıda belirtildiği gibidir:

$$ec(u_i, v_j) = \begin{cases} n & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t, \quad t > 1 \\ \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t+1, \quad t > 0, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{veya} \quad m > 2n+1 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t+1, \quad t > 0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

İspat

$C_m + C_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (C_m + K_n), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$,
 $n = 2k+1, k > 0$, olmak üzere:

1. Durum:

$m \leq 2n+1$ olsun.

Eğer m çift sayı ise (u_i, v_j) tepesine en uzak olan tepelerden $(u_{i\mp 1}, v_{j\mp t})$ için,
 $(u_i, v_j), (u_{i\mp 1}, v_{j\mp 1}), (u_{i\mp 2}, v_{j\mp 2}), \dots, (u_i, v_n), (u_{i\mp 1}, v_1), \dots, (u_{i\mp 1}, v_j)$ yolu n uzunluklu en kısa
yol olup $ec(u_i, v_j) = n$ olur.

Eğer m tek sayı ve $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ise (u_i, v_j) tepesine en uzak olan tepelerden

$\left(u_{i\mp \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}, v_{j\mp t}\right)$ için, $(u_i, v_j), (u_{i\mp 1}, v_{j\mp 1}), \dots, (u_m, v_j), (u_1, v_{j\mp 1}), \dots, \left(u_{i\mp \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}, v_{j\mp t}\right)$ yolu $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$

uzunluklu en kısa yol olup $ec(u_i, v_j) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olur.

Eğer m tek sayı ve $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ise (u_i, v_j) tepesine en uzak olan tepelerden

$\left(u_{i\mp t}, v_{j\mp \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\right)$ için, $(u_i, v_j), (u_{i\mp 1}, v_{j\mp 1}), \dots, (u_i, v_n), (u_{i\mp 1}, v_1), \dots, \left(u_{i\mp t}, v_{j\mp \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\right)$ yolu $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

uzunluklu en kısa yol olup $ec(u_i, v_j) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olur.

2. Durum:

$m > 2n + 1$ olsun.

(u_i, v_j) tepesine en uzak olan tepelerden $\left(u_{i \mp \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}, v_{j \mp t}\right)$ için ,
 $(u_i, v_j), (u_{i \mp 1}, v_{j \mp 1}), \dots, (u_m, v_j), (u_1, v_{j \mp 1}), \dots, \left(u_{i \mp \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}, v_{j \mp t}\right)$ yolu $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ uzunluklu en kısa yol
 olup $ec(u_i, v_j) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olur.

6.1.5. Teorem

$P_m + K_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + K_n), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olmak üzere, her satırın her tepesinin en uzaklığı yanında Şekil 6.1 de gösterildiği gibidir:

m tek ise,	m çift ise,
$\begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \rightarrow \boxed{m-1} \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{\frac{m+1}{2}} v_1 & u_{\frac{m+1}{2}} v_2 & \dots & u_{\frac{m+1}{2}} v_n \rightarrow \boxed{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{m-1} v_1 & u_{m-1} v_2 & \dots & u_{m-1} v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \rightarrow \boxed{m-1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \rightarrow \boxed{m-1} \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{\frac{m}{2}} v_1 & u_{\frac{m}{2}} v_2 & \dots & u_{\frac{m}{2}} v_n \rightarrow \boxed{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \\ u_{\frac{m}{2}+1} v_1 & u_{\frac{m}{2}+1} v_2 & \dots & u_{\frac{m}{2}+1} v_n \rightarrow \boxed{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{m-1} v_1 & u_{m-1} v_2 & \dots & u_{m-1} v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \rightarrow \boxed{m-1} \end{bmatrix}$

Şekil 6.1. Tensör Çarpımında her satıra ait en uzaklık değerleri

İspat

$(u_i, v_j) \in (P_m + K_n), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olsun.

Eğer m tek sayı ise, $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + K_n)$ için (u_1, v_j) tepelerinin en uzaklığını

$(u_m, v_{j \mp k})$, $0 \leq k \leq n-1$ tepeleri verir. $(u_1, v_j), (u_2, v_{j \mp 1}), (u_3, v_{j \mp 2}), \dots, (u_m, v_{j \mp k})$ yolu (u_1, v_j) ve $(u_m, v_{j \mp k})$ tepelerini birleştiren $m-1$ uzunluklu en kısa yoldur.

