

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

KRİSTAL FİZİĞİNDE O_h NOKTA GRUBU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Ayşe DELİBAŞ
DANIŞMAN: Doç. Dr. Harun AKKUŞ

VAN-2014

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

KRİSTAL FİZİĞİNDE O_h NOKTA GRUBU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe DELİBAŞ

VAN-2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fizik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Harun AKKUŞ danışmanlığında, Ayşe DELİBAŞ tarafından sunulan “ Kristal Fiziğinde O_h Nokta Grubu” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 17 / 02 / 2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Prof. Dr. Bahşeli GULİYEV

İmza:

Üye:
Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV

İmza:

Üye:
Doç. Dr. Harun AKKUŞ

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun / / tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza
Prof. Dr. Turgut AYGÜN
Enstitü Müdürü

ÖZET

KRİSTAL FİZİĞİNDE O_h NOKTA GRUBU

DELİBAŞ, Ayşe
Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Harun AKKUŞ
Şubat 2014, 120 sayfa

Bu çalışmada, kristal fiziğindeki O_h nokta grubu incelenmiştir. Kristal sistemlerin bir geometrik biçime indirgenmesi ve simetri işlemleri sonucunda bu geometrik biçimin, sistematik olarak matematik ifadelerle açıklanabilmesi, grup teorisinin fizik için önemini gösterir.

Bu çalışma tamamen teorik bir çalışmadır. Bu nedenle tamamen teorik yöntemler kullanılarak, O_h nokta grubunun, simetri elemanları, grup özellikleri, sınıfları, kosetleri, matrisleri ve abelian alt grupları bulunmuştur.

Anahtar kelimeler: Grup Teorisi, Simetri, Nokta Grupları, O_h Nokta Grubu

ABSTRACT

THE POINT GROUP O_h in CRYSTAL PHYSICS

DELİBAŞ, Ayşe

Msc Thesis, Physics Science

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Harun AKKUŞ

February 2014, 120 pages

In this study, the point group O_h in the crystal physics has been investigated. The reduce of crystal systems to a geometrical configuration and as a result of symmetry operations, the ability to explain this geometrical configuration systematically with the terms of mathematics, show the importance of "Group Theory" in Physics.

This study is purely theoretical. For that reason, the symmetry elements, group properties, classes, cosets, matrices and abelian subgroups of the " O_h Point Group" were found by using theoretical methods.

Key words: Group Theory, Symmetry, Point Groups, Point Group O_h

ÖN SÖZ

Bu çalışmada grup teorisinin fizikteki uygulaması ve O_h Nokta Grubu üzerine teorik çalışmalar yapılmıştır. Çalışma 120 sayfa olup 10 bölümden oluşmaktadır. İlk sekiz bölümde Çalışmanın temelini oluşturacak temel tanımlar ve yöntemler verilmiştir. 9. Bölümde kübik nokta grup O_h 'nın simetri elemanları bulunarak O_h nokta grubuna ait bir çarpım tablosu oluşturulmuştur. Bu çarpım tablosu yardımıyla O_h nokta grubu hakkında detaylı bilgilere ulaşılmıştır. Bu çalışmanın ayrıca bu konuda çalışma yapacak olan araştırmacılara yardımcı olabileceği inancındayım.

Bu çalışmanın bu günkü halini almasını sağlayan, bilgisini ve desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, değerli danışmanım ve kıymetli hocam Sn. Doç. Dr. Harun AKKUŞ'a teşekkür ederim.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan kıymetli Annem ve Babama ve tez çalışması boyunca bana tahammül eden sevgili kardeşlerim Melike, M. Uğur, Merve ve Veysel' e de teşekkür ederim.

Ayşe DELİBAŞ

2014/VAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xvii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. TEMEL TANIMLAR	5
3.1. Kristal Sistemler	5
3.2. Amorf Yapılar	5
3.3. Birim Hücre	5
3.4. Kafes Parametreleri	6
3.5. Baz ve Örgü	6
3.6. Koordinasyon Sayısı	6
4. KRİSTALOGRAFİK EKSENLER ve KRİSTAL SİSTEMLERİ	7
5. BRAVAİS KAFESİ	9
5.1. Kübik Kristal Yapı	9
5.1.1. Basit Kübik Yapı	9
5.1.2. Hacim Merkezli Kübik Yapı	10
5.1.3. Yüzey Merkezli Kübik Yapı	11
6. SİMETRİ, SİMETRİ İŞLEMLERİ VE SİMETRİ ELEMANLARI	13
6.1. Birim Eleman ve Özdeşlik İşlemi	14
6.2. Dönme Simetri Eksen ve Döndürme İşlemi	15
6.3. Simetri Merkezi ve İnversiyon İşlemi	15
6.4. Simetri Düzlemi ve Yansıma İşlemi	16

6.5. Dönme – Yansıma Simetri Eksenini ve Dönme – Yansıma Simetri işlemi	17
7. GRUP TEORİSİ	19
7.1. İşlem	19
7.2. Matematik Sistem	19
7.3. Grup	19
7.3.1. Kapalılık aksiyomu	20
7.3.2. Birleşme aksiyomu	20
7.3.3. Birim (Etkisiz) eleman aksiyomu	21
7.3.4. Ters eleman aksiyomu	21
7.4. Sonlu Gruplar, Sonsuz Gruplar ve Grubun mertebesi	21
7.5. Yarı Grup	22
7.6. Abelian Grup	22
7.7. Permütasyon Grubu	22
7.8. Simetrik Grup	22
7.9. Alt Grup	22
7.9.1. Trivial alt gruplar	23
7.9.2. Normal alt grup	23
7.10. Grup Elemanlarının Periyodu ve Abelian Alt Gruplar	23
7.11. Basit Grup	24
7.12. Kosetler	24
7.13. Grupta Eşlenik kavramı ve Grubun Sınıfları	24
7.14. Grupta Yeniden Dizilim Teoremi	24
7.15. Lagrange'nin Grup Teorisi	24
7.16. Homomorfizma	25
7.17. İzomorfizma	25
7.18. Monomorfizma ve Epimorfizma	25
7.19. Otomorfizma	25
7.20. Cayley Teoremi	26

8. NOKTA GRUPLAR	27
8.1. Nokta Grupların Sınıflandırılması	27
8.1.1. C grupları	28
8.1.2. D grupları	28
8.1.3. Özel gruplar	28
8.2 Nokta Grupların Tespiti	30
9. O_h NOKTA GRUBUNUN $P(8)$ PERMÜTASYON GRUBU İLE İNCELENMESİ	33
9.1. Küpte Simetri İşlemleri ve Simetri Elemanları	33
9.1.1. Özdeşlik simetri elemanı	33
9.1.2. Küp için üç katlı dönme ekseninden(C_3) simetri işlemleri	34
9.1.3. Küp için iki katlı dönme ekseninden(C_2) simetri işlemleri	40
9.1.4. Küp için dört katlı dönme ekseninden(C_4) simetri işlemleri	42
9.1.5. Küp için iki katlı (C_2^1) dönme ekseninden simetri işlemleri	46
9.1.6. Küp için inversiyon simetri işlemleri	50
9.1.7. Küp için inversiyon – dönme simetri işlemleri	51
9.1.8. Küp için dikey simetri düzleminden yansıma simetri işlemleri	58
9.1.9. Küp için dönme-yansıma simetri işlemleri	60
9.1.10. Küp için çapraz simetri düzleminden yansıma simetri işlemleri	66
9.2. O_h Nokta Grubunun Simetri Elemanlarının Matris Temsilleri	78
9.2.1. Matris	78
9.2.2. Kare matris	79
9.2.3. Birim matris	79
9.2.4. Matris çarpımı	80
9.2.5. O_h nokta grubunun simetri elemanlarının matris temsilleri	80
9.3. Permütasyon İşlemleri ve O_h Nokta Grubunun Çarpım Tablosu	87
9.4. O_h Nokta Grubunun Sınıfları	98
9.5. O_h Nokta Grubunun Mertebesi ve O_h Nokta Grubunun Alt Grupları	101
9.6. O_h Nokta Grubunun Kosetleri	107

10. TARTIŞMA VE SONUÇ	117
KAYNAKÇA	118
ÖZGEÇMİŞ	120

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1. Kristalografik eksenler	7
Şekil 2. Basit kübik yapı	10
Şekil 3. Hacim Merkezli Kübik Yapı	10
Şekil 4. Yüzey Merkezli Kübik Yapı	11
Şekil 5. İnversiyon işlemi (M: inversiyon merkezi)	16
Şekil 6. Özdeşlik Elemanının Etkisi Gösterilmiştir.	33
Şekil 7. <i>a</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	34
Şekil 8. <i>b</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	35
Şekil 9. <i>c</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	36
Şekil 10. <i>d</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	37
Şekil 11. <i>f</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	37
Şekil 12. <i>g</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	38
Şekil 13. <i>h</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	39
Şekil 14. <i>i</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	39
Şekil 15. <i>j</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	40
Şekil 16. <i>k</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	41
Şekil 17. <i>l</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	41
Şekil 18. <i>m</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	42
Şekil 19. <i>n</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	43
Şekil 20. <i>o</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	43
Şekil 21. <i>p</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	44
Şekil 22. <i>r</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	45
Şekil 23. <i>s</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	45
Şekil 24. <i>t</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	46
Şekil 25. <i>u</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	47
Şekil 26. <i>v</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	47
Şekil 27. <i>w</i> Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	48