Benzer şekilde bütün satırlar için aynı işlem uygulanabilir. Ortadaki satır için $\left(u_{\frac{m+1}{2}}, v_j\right)$ tepelerinin en uzaklığını $(u_1, v_{j \mp k})$ veya $(u_m, v_{j \mp k})$ tepelerinden biri verir.

$\left(u_{\frac{m+1}{2}}, v_j\right), \left(u_{\frac{m+1}{2}+1}, v_{j \mp 1}\right), \left(u_{\frac{m+1}{2}+2}, v_{j \mp 2}\right), \dots, (u_m, v_{j \mp k})$ yolu $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ uzunluklu en kısa yoldur.

Eğer m çift sayı ise, bu durumun m nin tek sayı olmasından farkı $\frac{m}{2}$ ve $\frac{m}{2}+1$ inci satırların ikisinin de en uzaklığının $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olmasıdır. Bu m nin çift olmasından kaynaklanmaktadır. Aynı düşünce ile buradaki satırlar içinde yol hesabı yapılır.

6.1.6. Teorem

$P_m + C_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + C_n)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $n = 2k+1, k > 0$ olsun.

Eğer $m \leq n+1$ ise $ec(u_i, v_j) = n$ ve

Eğer $m > n+1$ ise her satırın her tepesinin en uzaklığı Şekil 6.1 de belirtildiği gibidir:

m tek ise.	m çift ise.
$\begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \rightarrow \boxed{m-1} \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{\frac{m+1}{2}} v_1 & u_{\frac{m+1}{2}} v_2 & \dots & u_{\frac{m+1}{2}} v_n \rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{m-1} v_1 & u_{m-1} v_2 & \dots & u_{m-1} v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \rightarrow \boxed{m-1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \rightarrow \boxed{m-1} \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{\frac{m}{2}} v_1 & u_{\frac{m}{2}} v_2 & \dots & u_{\frac{m}{2}} v_n \rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \\ u_{\frac{m}{2}+1} v_1 & u_{\frac{m}{2}+1} v_2 & \dots & u_{\frac{m}{2}+1} v_n \rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{m-1} v_1 & u_{m-1} v_2 & \dots & u_{m-1} v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \rightarrow \boxed{m-1} \end{bmatrix}$

Şekil 6.2. Tensör Çarpımında her satıra ait en uzaklık değerleri

İspat

DURUM 1:

$(u_i, v_j) \in (P_m + C_n)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $n = 2k + 1$, $k > 0$ ve $m \leq n + 1$ olsun.

$\forall (u_i, v_j) \in (P_m + C_n)$ için (u_i, v_j) tepesinin en uzaklığını (u_{i+1}, v_j) veya (u_{i-1}, v_j) tepelerinden biri verir.

(u_{i+1}, v_j) tepesi için, $(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_{j+1}), (u_i, v_{j+2}), \dots, (u_i, v_n), \dots, (u_{i+1}, v_j)$ yolu n uzunluklu en kısa yoldur.

DURUM 2:

$m \leq n + 1$ olsun.

Eğer m tek sayı ise, $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + C_n)$ için (u_1, v_j) tepelerinin en uzaklığını $(u_m, v_{j \mp k})$, $0 \leq k \leq n - 1$ tepeleri verir. $(u_1, v_j), (u_2, v_{j \mp 1}), (u_3, v_{j \mp 2}), \dots, (u_m, v_{j \mp k})$ yolu $m - 1$ uzunluklu en kısa yoldur.

Benzer şekilde bütün satırlar için aynı işlem uygulanabilir. Ortadaki satır için

$\left(u_{\frac{m+1}{2}}, v_j\right)$ tepelerinin en uzaklığını $(u_1, v_{j \mp k})$ veya $(u_m, v_{j \mp k})$ tepelerinden biri verir.

$\left(u_{\frac{m+1}{2}}, v_j\right), \left(u_{\frac{m+1}{2}+1}, v_{j \mp 1}\right), \left(u_{\frac{m+1}{2}+2}, v_{j \mp 2}\right), \dots, (u_m, v_{j \mp k})$ yolu $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ uzunluklu en kısa yoldur.