Şekil 28. y Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	49
Şekil 29. z Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	49
Şekil 30. Küp İçin İnversiyon İşlemi	50
Şekil 31. İnversiyon İşleminin Etkisi Gösterilmiştir	51
Şekil 32. a^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	52
Şekil 33. b^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	53
Şekil 34. c^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	53
Şekil 35. d^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	54
Şekil 36. f^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	55
Şekil 37. g^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	56
Şekil 38. h^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	57
Şekil 39. i^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	57
Şekil 40. j^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	58
Şekil 41. k^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	59
Şekil 42. l^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	59
Şekil 43. $\sigma_h(3)$ Düzlemine Dik Simetri Ekseninden “ Dönme- Yansıma” işlemi	60
Şekil 44. m^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	61
Şekil 45. n^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	62
Şekil 46. $\sigma_h(1)$ Düzlemine Dik Simetri Ekseninden “ Dönme- Yansıma” işlemi	62
Şekil 47. o^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	63
Şekil 48. p^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	64
Şekil 49. $\sigma_h(2)$ Düzlemine Dik Simetri Ekseninden “ Dönme- Yansıma” işlemi	64
Şekil 50. r^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	65
Şekil 51. s^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	66
Şekil 52. t^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	66
Şekil 53. u^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	67
Şekil 54. v^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	68
Şekil 55. w^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	68

Şekil 56. y^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	69
Şekil 57. z^* Simetri Elemanının Etkisi Gösterilmiştir	69
Şekil 58. K���n K���e Koordinatlarının G��sterimi	81

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 1. Kristal Sistemleri	8
Çizelge 2. Kristal Sistemleri ve Bravais Kafesleri	12
Çizelge 3. Simetri elemanları ve Temsil Edildikleri Schöenflies sembolleri	14
Çizelge 4. Simetri Elemanları ve Temsil Edildikleri Herman – Mauguin Sembolleri	14
Çizelge 5. Kristal sistemlerin sahip oldukları simetri elemanları	18
Çizelge 6. Kristal sistemleri ve nokta grupları	29
Çizelge 7. O_h Nokta Grubunun Simetri Elemanları ve Matris Temsilleri	71
Çizelge 8. O_h Nokta Grubunun Çarpım Tablosu	94
Çizelge 9. O_h Nokta Grubunun Sınıfları	100
Çizelge 10. O_h Nokta Grubunun Simetri Elemanlarının Mertebeleri	105
Çizelge 11. O_h Nokta Grubunun Abelian Alt Grupları	105
Çizelge 12. O_h Nokta Grubunun Kosetleri	111

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

(E)	Özdeşlik Elemanı
(I)	Simetri Merkezi(İnversiyon)
(C_n)	n- Katlı Dönme Simetri Ekseni
(σ)	Simetri Düzlemi
(S_n)	Dönme – Yansıma simetri ekseni
(σ_h)	Yatay simetri düzlemi
(σ_v)	Düşey simetri düzlemi
(σ_d)	Açıortaylardan geçen (Çapraz) simetri düzlemi
$\bullet$	İkili İşlem
$\forall$	Her
$\in$	Elemanıdır.
$\neq$	Eşit Değil
$\emptyset$	Boş Küme
$P(G)$	G Grubunun Permütasyon Grubu
$\leq$	Alt Grup
$\triangleleft$	Normal Alt Grup
$\equiv$	Denktir.
$ G $	G'nin Mertebesi
$\cup$	Birleşme
$\approx$	Eştir.
$\cong$	Yaklaşık Eşittir

Kısaltmalar

A.A.G.	Abelian Alt Grup
Ark.	Arkadaşları
K.S.	Koordinasyon Sayısı
Bkz.	Bakınız.

1. GİRİŞ

Grup teorisi matematikte ve özellikle soyut cebirde grup olarak adlandırılan soyut yapıları inceler. Grup teorisi, çalışmalarında özellikle soyut cebir, geometri ve simetriden oldukça faydalanır.

Günümüzde kullanıldığı biçimiyle grup kavramı matematiğin değişik alanlarında zaman içinde ortaya çıkan ve üzerinde çalışılan fikirlerin soyutlanmasıyla geliştirilmiştir. Cayley, her grubun bir permütasyon grubuna izomorf olduğunu kanıtlamıştır[22].

Norveçli Matematikçi Sophus Lie “Cebirsel Değişmezler” kuramıyla grup teorisine yeni bir boyut kazandırdı. Lie grubu, sürekli simetrilerin bu güne kadar verilmiş en iyi teorisidir.

Bir fiziksel sistemin sahip olduğu simetrileri, sistemi temsil eden diferansiyel denklemlerle ilişkilendiren teoremler 1918 yılında Emmy Noether tarafından verilmiştir. Bu teori matematikte ve fizikte çığır açtı. Noether’in teoremlerine göre, bir fiziksel sistemin eylem fonksiyonelinin her bir simetrisi, bir korunum yasasına karşılık gelir. Bu teoremler, modern teorik fizikte ve varyasyonlar hesabında temel bir araç olmuş durumdadır. Noether Teoremi, korunum yasalarını fonksiyonelin belirli değişmezlik özellikleri ile ilişkilendirir ve korunum yasasını bulmak için bir algoritma sağlar.

Günümüzde grup teorisi ve simetrinin önemi küçümsenemez bir gerçektir. Grup teorisinin temel uğraş konusu simetridir. Simetri neredeyse bütün fizik konularına uygulanabilir bir çalışma alanıdır.

Fizikte Grup Teorisi Fiziğin gelişimi için önemli bir yer tutar. Örneğin özel rölativite teorisinde önemli bir yere sahip Lorentz ve Poincare gruplarını inceler ve integrallenebilir sistemlerde geniş bir uygulama alanına sahip kuantum grupları hakkında detaylı bilgi edinmemizi sağlar. Aynı şekilde grup teorisi parçacık fiziğinde de önemli bir uygulama alanına sahiptir. Grup Teorisi Katıhal Fiziğinde de kristaller hakkında daha geniş ve daha kolay bilgi edinme olanağı sağlar ve çok-cisim problemlerinin çözümlerinin yapılmasını kolaylaştırır.

Bu çalışmada da Grup Teorisi nin fizik konularına, özellikle kristal fiziğine uygulanması amaçlanmıştır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Grup teorisi grup adı verilen soyut yapıları inceleyen matematik alt dalıdır. Bu nedenledir ki Bilgiç Grup kuramını soyut cebir ders notları çalışmasında başarıyla işlemiştir (Bilgiç, 2012).

Grup teorisini anlamanın en iyi yolu grup kavramını çok iyi bilmekten geçer. Bu nedenle literatürde grup teorisi ve grup kavramı üzerine yazılmış bir çok değerli eser bulunmaktadır. Bir setin grup olabilme şartının Kapalılık, Birleşme, Ters Eleman ve Birim Eleman özelliklerini sağlamakla mümkün olduğu bilgisi Bogopolski , Arkfen ve Ark., Dresselhaus ve Ark., Lederman, Hirsich ve Milne tarafından ayrı ayrı incelenmiştir (Bogopolski, 2008), (Arkfen ve Ark., 2005), (Dresselhaus ve Ark., 2008), (Lederman, 1973), (Hirsich, 1960) ve (Milne, 2012). Ayrıca bu grupların bazı özel karakterlerle temsil edildikleri James ve Koster'in çalışmalarından anlaşılmaktadır (James ve Liebeck, 2003), (Koster, 1957).

Grup teorisi Temel bilimlerin hemen hemen bütün alanlarında uygulanabilir. Bu nedenle Cohen ve Ark. Grup kuramını Matematik, Fizik ve Kimya öğrencilerinin kullanabilecekleri şekilde sunmuşlardır (Cohen ve Ark, 2007).

Grup teorisi çalışmalarında sıklıkla simetri kavramından faydalanılır. Simetri sonsuz sayıda aynı birimden oluşmuş yapıların tek bir birimi üzerinde çalışarak bütün yapı hakkında kısa zamanda bilgi sahibi olmamızı sağlar. Bu nedenle Powell ve Lesk tarafından ayrı ayrı yapılan çalışmalar simetriyi daha iyi öğrenmemiz adına önemlidir (Powell, 2010), (Lesk,2004). Sürekli Simetrilerin bu güne kadar verilmiş en iyi teorisi Lie gruplarıdır. Altay, Lie Grupların sürekli İzometrilere üzerine çalışmalar yürütmüştür (Altay, 2008).

Fizikte Grup Teorisi ve O_h Nokta grubu adlı bu çalışma grup teorisinin fizikteki uygulamalarını yansıtmaktadır. Ayrıca Aivazis, Cornwell, Lüdeling ve Tung da Grup Teorisinin Fizikteki Uygulamaları üzerine çalışmalar yapmışlardır (Cornwell, 1997), (Lüdeling, 2010), (Tung, 1985).