Eğer m çift sayı ise, bu durumun m nin tek sayı olmasından farkı $\frac{m}{2}$ ve $\frac{m}{2} + 1$

inci satırların ikisinin de en uzaklığının $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olmasıdır. Bu m nin çift olmasından

kaynaklanmaktadır. Aynı düşünce ile buradaki satırlar içinde yol hesabı yapılır.

6.1.7. Teorem

$P_m + H_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + H_n)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olsun.

Her satırın her tepesinin en uzaklığı Şekil 6.1 de belirtildiği gibidir.

$$\begin{array}{cc}
\text{m tek ise,} & \text{m çift ise.} \\
\left[\begin{array}{cccc} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \rightarrow \boxed{m-1} \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{\frac{m+1}{2}} v_1 & u_{\frac{m+1}{2}} v_2 & \dots & u_{\frac{m+1}{2}} v_n \rightarrow \boxed{\frac{m}{2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{m-1} v_1 & u_{m-1} v_2 & \dots & u_{m-1} v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \rightarrow \boxed{m-1} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cccc} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \rightarrow \boxed{m-1} \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{\frac{m}{2}} v_1 & u_{\frac{m}{2}} v_2 & \dots & u_{\frac{m}{2}} v_n \rightarrow \boxed{\frac{m}{2}} \\ u_{\frac{m}{2}+1} v_1 & u_{\frac{m}{2}+1} v_2 & \dots & u_{\frac{m}{2}+1} v_n \rightarrow \boxed{\frac{m}{2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{m-1} v_1 & u_{m-1} v_2 & \dots & u_{m-1} v_n \rightarrow \boxed{m-2} \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \rightarrow \boxed{m-1} \end{array} \right]
\end{array}$$

Şekil 6.3. Tensör Çarpımında her satıra ait en uzaklık değerleri

İspat

$P_m + H_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + H_n)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ve

$n \geq 3$ olsun. Teorem 5.1.18 den:

$$d_{G+H}((u, v), (u', v')) = \begin{cases} 2 & , \text{ } u u' \in E(G), v v' \notin E(H) \text{ ve } u u' \text{ } G \text{ de bir üçgenin kenarındır} \\ & \text{ } u u' \in E(G), v = v' \text{ ve } u u' \text{ } G \text{ de bir üçgenin kenarındır} \\ 3 & , \text{ } u u' \in E(G), v v' \notin E(H) \text{ ve } u u' \text{ } G \text{ de bir üçgenin kenarı değil} \\ & \text{ } u u' \in E(G), v = v' \text{ ve } u u' \text{ } G \text{ de bir üçgenin kenarı değildir} \\ d_G(u, u') & , \text{ Diğer durumlar için} \end{cases}$$

Oluş en uzaklığı belirleyen tepenin uzaklık hesabını, diğer durumlar için maddesinde belirtilen P_m grafindaki uzaklıklar belirlediğinden bu graftaki en uzaklıklar için,

$\forall (u_i, v_j) \in (P_m + H_n)$ için (u_1, v_j) tepelerinin en uzaklığını $(u_m, v_{j \mp k})$, $0 \leq k \leq n-1$ tepeleri verir. $(u_1, v_j), (u_2, v_{j \mp 1}), (u_3, v_{j \mp 2}), \dots, (u_m, v_{j \mp k})$ yolu $m-1$ uzunluklu en kısa yoldur.

Benzer şekilde bütün satırlar için aynı işlem uygulanabilir. Ortadaki satır için

$\left(u_{\frac{m+1}{2}}, v_j\right)$ tepelerinin en uzaklığını $(u_1, v_{j \mp k})$ veya $(u_m, v_{j \mp k})$ tepelerinden biri verir.

$\left(u_{\frac{m+1}{2}}, v_j\right), \left(u_{\frac{m+1}{2}+1}, v_{j \mp 1}\right), \left(u_{\frac{m+1}{2}+2}, v_{j \mp 2}\right), \dots, (u_m, v_{j \mp k})$ yolu $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ uzunluklu en kısa yoldur.

Eğer m çift sayı ise, bu durumun m nin tek sayı olmasından farkı $\frac{m}{2}$ ve $\frac{m}{2} + 1$

inci satırların ikisinin de en uzaklığının $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ olmasıdır.