Grup teorisinin fiziğin birçok alanında uygulaması bulunmaktadır. En somut örnekleri ise Katıhal Fiziğinde görülmektedir. Katıhal Fiziğinde grup teorisi uygulanırken kristal yapılar bir geometriye indirgenir. Bu açıdan kristal yapıları bilmek

önem arz etmektedir. Hofman ve Kittel'in Kristal yapılar üzerine yaptıkları çalışmalar bu alanda bilgi edinmemiz adına önemlidir (Hofman, 2008), (Kittel, 1996). Bir geometriye indirgenen katılar simetri işlemleri aracılığıyla matematiksel teorilere dökülür (Bardley ve Cracknell, 1972). Permütasyon ve matris işlemleri simetri elemanları üzerinde işlem yapmak adına çok önemlidir (Riley ve Ark., 2006).

3. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde ilerleyen bölümlerde ihtiyaç duyulan bazı tanımlara yer verilmiştir.

3.1. Kristal Sistemler

Atomlar üç boyutlu bir düzene göre dizilirler. Bu dizilime kristal yapı ya da kristal sistem denir.

3.2. Amorf Yapılar

Atomlar arasında belli bir düzen yoksa yani atomlar rastgele diziliyorsa kristal yapıdan bahis edilemez. Kristal yapıdan farklı olan yapılara da amorf yapılar denir.

Amorf yapılar, gelişigüzel bir yapı gösterirler. Genellikle sıvı halinin ani olarak soğutulmasıyla elde edilirler. Amorf yapılar belli bir sıcaklık aralığında gitgide yumuşarlar ve akıcılık kazanırlar. Erime, amorf bir yapıda belli bir sıcaklıkta olmaz. Erimenin başladığı ve bittiği sıcaklık derecesi arasında belirli bir fark vardır. Bu nedenle, amorf bir maddenin erime noktasından bahsedilemez. Amorf maddenin sıcaklığı yükseldikçe, yumuşar ve belirsiz bir sıcaklıkta sıvı hale geçer. Mesela cam ve plastikler amorfudur. Bu maddelerin erime noktası yoktur[23].

3.3. Birim Hücre

Katılar yedi farklı kristal yapı düzeninde bulunur. Bu yapıların her biri, üç boyutlu atom düzeninin indirgenebildiği en küçük simetriyi tarif eder. Üç boyutlu atom düzeninin indirgenebildiği en küçük simetriyi tarif eden yapılara birim hücre denir. Başka bir deyişle birim hücre; üç boyutlu düzende sürekli olarak tekrar eden yapıdır. Birim hücre kristal yapının içerisinde tekrar eden yapıların en basitidir.

3.4. Kafes Parametreleri

Birim hücrelerinin kenar uzunluklarına da kafes parametreleri denir. Kafes parametreleri, birim hücrenin boyutunu ve şeklini tarif eder. Özdeş hücreler istiflenerek kafesin tamamını oluştururlar.

3.5. Baz ve Örgü

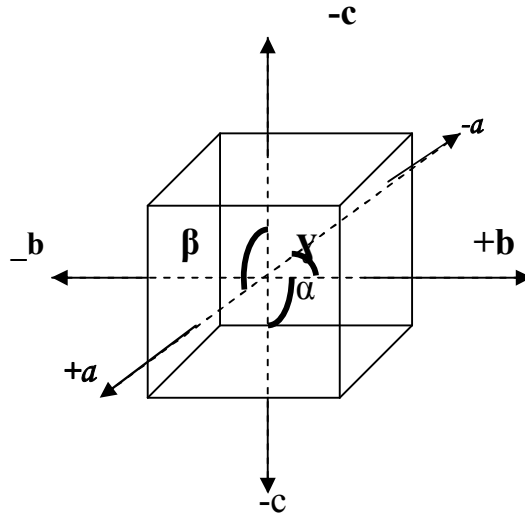
Birim hücre kavramını daha iyi anlamak için “örgü” ve “baz” kavramlarının da bilinmesi fayda sağlar. Uzayı eşit aralıklı bölümlere ayıran noktalara Örgü denir. Örgü noktaları ile ilişkili atom grubuna Baz denir. Bu tanımlar ışığında birim hücrenin tanımı; “tüm örgünün karakteristiklerini gösteren örgünün en küçük birimi” şeklinde yeniden yapılabilir.

3.6. Koordinasyon Sayısı

Kristal yapılar incelenirken birim hücrede bulunan atom sayısı ve koordinasyon sayısı kavramlarının da bilinmesi çalışmalar adına önemlidir. Birim hücrede bulunan tam atom sayısına Birim Hücrede bulunan Atom Sayısı denir. (Atom sayısı / Hücre) ile ifade edilir. Her bir atoma temas eden komşu atom sayısına Koordinasyon Sayısı denir.

4. KRİSTALOGRAFİK EKSENLER VE KRİSTAL SİSTEMLERİ

Kristal içindeki bir noktada kesiştikleri var sayılan Şekil.1’ de gösterilen üç doğrunun her birine **Kristalografik Eksenler** denir. Kristalin cinsine göre, eksenler birbirine eşit olabileceği gibi, farklıda olabilirler. Üç eksen de bir birine eşit ise “ a, a, a ” (veya a_1, a_2, a_3) olarak simgelenir. Eksenler bir birinden farklı ise “ a, b, c ” olarak simgelenirler.



Şekil 1: Kristalografik eksenler

Şekil 1. Kristalografik eksenler.

Kristalografik eksenler den “ a ” eksenine ön eksen, “ b ” eksenine yan eksen, “ c ” eksenine de dik eksen ismi verilir. “ b ” ve “ c ” eksenleri arasındaki açı “ α ” (alfa), “ a ” ve “ c ” eksenleri arasında ki açı “ β ” (beta), “ a ” ve “ b ” eksenleri arasında ki açı da “ γ ” (gama) ile temsil edilir. Bu açılar ve kristalografik eksenler topluluğuna da **Eksenler Birliği** veya **Kristal Sistemleri** denir. Kristal sistemleri Çizelge.1 de verilmiştir.

Çizelge 1. Kristal Sistemleri

<u>Kristal Sistemleri</u>	<u>Eksenler ve Açıların ilişkileri</u>
Triklinik	$a \neq b \neq c; \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$
Monoklinik	$a \neq b \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$
Ortorombik	$a \neq b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Tetragonal	$a = b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Rhombohedral	$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$
Heksagonal	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
Kübik	$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

5. BRAVAİS KAFESİ

Doğadaki bütün kristal malzemeler 7 kristal sistemden birine uyar. Bu kristal sistemlerden bazıları kendi içlerinde de ufak varyasyonlar gösterir. Bu varyasyonlara, bu yapıları ilk tarif eden Fransız fizikçi Auguste Bravais'in anısına **Bravais Kafesi** yapısı denir.

Kristal katılarda atomların birbirlerine göre konumları tekrarlı bir düzen içerir. Atom merkezlerinin koordinatları uzayda işaretlendiğinde tekrarlayan nokta kümelerinden oluşan bir kafes yapısı elde edilir. Bu yapı kristal kafesi olarak adlandırılır. Nokta kafeslerin tekrarlanabilir olması, onları tanımlayabilecek olan birim hücre - ya da birim kafes - olarak adlandırılan basit geometrilere indirgenmelerine olanak sağlar.

Auguste Bravais, doğadaki 7 kristal sistemine ait toplam 14 farklı tipte nokta kafesi (Bravais kafesi) bulunduğunu ortaya koymuştur. Kristal yapılar ve Bravais kafesleri aşağıdaki çizelge 2 de verilmiştir. Çizelge 2 den de anlaşılacağı üzere bazı kristal sistemler birden fazla Bravais kafesi içerir. Örneğin kübik kristal yapı için üç farklı Bravais Kafesi vardır. Çalışmamızın temelini kübik yapı oluşturduğu için kübik kristal sistemi ve üç farklı Bravais kafesi ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

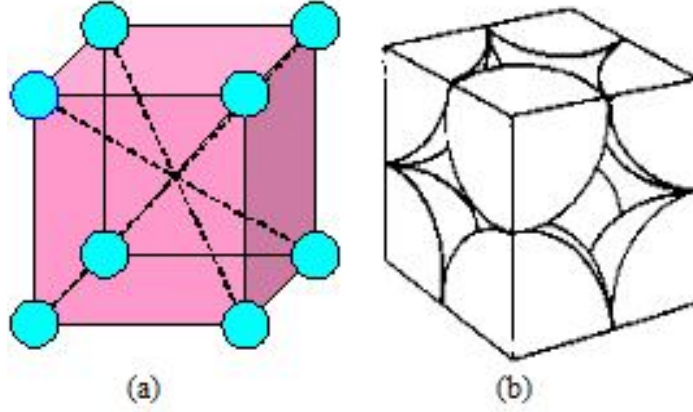
5.1. Kübik Kristal Yapı

Kübik kristal yapı, bir biriyle 90^0 açı yapan altı kare yüzeyden meydana gelir. Her yüzey bir kristolografik eksen keser. Diğer iki eksene ise paraleldir (Bkz. Şekil 1). Kübik kristal yapının üç tane Bravais kafesi mevcuttur.

5.1.1. Basit kübik yapı

Küpün her köşesinde birer atom bulunur (Bkz. Şekil 2 (a)). Gerçekte her köşedeki atom 8 komşu birim hücre arasında paylaşılmaktadır (Bkz. Şekil 2 (b)) . Bu

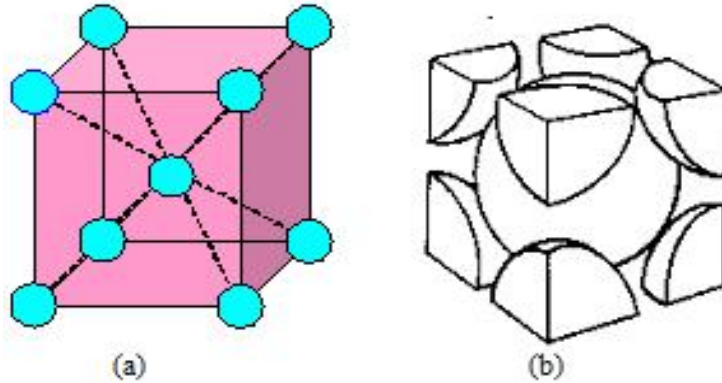
durumda köşe atomlarının toplamı $8 \times 1/8 = 1$ (8 köşede 1/8 er atom Bkz. Şekil 2(b)). Yani birim hücredeki atom sayısı 1' dir.



Şekil 2. Basit kübik yapı.

5.1.2. Hacim merkezli kübik yapı

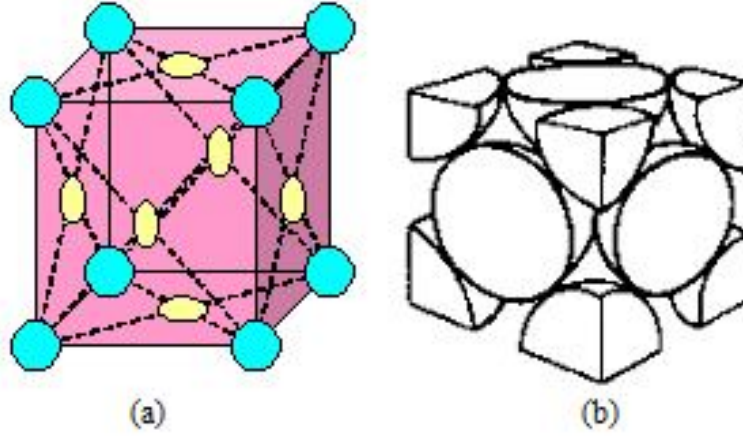
Küpün her köşesinde birer atom ve merkezinde bir atom bulunur. Köşe atomları merkez atoma temas ederler (Bkz. Şekil 3 (a)). Gerçekte her köşedeki atom 8 komşu birim hücre arasında paylaşılmaktadır. Bu durumda köşe atomlarının toplamı $8 \times 1/8 = 1$ (8 köşede 1/8 er atom) (Bkz. Şekil 3 (b)). Küpün merkezinde bulunan bir atomla birlikte birim hücredeki toplam atom sayısı 2 olur. Bu yapıda bütün atomların temas halinde bulunduğu merkez atom dikkate alınır, koordinasyon sayısının K.S. = 8 olduğu görülür. Hacim Merkezli Kübik yapının koordinasyon sayısı sekizdir.



Şekil 3. Hacim merkezli kübik yapı.

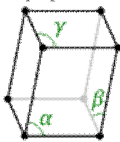
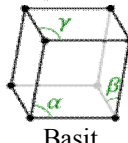
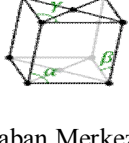
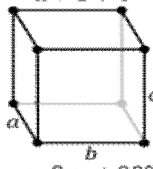
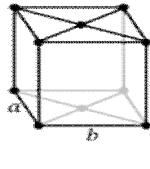
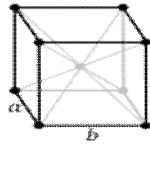
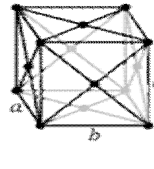
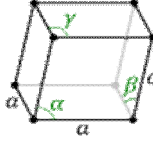
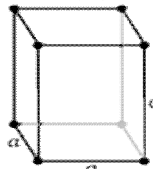
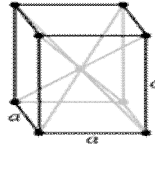
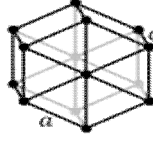
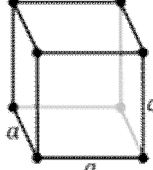
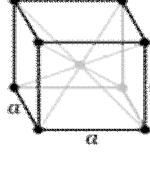
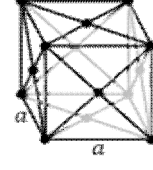
5.1.3. Yüzey merkezli kübik yapı

Yüzey merkezli kübik kafeste birim hücrenin köşelerinde birer ve yüzeylerin merkezinde de birer atom vardır (Bkz. Şekil 4 (a)). Yüzey merkezlerindeki atomların yarısı göz önüne alınan birim hücreye, diğer yarısı da komşu birim hücreye aittir. Kafesteki atom sayısı yüzeylerde $6 \times 1/2 = 3$ (6 yüzey $1/2$ şer atom) ve köşelerde $8 \times 1/8 = 1$ (8 köşede $1/8$ atom) (Bkz. Şekil 4 (b)) olmak üzere toplamda 4 atom / hücre vardır. Bu yapıda bütün atomların temas halinde bulunduğu yan yüzeylerin merkezindeki atom dikkate alınır, koordinasyon sayısının; K.S. = 12 olduğu kolayca görülür.



Şekil 4. Yüzey merkezli kübik yapı.

Çizelge 2. Kristal sistemleri ve Bravais kafesleri.

Kristal Sistemleri	BRAVAİS KAFESLERİ			
1. Triklirik	$\alpha, \beta, \gamma \neq 90^\circ$ 			
2. Monoklinik	Basit $\beta \neq 90^\circ$ $\alpha, \gamma = 90^\circ$ 	Taban merkezli $\beta \neq 90^\circ$ $\alpha, \gamma = 90^\circ$ 		
3. Ortorombik	Basit $a \neq b \neq c$ 	Taban Merkezli $a \neq b \neq c$ 	Hacim Merkezli $a \neq b \neq c$ 	Yüzey Merkezli $a \neq b \neq c$ 
4. Rombohedral	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$ 			
5. Tetragonal	Basit $a \neq c$ 	Hacim Merkezli $a \neq c$ 		
6. Hegzagonal				
7. Kübik	Basit Kübik 	Hacim Merkezli Kübik 	Yüzey Merkezli Kübik 	

6. SİMETRİ, SİMETRİ İŞLEMLERİ VE SİMETRİ ELEMANLARI

Simetri; bir denge ve orantı kavramıdır. İki şeyin birbirine benzeşmesi ve uyumu olarak da bilinir. Simetrik şekiller birbirlerine tamamen uyar ve aralarındaki benzerlik mükemmelliği, kusursuzluğu temsil eder.

Bir cisme veya bir moleküle verilen hareketten sonra eşdeğer veya özdeş konum elde ediliyorsa bu harekete **simetri işlemi** denir. İşlem sonucunda molekülün ya da cismin ağırlık merkezi değişmez, sadece aynı cins atomların yerleri değişir. Simetri işlemi, bir nokta, bir doğru ya da bir düzleme göre yapılmaktadır. Simetri işlemi bir noktaya göre yapılıyorsa, simetri noktası, simetri işlemi bir doğruya göre yapılıyorsa, simetri eksen, simetri işlemi bir düzleme göre yapılıyorsa, simetri düzlemi denir. Bu geometrik niceliklere de **Simetri Elemanları** denir. Diğer bir ifadeyle simetri elemanları, molekülleri veya kristalleri simetrilerine göre sınıflandırmamıza yardımcı olur.

Herhangi bir geometrik şekli andıran bir cisim, bir molekül ya da bir kristalin en çok beş olmak üzere, birden fazla simetri elemanı bulunmaktadır. Simetri elemanlarının farklı sembollerle gösterimleri vardır. Bunlardan biri Schöenflies sembolleridir (Bkz. Çizelge 3). Her biri farklı bir simgeyle temsil edilen simetri elemanlarını şu şekilde sıralayabiliriz:

- Birim Eleman (e)
- İnversiyon (I)
- Ana simetri eksen (C_n)
- Simetri düzlemi (σ)
- Dönme – Yansıma simetri eksen (S_n)

Çizelge 3. Simetri elemanları ve temsil edildikleri Schöenflies sembolleri.

Simetri Elemanları	Schöenflies sembolü	Simetri İşlemleri
Birim Eleman	e	360° yada 0° dönme
Simetri düzlemi	σ	Düzlemden yansıma
Simetri Merkezi(Nokta)	I	İnversiyon: $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$
Ana Simetri Eksen	C_n	Eksen etrafında dönme
Döme – Yansıma	S_n	Dönme + Dönme eksenine dik düzlemden Yansıma

Simetri elemanlarının bir diğer sembolik gösterimi ise Herman – Mauguin sembolleridir. Simetri elemanları ve temsil edildikleri Herman – Mauguin sembolleri Çizelge 4 te verilmiştir.