Bu m nin çift olmasından kaynaklanmaktadır. Aynı düşünce ile buradaki satırlar içinde yol hesabı yapılır.

6.1.8. Teorem

$K_m + H_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (K_m + H_n), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ için $ec(u_i, v_j) = 2$ dir.

İspat

$K_m + H_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (K_m + H_n), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olsun.

Teorem 5.1.18 den:

$$d_{G+H}((u, v), (u', v')) = \begin{cases} 2 & , uu' \in E(G), vv' \notin E(H) \text{ ve } uu' \text{ G'de bir üçgenin kenarıdır} \\ & uu' \in E(G), v = v' \text{ ve } uu' \text{ G'de bir üçgenin kenarıdır} \\ d_G(u, u') & , \text{ Diğer durumlar için} \end{cases}$$

Ayrıca $\forall u_i \in K_m$ için $ec(u_i) = 1$ olduğundan dolayı en uzaklık 2 olur.

6.2. En Uzak Bağlantılılık İndeksi Teoremleri

Bu bölümde En uzak bağlantılılık indeksi ile ilgili elde edilen teoremlere yer verilecektir.

6.2.1. Teorem

$K_m + K_n$ tensör çarpımında $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $\forall (u_i, v_j) \in (K_m + K_n)$ olsun.

$\xi(K_m + K_n)$ en uzak bağlantılılık indeksi

$$\xi(K_m + K_n) = 2.m.n.(m-1).(n-1) \text{ dir.}$$

İspat

$\forall (u_i, v_j) \in (K_m + K_n)$ için Teorem 6.1.2 den $ec(u_i, v_j) = 2$ dir. Ayrıca tepe sayısı tensör çarpım tanımından $m.n$ ve $\forall (u_i, v_j) \in (K_m + K_n)$ için $\deg(u_i, v_j) = (m-1)(n-1)$ olduğundan

$$\xi(G) = \sum_{u \in V(G)} ec(u).deg(u)$$

$$\xi(K_m + K_n) = 2.m.n.(m-1).(n-1) \text{ olur.}$$

6.2.2. Teorem

$C_m + K_n$ tensör çarpımında $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $\forall (u_i, v_j) \in (C_m + K_n)$ için,

$\xi(C_m + K_n)$ en uzak bağlantılılık indeksi

$$m \geq 6 \text{ ise } \xi(C_m + K_n) = 2.\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.(n-1).n.m \text{ olur.}$$

İspat

$m \geq 6$ için, $\forall (u_i, v_j) \in (C_m + K_n)$ için Teorem 6.1.3 den $ec(u_i, v_j) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ dir.

Ayrıca tepe sayısı tensör çarpım tanımından $m.n$ ve $\forall (u_i, v_j)$ için $\deg(u_i, v_j) = 2(n-1)$ olduğundan

$$\xi(G) = \sum_{u \in V(G)} ec(u) \cdot \deg(u)$$

$$\xi(C_m + K_n) = 2 \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot (n-1) \cdot n \cdot m \text{ olur.}$$

6.2.3. Teorem

$C_m + C_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (C_m + K_n)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$,
 $n = 2k+1, k > 0$ olmak üzere $\xi(C_m + C_n)$ en uzak bağlantılılık indeksi aşağıda belirtildiği gibi hesaplanır:

$$\xi(C_m + C_n) = \begin{cases} 2.n^2.m.(n-1) & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t, \quad t > 1 \\ 2.n.m.(n-1) \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t+1, \quad t > 0, \quad \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ & \text{veya} \quad m > 2n+1 \\ 2.n.m.(n-1) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t+1, \quad t > 0, \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

İspat

$C_m + C_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (C_m + K_n)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$,

$n = 2k + 1$, $k > 0$ olsun.