Çizelge 4. Simetri elemanları ve temsil edildikleri Herman – Mauguin sembolleri.

Simetri Elemanları	Simetri Elemanlarına Karşılık Gelen Herman – Mauguin Sembolü
1, 2, 3, 4 ve 6' lı dönme eksenleri	1, 2, 3, 4 ve 6
Simetri düzlemi	m
Dönem – Yansıma Eksen	$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ ve $\bar{6}$
Simetri Merkezi	$\bar{1}$

Birim elemanından başka simetri elemanı bulunmayan, cisim molekül ya da kristallere **antisimetrik** denir. Birim elemanının yanında en az bir diğer simetri elemanı da olanlara ise **simetrik** denir. Bazı simetri elemanlarına birden fazla simetri işlemi yapılabilir. Simetri Elemanlarını ve simetri işlemleri ayrıntılarıyla ele alınmıştır.

6.1. Birim Eleman ve Özdeşlik İşlemi

Hiçbir işlemi olmayan simetri elemanına birim elemanı denir. Cismin ya da molekülün konumunda herhangi bir değişiklik yaratmaz. Başka bir deyişle 360° lik dönme hareketine karşılık gelir. Simgesi (e) dir. Bir matematiksel operatör niteliğinde olan e uygulandığında molekülün geometrik duruşunda değişiklik meydana gelmediği

için simetri elemanlarının oluşturduğu grubun birim elemanıdır. Döndürme işleminde dikkat edilmesi gereken nokta dönme yönünün saatin dönme yönüne zıt (proper) olmasıdır. Bir cismin yada molekülün 360° lik dönmesi daha sonra değineceğimiz C_1 işlemine denk gelir. Buna göre diyebiliriz ki C_1 işlemi bir özdeşlik elemanıdır.

6.2. Dönme Simetri Ekseni ve Döndürme İşlemi

Saat ibresinin tersi yönde (proper), n bir tamsayı olmak üzere etrafında $2\pi / n$ radyan ya da $360^\circ/n$ derece döndürülen cismin ya da molekülün ilk görünümünü aldığı eksene dönme simetri ekseni denir. Dönme simetri ekseni C_n ile gösterilir. C_n gösterimindeki “ n ” tam sayısı, kristal sisteminde ya da molekülün ilk durumuna ulaşması için yapılan toplam 2π radyanlık çevirme içinde kaç eşdeğer basamak bulunduğunu göstermektedir.

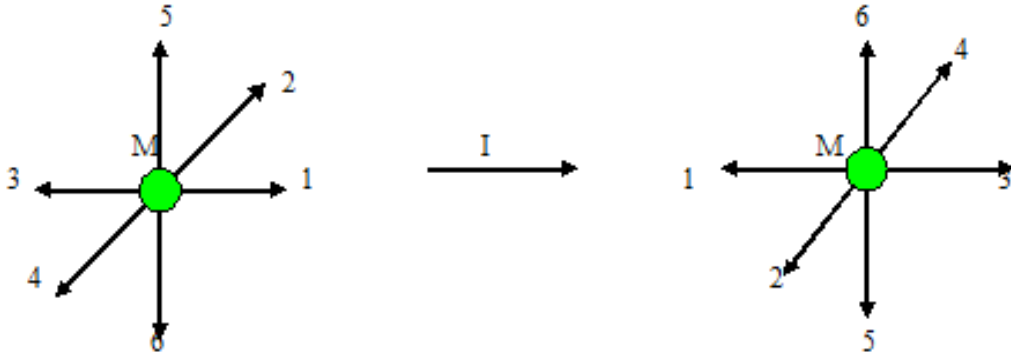
Dönme simetri eksenlerine göre yapılan işlemlerin operatörleri, k döndürme yapılan basamak sayısı olmak üzere C_n^k şeklinde gösterilmektedir. Örneğin C_2^1 ve C_2^2 sırasıyla ikili dönme simetri eksenine göre bir basamak π radyan ve iki basamak 2π radyan döndürme operatörlerini simgelemektedir. Birden fazla dönme ekseni bulunduğu, En büyük n değerine sahip eksene ana dönme ekseni denir. “ n ” nin değeri θ dönme açısı olmak üzere, $n = 360 / \theta$ şeklinde hesaplanır.

Örneğin $n = 4$ olduğunda $2\pi / 4 = \pi / 2$ olmak üzere 4 eşdeğer basamaktan oluşan bir çevirme ile ilk hale gelmektedir. Daha açık ifade edersek 90° derecelik proper dönme yapılan dönme ekseni ($360^\circ / 90^\circ = 4 = n$) $n = 4$ olduğu için C_4 ile temsil edilir.

6.3. Simetri Merkezi ve İnversiyon İşlemi

Moleküler açıdan inversiyon; bir moleküldeki özdeş atomların eşit uzaklıkta bulunduğu molekül merkezine simetri merkezi denir. Bu simetri merkezine göre yapılan tersine çevirme işlemine de inversiyon işlemi denir. Cisimler açısından inversiyon tanım olarak; bir noktayı merkez olarak alan tersine çevirme işlemidir. İnversiyon “ I ” ile temsil edilir. İnversiyon işlemi sonucunda (x, y, z) noktası $(-x, -y, -z)$ konumuna gider. Yani

$$I : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$



Şekil 5. İnversiyon işlemi. (M: inversiyon merkezi)

Düzlemsel moleküllerde: $I : (x, y) \rightarrow (-x, -y)$ dir.

Doğrusal moleküllerde: $I : (z) \rightarrow (-z)$ dir.

Son konumdaki molekül yeniden tersine çevrildiğinde ilk orijinal durumuna ulaşacağından $I^2 = e$ olur.

6.4. Simetri Düzlemi ve Yansıma İşlemi

Bir cismin ya da bir molekülün bir tarafı diğer tarafının aynadaki görüntüsü gibi ise o molekülün ya da cismin en az bir simetri düzlemi vardır. Bir simetri elemanı olan simetri düzlemine göre yapılan işleme yansıma işlemi denir. Yansıma düzlemlerine Simetri Düzlemi veya ayna düzlemi denir. Yansıma işlemi sağa sola, solu sağa, aşağıyı yukarıya veya yukarıyı aşağıya taşır. Başlangıçtaki bir nokta yansıma düzlemine dik ve eşit uzaklıkta başka bir noktaya hareket etmiş gibi olur. Simetri düzlemi veya yansıma operatörü genel olarak σ ile gösterilir.

Simetri operatörü bir cisme veya moleküle bir kez uygulandığında ilk konuma eşdeğer bir konum, iki kez uygulandığında ise ilk konuma özdeş bir konum yani ilk konumun kendisi bulunur. Buna göre, k uygulama sayısı tek olduğunda $\sigma^k = \sigma$, k uygulama sayısı çift olduğunda $\sigma^k = e$ olur.

Yansıma düzlemlerinde kullanılan alt indisler ve anlamları şöyledir:

* (σ_h) : Molekölün C_n ana dönme eksenine dik olan simetri düzlemine yatay (horizontal) simetri düzlemi denir. Yatay simetri düzlemi yalnız bir tanedir.

* (σ_v) : Molekölün C_n ana dönme eksenini içine alan ve bu eksen üzerinde kesişen simetri düzlemlerine düşey (vertical) simetri düzlemi denir. Eşdeğer olanların hepsi de σ_v şeklinde gösterildiği halde eşdeğer olmayanlar sırasıyla σ_v^1 , σ_v^{11} , σ_v^{111} ... Şeklinde gösterilmektedir. σ_v^1 , $\sigma_v^{\prime}$ ye diktir. ($\sigma_v^1 \perp \sigma_v$)

* (σ_d): Molekölün C_n ana dönme eksenini içeren ve açıortaylardan geçen simetri düzlemi, çapraz (diagonal) düzlem veya dihedral düzlem denir.

6.5. Dönme – Yansıma Simetri Eksenini ve Dönme – Yansıma Simetri İşlemi

Etrafında döndürüldükten sonra kendisine dik düzlem üzerinden yansıtıldığında cismin veya molekülün ilk konumuna eşdeğer bir konumun bulunmasına yol açan eksenlere Dönme – Yansıma simetri eksenini denir. Beşinci simetri elemanı olan dönme – yansıma simetri eksenine göre yapılan işleme dönme – yansıma işlemi, bu işlemi gösteren her S_n^k işlemcisine ise dönme – yansıma operatörü adı verilir. Kısacası dönme – yansıma simetri işlemi, peş peşe uygulanan iki simetri işleminden oluşmuştur. Önce dönme ve bu dönme eksenine dik düzlemden yansıma veya önce yansıma sonra dönme işlemi art arda uygulanır. Bu sözel ifademizi kısaca aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$S_n = C_n \cdot \sigma = \sigma \cdot C_n \quad (C_n \perp \sigma)$$

$$S_1 = C_1 \cdot \sigma = e \cdot \sigma = \sigma$$

$$S_2 = C_2 \cdot \sigma = I$$

Kristal sistemleri de simetri elemanlarına sahiptir. Bu simetri elemanlarına bakarak kristal sistemi tahmin etmek kolaylaşır. Çizelge 5’de kristal sistemleri ve sahip oldukları simetri elemanları verilmiştir.

Çizelge 5. Kristal sistemlerin sahip oldukları simetri elemanları.

Kristal Sistemleri	Sahip Oldukları Simetri Elemanları
Triklinik	Yok
Monoklinik	Bir tek ikili dönme eksenini veya simetri düzlemi
Ortorombik	İki dik düzlem veya üç karşılıklı dik ikili dönme eksenini
Tetragonal	Bir tek dörtlü dönme eksenini veya dönme – yansıma eksenini
Rombohedral	Bir tek üçlü dönme eksenini veya dönme – yansıma eksenini
Heksagonal	Bir tek altılı dönme eksenini veya dönme yansıma eksenini
Kübik	Dört üçlü dönme eksenini

7. GRUP TEORİSİ

Tanım 1: Grup teorisi, matematikte ve özellikle soyut cebirde grup adıyla anılan soyut yapıları inceleyen matematik uğraş dalıdır.

Tanım 2: Grupları inceleyen teoriye grup teorisi denir. Grup teorisi, adından anlaşıldığı üzere grup adı verilen setler üzerinde çalışır. Grup ise soyut cebirin en temel yapısını oluşturur. Bu bölümde grup teorisinin temelini oluşturan tanımlar verilmiştir.

7.1. İşlem

Bir setin (küme veya cümle) herhangi iki elemanı, bu setin elemanı olan ya da olmayan bir elemana götüren kurala ikili işlem veya kısaca işlem denir. İşlemler; $\bullet$, $\square$, $+$, $-$, $:$, x , D , m , q , ... v.b. singellerle gösterilir.

7.2. Matematik Sistem

G , boş olmayan bir set olmak üzere, “ $\bullet$ ” işlemi G setinde tanımlı olsun. $(G, \bullet)$ ikilisine matematik sistem denir.

7.3. Grup

G , boş olmayan bir set olmak üzere: “ $\bullet$ ” : $G \times G \rightarrow G$ de tanımlı $(x, y) \rightarrow (x \bullet y)$ işlemi;

- (i) $\forall x, y \in G$ için $(x \bullet y) \in G$
- (ii) $\forall x, y, z \in G$ için $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
- (iii) $\forall x \in G$ için $x \bullet e = e \bullet x = x$ olacak şekilde bir “ e ” birim elemanı vardır.

(iv) $\forall x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e$ olacak şekilde bir “y” elemanı vardır ve x’in tersidir.

şartlarını aynı anda sağlayan $(G, \cdot)$ ikilisine **Grup** denir. Bu tanımlı sözel olarak da ifade edebiliriz. Sonlu veya sonsuz elemanlardan oluşan herhangi bir G setini düşünelim. Eğer bu set grup aksiyomlarını sağlıyorsa bu sete bir grup denir. Bahis edilen grup aksiyomları aşağıda tanımlanmıştır.

7.3.1. Kapalılık aksiyomu

G boş olmayan bir set ve “ $\cdot$ ”, G de tanımlı bir işlem olmak üzere $\forall x, y \in G$ için $(x \cdot y) \in G$ ise G seti “ $\cdot$ ” işlemine göre kapalıdır denir.

Örnek: $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$ doğal sayılar setinin toplama işlemine göre kapalı olduğunu gösterelim. Doğal sayılar setinden keyfi iki eleman seçelim (Örneğin: 2 ve 4). Seçtiğimiz elemanları toplama işlemine tabi tutalım $2+4 = 6$ çıkan sonuç doğal sayılar setinin bir elemanıdır. ($6 \in N$). Sonuç olarak doğal sayılar setinin kapalı olduğunu söyleye biliriz.

7.3.2. Birleşme aksiyomu

G boş olmayan bir set ve “ $\cdot$ ”, G de tanımlı bir işlem olmak üzere $\forall x, y, z \in G$ için

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

ise G seti “ $\cdot$ ” işlemine göre birleşme aksiyomunu sağlar denir.

Örnek: $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$ doğal sayılar setinin toplama işlemine göre birleşme aksiyomunu sağladığını gösterelim. Set elemanı olan keyfi 3 eleman seçelim (2, 3, 5). Bu sayıları yukarıdaki formüle uygulayalım;

$$\left. \begin{array}{l} 2+(3+5) = 2+8 = 10 \\ (2+3)+5 = 5+5 = 10 \end{array} \right\} \text{ ise } 2+(3+5) = (2+3)+5 \text{ olur.}$$

Bu sonuca göre doğal sayılar seti çarpma işlemine göre birleşme aksiyomunu sağlar.

7.3.3. Birim (etkisiz) eleman aksiyomu

G boş olmayan bir set ve “ $\cdot$ ”, G de tanımlı bir işlem olmak üzere $\forall x \in G$ için

$$x \cdot e = e \cdot x = x$$

olacak şekilde bir e elemanı varsa e ye “ $\cdot$ ” işlemine göre G ’nin birim (etkisiz) elemanı denir.

Örnek: $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$ doğal sayılar setinin toplama işlemine göre birim elemanının olduğunu gösterelim:

Her $x \in N$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olduğu için 0 (sıfır) doğal sayılar seti üzerinde tanımlanan toplama işlemine göre etkisiz elemandır.

7.3 4. Ters eleman aksiyomu

G boş olmayan bir set ve “ $\cdot$ ”, G de tanımlı bir işlem ve bu işlemin birim elemanı e olmak üzere ve $x \in G$ için;

$$x \cdot y = y \cdot x = e$$

koşulunu sağlayan y ’ ye “ $\cdot$ ” işlemine göre x ’in tersi denir ve $x^{-1} = y$ şeklinde gösterilir. Eğer $y \in G$ ise, “ $\cdot$ ” işleminin ters eleman özelliği vardır denilir.

7.4. Sonlu Gruplar, Sonsuz Gruplar ve Grubun mertebesi

G setinin elemanlarının sayısı sonlu bir değer “ n ” ise, $(G, \cdot)$ grubuna n . mertebeden bir sonlu grup denir. Yani sonlu grupların eleman sayısına grubun mertebesi denir ve $|G|$ ile temsil edilir. Eğer G setinin elemanlarının sayısı sonsuz ise, $(G, \cdot)$ grubuna sonsuz grup (free group) denir.

7.5. Yarı Grup

G , boş olmayan bir set ve “ $\cdot$ ”: $G \times G \rightarrow G$ de tanımlı ikili işlem olmak üzere:

$$\forall a, b \in G \text{ için } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

şartı sağlanıyorsa G ’ ye **yarı grup** denir.

7.6. Abelian Grup

G boş olmayan bir set ve “ $\cdot$ ”, G de tanımlı bir işlem ve $\forall x, y \in G$ için;

$$x \cdot y = y \cdot x$$

şartı sağlanıyorsa “ $\cdot$ ” işleminin değişme özelliği vardır denilir. $(G, \cdot)$ bir grup olmak üzere G grubu “ $\cdot$ ” işlemine göre değişmeli ise, yani $\forall x, y \in G$ için; $x \cdot y = y \cdot x$ sağlanıyorsa, G ye değişmeli grup veya **Abelian Grup** denir

7.7. Permütasyon Grubu

G boş kümeden farklı ($G \neq \emptyset$) olmak üzere, G den G ’ye birebir ve örten bir dönüşüme G nin bir **permütasyonu** denir. G nin bütün permütasyonlarının seti bir grup oluşturur. Bu gruba G ’nin permütasyonlar grubu denir ve $P(G)$ ile gösterilir.

7.8. Simetrik Grup

Eğer $|G| = n$ sonlu ise $P(G) = S_n$ ile temsil edilir. S_n grubuna n . dereceden **simetrik grup** denir.

7.9. Alt Grup

$(G, \cdot)$ bir grup ve $H \neq \emptyset$ ve $H \subseteq G$ olmak üzere. $(H, \cdot)$ bir grup ise bu gruba $(G, \cdot)$ grubunun **alt grubu** denir ve $H \leq G$ ile temsil edilir. Daha açık ifade etmek gerekirse G bir grup ve H de G nin boş olmayan bir alt seti olmak üzere, eğer H seti G de tanımlanan grup işlemi ile bir grup oluyorsa H ye G nin bir alt grubu denir.

Abelian bir grubun bütün alt grupları da abeliandır. Ancak abelian olmayan bir grubun abelian olan bir alt grubu olabilir. Bir G grubunun sonlu sayıdaki alt gruplarının kesişimi de G nin bir alt grubudur.

7.9.1. Trivial alt gruplar

$(G, \cdot)$ bir grup olmak üzere, $\{e\}$ ve G setleri her zaman bir alt gruptur. Bu alt gruplara **trivial alt gruplar** denir.

7.9.2. Normal alt grup

$(G, \cdot)$ bir grup ve $H \leq G$ olmak üzere $\forall x \in G$ ve $\forall h \in H$ için

$$x \cdot H \cdot x^{-1} \subseteq H$$

önermesi doğru ise H alt grubuna G grubunun **normal alt grubu** denir ve $H \triangleleft G$ ile temsil edilir.