Bu tensör çarpımında $n.m$ tepe olduğundan ve her tepenin derecesinin $n = 2.(n-1)$ olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca Teorem 6.1.4 ten:

$$ec(u_i, v_j) = \begin{cases} n & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t, \quad t > 1 \\ \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t+1, \quad t > 0, \quad \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ veya } m > 2n+1 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t+1, \quad t > 0, \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

$$\text{ve } \xi(G) = \sum_{u \in V(G)} ec(u).deg(u)$$

$$\xi(C_m + C_n) = \begin{cases} 2.n^2.m.(n-1) & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t, \quad t > 1 \\ 2.n.m.(n-1). \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t+1, \quad t > 0, \quad \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ & \text{veya } m > 2n+1 \\ 2.n.m.(n-1) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & , \quad m \leq 2n+1, \quad m = 2t+1, \quad t > 0, \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

olur.

6.2.4. Teorem

$P_m + K_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + K_n)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olmak üzere, $\xi(P_m + K_n)$ en uzak bağlantılılık indeksi aşağıda belirtilen bağıntılarla hesaplanır:

$$\xi(P_m + K_n) = \begin{cases} 2.n.(n-1) \left[1.(m-1) + 2.(m-2) + \dots + 2.\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right) + 2.\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right] , & m \text{ çift ise} \\ 2.n.(n-1) \left[1.(m-1) + 2.(m-2) + \dots + 2.\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right) + 1.\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right] , & m \text{ tek ise} \end{cases}$$

İspat

$P_m + K_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + K_n)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olsun.

Teorem 6.1.5. ten her satıra ait tepelerin en uzaklıkları

Eğer m tek ise,

bir ve m inci satırların derecesi $(n-1)$

iki ve $m-1$ inci satırların derecesi $2.(n-1)$

üç ve $m-2$ inci satırların derecesi $2.(n-1)$

...

m inci satırın derecesi $2.(n-1)$ ve her satırda n tepe olduğundan ,

Birinci ve m inci satır elemanlarının en uzak bağlantılılık indeksleri toplamı ,

$$2.n.1.(n-1).(m-1)$$

İkinci ve $m-1$ inci satır elemanlarının en uzak bağlantılılık indeksleri toplamı ,

$$2.n.2.(n-1).(m-2)$$

...

$\frac{m+1}{2}$ nci satır elemanlarının en uzak bağlantılılık indeksleri toplamı,

$$n.2.(n-1).\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \quad \text{olup bu değerlerin hepsini toplarsak}$$

$$2.n.(n-1) \left[1.(m-1) + 2.(m-2) + \dots + 2.\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right) + 1.\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right] \text{ olur.}$$

Benzer düşünce ile m nin çift olma durumu incelendiğinde tek farkın, $\frac{m}{2}$ ve

$\frac{m}{2} + 1$ inci satırların ikisinin de en uzak bağlantılılık indekslerinin m nin tek olma

durumun $\frac{m+1}{2}$ inci satırına eşit olmasıdır. Bu sebeple m çift ise toplam indeks

$$2.n.(n-1) \left[1.(m-1) + 2.(m-2) + \dots + 2. \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \right) + 2. \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right] \text{ olur.}$$

6.2.5. Teorem

$P_m + C_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + C_n)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $n = 2k + 1, k > 0$ ise $\xi(P_m + C_n)$ En uzak bağlantılılık indeksi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\xi(P_m + C_n) = \begin{cases} 2.n^2.(n-1)(m-1) & , m \leq n+1 \\ 2.n.(n-1) \left[1.(m-1) + 2.(m-2) + \dots + 2. \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \right) + 2. \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right] & , m > n+1 \text{ ve } m \text{ çift ise} \\ 2.n.(n-1) \left[1.(m-1) + 2.(m-2) + \dots + 2. \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \right) + 1. \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right] & , m > n+1 \text{ ve } m \text{ tek ise} \end{cases}$$

İspat

$P_m + C_n$ tensör çarpımında $\forall (u_i, v_j) \in (P_m + C_n)$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $n = 2k + 1, k > 0$ olsun.