7.10. Grup Elemanlarının Periyodu ve Abelian Alt Gruplar

$(G, \cdot)$ bir grup, $\forall x \in G$ ve e birim eleman olmak üzere

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n = e$$

şartını sağlayan “ n ” sayısına x ’ in **mertebesi** ve “ $n-1$ ” sayısına x ’in **periyodu** denir. $\forall a, b, c \in G$ ve e birim eleman ve $n = 5$ (rastgele seçilmiş bir değer) olmak üzere

$$X^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = e$$

$$\Rightarrow x \cdot x \cdot x \cdot c = e$$

$$\Rightarrow x \cdot x \cdot b = e$$

$$\Rightarrow x \cdot a = e$$

şartını sağlayan $\{e, x^1, x^2, x^3, x^4\} = \{e, x, c, b, a, \}$ periyot setine G grubunun bir **Abelian Alt Grubu** denir

7.11. Basit Grup

$(G, \cdot)$ bir grup ve “e”, G grubunun “ $\cdot$ ” işlemine göre birim eleman olmak üzere, grubun $\{e\}$ ve kendisinden başka normal alt grubu yok ise, G grubuna **Basit Grup** denir.

7.12. Kosetler

$(G, \cdot)$ bir grup olmak üzere, $H \leq G$ (H , G nin bir alt kümesi) olsun. Bir $x \in G$ için

$H \cdot x = \{h \cdot x : h \in H\}$ Setine H nin G de **Sağ Koseti**

$x \cdot H = \{x \cdot h : h \in H\}$ setine H nin G de **Sol Koseti** denir.

7.13. Grupta Eşlenik Kavramı ve Grubun Sınıfları

$(G, \cdot)$ bir grup ve $\forall x, a, b \in G$ olmak üzere

$$x \cdot a \cdot x^{-1} = b$$

şartını sağlayan B elamanına A nın **eşleniği** denir. Verilmiş bir G grubunun elemanlarının eşleniği ile elde edilen yeni bir elemanlar setine G nin bir **sınıfı** denir.

7.14. Grupta Yeniden Dizilim Teoremi

$(G, \cdot)$ bir grup olmak üzere, $\forall x \in G$ için $x \cdot G \equiv G$ şartını sağlayan “ $x \cdot G$ ” ye G grubunun **yeniden dizilimi** denir.

7.15. Lagrange’nin Grup Teoremi

$(G, \cdot)$ sonlu bir grup ve $H \leq G$ ise H nin mertebesi G nin mertebesinin bölenidir. Yani

$$|G| = |G/H| \cdot |H| \text{ dir.}$$

7.16. Homomorfizma

$(G, \cdot)$ ve $(H, \blacksquare)$ iki grup olmak üzere, $f: G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu grup işlemini koruyorsa, yani;

$$\forall x, y \in G \text{ için } f(x \cdot y) = f(x) \blacksquare f(y)$$

ise f ye G den H ye **Homomorfizma** ya da Grup **Homomorfizması** denir.

7.17. İzomorfizma

$f: G \rightarrow H$ homomorfizması bire bir ve örten ise f' ye bir **izomorfizma** denir.

$f: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten olup her $x, y \in G$ için

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

özelliğine sahiptir. Bu nedenle G ve H gruplarının esas itibariyle aynı olduğunu ve bu gruplardan biri bilinirse diğ erinin de bilineceğini söyleyebiliriz. Bu gerçekler ışığında aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

G ve H iki grup ve $f: G \rightarrow H$ olmak üzere:

- f birebir ve örten bir fonksiyondur.
- Her $x, y \in G$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ dir.

şartlarını sağlıyorsa f' ye G ve H arasında bir izomorfizm denir. Eğer G ve H arasında bir izomorfizm var ise G ve H izomorf gruplardır veya eş yapıdırlar denir.

Matematiksel olarak $G \approx H$ şeklinde gösterilir.

7.18. Monomorfizma ve Epimorfizma

Yalnızca birebir özellik gösteren homomorfizmalara **Monomorfizma**, yalnızca örten özellik gösteren homomorfizmalara da **Epimorfizma** denir.

7.19. Otomorfizma

$f: G \rightarrow G$ izomorfizması örten ise f' ye bir **Otomorfizma** denir.

7.20. Cayley Teoremi

Her sonlu G grubu $P(G)$ permütasyonlar grubunun bir alt grubuna izomorftur.

8. NOKTA GRUPLAR

Aynı simetri elemanlarına sahip olan molekülleri sınıflandırmak ve bir grup altında toplamak mümkündür. Bir moleküldeki simetri işlemlerini gösteren operatörler çarpma işlemine göre bir matematiksel grup oluşturmaktadır. Bir grup içinde aynı elemanla eşlenik olan elemanlar kümesine sınıf adı verilmektedir. Bir molekülün tüm simetri elemanları bir noktada kesiştiği için simetri gruplarına nokta grupları da denir.

Nokta gruplar kristal yapının en az bir noktasını değişmez bırakan simetri gruplarıdır. Bir grubun nokta grubu verilirse o molekülün geometrisi belirlenebilir. Yani molekül geometrieleri nokta gruplarına bakılarak yorumlanabilir. Aynı simetri elemanlarına sahip olan moleküller veya kristal sistemleri bir grup altında toplanabilir. Bir molekülün nokta grubu biliniyorsa o molekülde yapılabilecek simetri işlemleri de bulunabilir.

Yedi adet singoni (kristal sistemi) den 14 tane Bravais kafesi oluştuğunu biliyoruz. Bravais kafeslerine öteleme hariç diğer simetri işlemleri (yansıma, döndürme, inversiyon...) uygulanırsa 32 tane nokta grup oluşturulur. Ortaya çıkan 32 nokta grubun çeşitli gösterimleri vardır. Nokta grupları, moleküller için Schönflies simgeleri ile kristaller için ise bunlara karşılık gelen Herman – Mauguin simgeleri ile gösterilir. (Bkz. Çizelge: 6)

8.1. Nokta Grupların Sınıflandırılması

Bir molekülün veya kristalin nokta grubunun bilinmesi o molekülde hangi simetri işlemlerinin yapılabileceğinin bilgisini bize sunar. Nokta grupları C grubu, D grubu ve özel grup olmak üzere üç başlıkta sınıflanır. Özel grup ise, yüksek simetrik tetrahedral (T_d), oktahedral (O_h), ikozahedral (I_h) nokta gruplarını içerir.

8.1.1. C grupları

C_1 : e, Birim Eleman

C_s : e, Simetri Düzlemi

C_i : e, Yansıma Merkezi

C_n : e, n katlı dönme eksen

C_{nv} : e, n katlı dönme eksen, n tane düşey düzlem

C_{nh} : e, n Katlı dönme eksen ve yatay düzlem

C_{∞} : e, sonsuz katlı dönme eksen, sonsuz tane düşey düzlem (Simetrik olmayan doğrusal moleküller)

8.1.2. D grupları

D_n : E, C_n eksen, ona dik n tane C_2 eksen

D_{nh} : e , C_n eksen, ona dik n tane C_2 eksen ve σ_v , σ_h düzlemleri

D_{nd} : e, C_n eksen, ona dik n tane C_2 eksen ve bunların açılı ortaylarından geçen σ_d düşey düzlemler.

$D_{\infty v}$: e, C_{∞} eksen, ona dik sonsuz tane C_2 eksen ve σ_h yatay düzlemi (doğrusal simetrik moleküller)

8.1.3. Özel gruplar

Özel gruplar, yüksek simetrik tetrahedral T_d , oktahedral O_h , ikozahedral I_h nokta gruplarını kapsar.

T_d :e, Dört tane C_3 eksen, üç tane S_4 eksen, bir kenar ve karşı kenarortayını içeren altı tane düzlem

O_h : e, üç tane C_4 eksen, dört tane C_3 eksen ve altı tane düzlem

I_h : e, O_h grubuna ait simetri elemanlarına ek olarak altı tane C_5 eksen

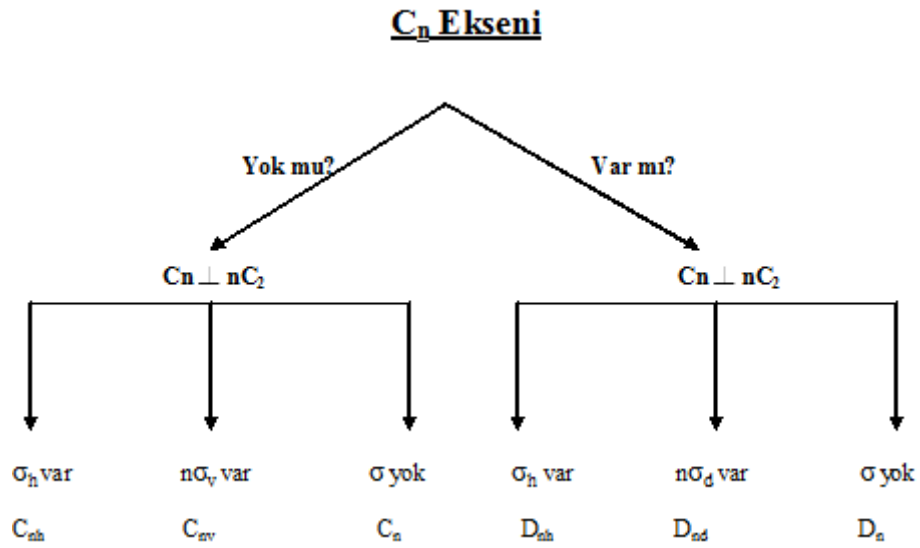
Çizelge 6. Kristal sistemleri ve nokta grupları.