1. Durum:

$m \leq n + 1$ için Teorem 6.1.6 dan $ec(u_i, v_j) = n$, ayrıca $n.m$ adet tepe olup, *birinci* ve m inci tepelerin dereceleri $n - 1$, diğer tepelerin dereceleri $2.(n - 1)$ olduğundan, *Bir* ve m inci satır elamanları en uzak bağlantılılık indeksler toplamı, $2.n.(n - 1).n$ Diğer satırların en uzak bağlantılılık indeksler toplamı, $(m - 2).n.2.(n - 1).n$ sonuçta tüm indeks toplamı $2.n^2.(n - 1).(m - 1)$

2. Durum:

$m > n+1$ olmak üzere eğer m tek ise ,
 bir ve m inci satırların derecesi $(n-1)$
 iki ve $m-1$ inci satırların derecesi $2.(n-1)$
 üç ve $m-2$ inci satırların derecesi $2.(n-1)$
 $\vdots$
 m inci satırın derecesi $2.(n-1)$ ve her satırda n tepe olduğundan ,

Birinci ve m inci satır elemanlarının en uzak bağlantılılık indeksleri toplamı ,

$$2.n.1.(n-1).(m-1)$$

İkinci ve $m-1$ inci satır elemanlarının en uzak bağlantılılık indeksleri toplamı ,

$$2.n.2.(n-1).(m-2)$$

$\vdots$

$\frac{m+1}{2}$ nci satır elemanlarının en uzak bağlantılılık indeksleri toplamı,

$$n.2.(n-1).\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

olduğundan bu değerlerin hepsini toplarsak

$$2.n.(n-1) \left[1.(m-1) + 2.(m-2) + \dots + 2.\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right) + 1.\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right] \text{ olur.}$$

Benzer düşünce ile m nin çift olma durumu incelendiğinde tek farkın, $\frac{m}{2}$ ve

$\frac{m}{2} + 1$ inci satırların ikisinin de en uzak bağlantılılık indekslerinin m nin tek olma

durumun $\frac{m+1}{2}$ inci satırına eşit olmasıdır. Bu sebeple m çift ise toplam indeks

$$2.n.(n-1) \left[1.(m-1) + 2.(m-2) + \dots + 2.\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right) + 2.\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right] \text{ olur.}$$

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Grafların tensör çarpımı, mühendislikte ağlarda bağlantılılık ile ilgili bir çok uygulamaya sahiptir. Graf teorisinde tensör çarpımının baskınlık, bağlantılılık ve moleküler graf teorisinde uygulamaları mevcuttur. Moleküler graf teorisinde tensör çarpımı literatürde son zamanlarda çoklukla yer almaya başlamıştır. Graflarda uzaklık ve derece kavramları ile ilişkili indeksler içerisinde en popüler olanlardan birisi de en uzak bağlantılılık indeksidir. Bu indeksin graflarda tensör çarpımındaki değeri ile ilgili çalışmalara literatürde rastlanmamıştır. Bu çalışmada, en uzak bağlantılılık indeksi ve graflarda tensör çarpımının temel özellikleri verildikten sonra ilk kez $K_m + K_n$, $P_m + K_n$, $C_m + K_n$, $P_m + C_n$, $C_m + C_n$, $P_m + H_n$, $K_m + H_n$ graflarının tensör çarpımında öncelikle en uzaklık bağıntıları sonrasında en uzak bağlantılılık indeksi araştırılarak formülize edilmiştir. Bazı graflarda en uzak bağlantılılık hesabı için düzenli bağıntı bulunamadığından, sadece en uzaklık ile ilgili teoremlere yer verilmiştir. En uzaklığı bulunduğu halde en uzak bağlantılılık indeksi formülize edilemeyen bazı graf sınıflarının en uzak bağlantılılık indeksinin bulunması ileriki çalışmalar için bir açık problem olarak durmaktadır.

KAYNAKLAR

- Balakrishnan, K., Ranganathan, K., 2012. *A Text Book of Graph Theory*. Springer, New York. 296.
- Botterau, A., Metivier, Y., 1998. Some Remarks on the Kronecker Product of Graphs. *Information Processing Letters*, **68** :55-61.
- Buckley, F., Harary, F., 1990. *Distance in Graphs*. Addison- Wesley, Redwood City, California.1990.
- Chartrand, G., Zhang, P., 2005. *Introduction to Graph Theory*. McGraw-Hill, USA. 386.
- Das, K.C., Trinajstić, N., 2011. Relationship between the eccentric connectivity index and Zagreb indices. *Computational Mathematical Applications*, **62** :1758-1764.
- Deng, H., Chen, S., Zhang, J., 2007. The PI Index of Phenylenes. *Journal of Mathematical Chemistry*, **41** :63-69.
- Ghorbani, M., Ashrafi, A.R., Hemmasi, M., 2009. Eccentric Connectivity polynomials of fullerenes. *Optoelectronics Advanced Materials Rapid Communications*, **3** :1306-1308.
- Gutman, I., Yan, W., Yang, B.Y., Yeh. Y.N., 2007. Generalized Wiener indices of Zig Zagging Pentachains. *Journal of Mathematical Chemistry*, **42** (2):103-1171.
- Gutman, I., Trinajstić, N., 1972. Graph Theory and Molecular Orbitals. Total π -electron Energy of Alternant Hydrocarbons. *Chemical Physical Letters*, **17**:535-538.
- Gupta, S., Singh, M., Madan, A.K., 2002. Application of Graph Theory: Relationship of Eccentric Connectivity index and Wiener's index Anti-inflammatory Activity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **266** :259-268.
- Harju, T., 2007. *Lectures Notes On Graph Theory*. University of Turku , Finland. 99.
- Hoji, M., Luo, Z., Vumar, E., 2010. Wiener and vertex PI indices of Kronecker products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **158** :1848-1855.
- Hosoya, H., 1971. Topological index, a newly proposed quantity characterizing the topological nature of structure isomers of saturated hydrocarbons. *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, **44** :2332-2339.
- Hua, H., Das, K.C., 2013. The relationship between the eccentric connectivity index and Zagreb Indices. *Discrete Applied Mathematics*, doi:10.1016/j.2013.05.034.

- Ilic, A., Gutman, I., 2011. Eccentric Connectivity Index of Chemical Trees. *MATCH Communucations in Mathematical and in Computer Chemistry*, **65** (3):731-744.
- Khodashenas, M., Arani, M.J.N., 2012. Distance-Based Topological Indices of Tensor Product of Graphs. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, **3** (1) :45-53.
- Klein, D.J., Lukovits, I., Gutman. I.,1995. On the Definition of the hyper-Wiener index for Cycle-Containing Structures. *Journal Chemstry of Information Computer Scienty*, **35** :50-52.
- Meng, K.H., Fengming, D., Guan, T.E., 2007. *Introduction to Graph Theory*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. , Singapore. 228.
- Morgan, M.J., Mukwembi, S., Swart, H.C., 2011. On the Eccentric Connectivity Index of Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **311** :1229-1234.
- Pattabiraman, K., Paulraja, P., 2012. On Some Topological Indices of the Tensor Products of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **160** :267-279.
- Randic, M., 1975. On the characterization of molecular branching. *Journal of American Chemical Society*, **97** :6609-6615.
- Sharma, V., Goswami, R., Madan, A.K., 1997. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, **37** :273-282.
- Su, G., Xiong, L.,Gutman, I., 2013. Harary Index of the k-TH Power of a Graph. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **7** :94-105.
- Vukicevic, D., Furtula, B., 2009.A New Geometric-Arithmetic Index. *Journal of Mathematical Chemistry*, **47** :477-486.
- Weichsell, P.M., 1962 The Kronecker Product of Graphs. *Proceedings of American Mathematical Society*, **8** :47-52.
- Wiener,H., 1947. Structural Determination of the Paraffin Boiling Points.*American Chemical Society*, **69** :17-20.
- Yarahmadi, Z., 2011. Computing Some Topological Indices of Tensor Product of Graphs. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, **2** (1):109-118.
- Zhou, B., Du, Z., 2010. On Eccentric Connectivity Index. *MATCH Communucations in Mathematical and in Computer Chemistry*, **63** :181-198.

ÖZ GEÇMİŞ

Mesut SEMİZ, 1978 yılında Sivas'ın Gürün ilçesinde dünyaya geldi. Lise öğrenimini 1994 yılında Gürün Endüstri Meslek Lisesi Metal işleri bölümünde tamamlayarak, 1995 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve Temmuz 1999 da mezun oldu. Kasım 1999 da Van' ın Bahçesaray ilçesinde Öğretmenlik görevine başladı. Şubat 2000 de aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen Antalya Kemer Göynük Ünal Aysal Anadolu Öğretmen Lisesi'nde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmakta olan yazar evli ve iki çocuk babasıdır.