Kristal Sistemleri	Kristal Sınıfların Nokta Grupları	
	Schönflies Sembolleri	Herman - Mauguin Sembolleri
Triklinik	C_i	$\bar{1}$
	C_1	1
Monoklinik	C_{2h}	2/m
	C_s	m
	C_2	2
Ortorombik	D_{2h}	2/m 2/m 2/m
	D_2	222
	C_{2v}	mm2
Tetragonal	D_{4h}	4/m 2/m 2/m
	D_4	$\bar{4} 22$
	D_{2d}	42m
	C_{4v}	4mm
	C_{4h}	4/m
	C_4	4
	S_4	$\bar{4}$
Rombohedral (Trigonal)	D_{3d}	$\bar{3} 2/m$
	D_3	32
	C_{3v}	3m
	C_{3i}	$\bar{3}$
	C_3	3
Heksagonal	D_{6h}	6/m 2/m 2/m
	D_6	$\bar{6} 22$
	D_{3h}	6m2
	C_{6v}	6mm
	C_{6h}	6/m
	C_{3h}	6
	C_6	6
Kübik	O_h	4/m $\bar{3}$ 2/m
	O	432
	T_d	$\bar{4} 3m$
	T_h	2/m $\bar{3}$
	T	23

8.2. Nokta Grupların Tespiti

Nokta grupların belirlenmesinde çeşitli akım şemaları kullanılır. Bu akım şemalarından en yaygın kullanılan iki akım şeması aşağıdaki gibidir.

Akım Şeması 1:

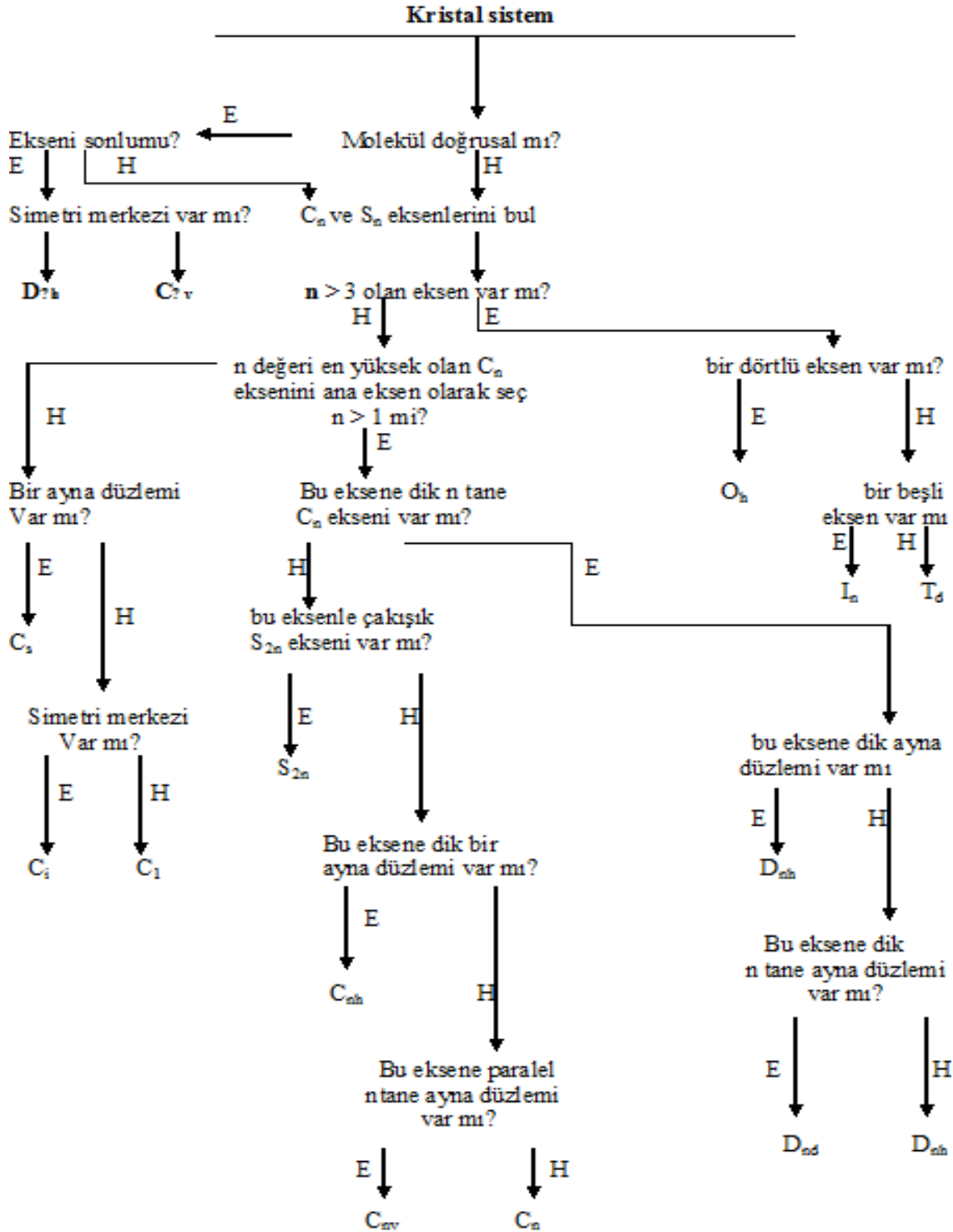


Akım Şeması 1' in Kullanımı:

- Önce Molekülün ana dönme eksenini tayin edilir.(Molekülde en çok atomu birbiri üzerine taşıyan eksen, ana dönme eksenidir.)
- Ana dönme eksenine dik n tane C₂ dönme eksenini var mı?(n tane eksenden bir tanesini tespit etmek yeterlidir.) Eğer cevap var ise molekül D_n kümesindedir, cevap yok ise molekül C_n kümesindedir.
- Ana dönme eksenine dik σ_h düzlemi var mı? Cevap var ise molekül C_{nh} ya da D_{nh} nokta grubundandır. Eğer cevabımız yok ise işleme devam edilir.
- Ana dönme eksenini içine alan σ_v ve / veya σ_d düzlemi varmı? Cevap var ise molekül veya kristal sınıfı C_{nv} ya da D_{nv} nokta grubundandır. Cevap yok ise molekül veya kristal sınıfı C_n veya D_n nokta grubundandır

NOT: En çok dönme simetri işleminin gerçekleştiği dönme eksenine **Ana Dönme Eksen** denir.

Akım Şeması 2: akım şeması 1'e göre daha hassas çalışmalarda kullanılır. Akım şeması 1'e göre daha kapsamlıdır.



Akım Şeması 2' nin kullanımı:

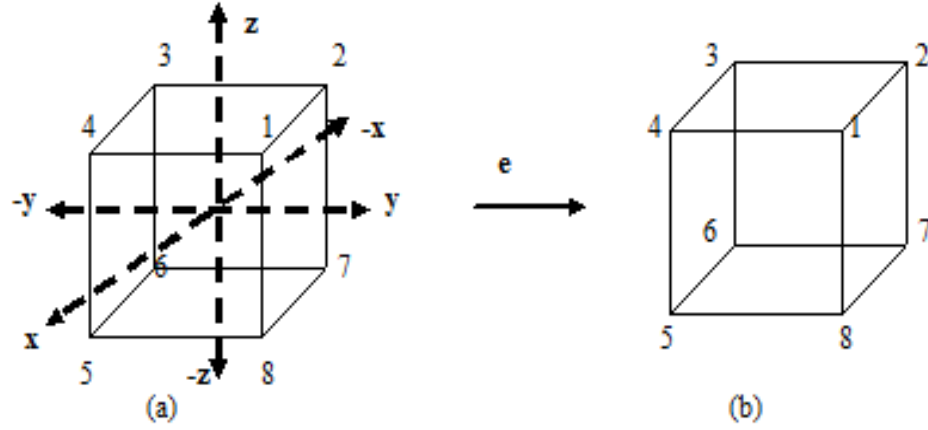
Akım şeması 2, bir dizi sorulardan oluşmuştur. Bu sorulara cevabınız evet ise (E), cevabınız Hayır ise (H) yolundan giderek bir sonraki simetri işlemi adımına geçebilir ve adım adım sonuca ulaşabilirsiniz.

9. O_h NOKTA GRUBUNUN P(8) PERMÜTASYON GRUBU İLE İNCELENME

48 elemanlı O_h nokta grubu P(8) permütasyon grubunun bir alt grubu ile izomorfiktir. Bu bilgi yardımıyla O_h nokta grubunun simetri elemanlarını aşağıda açık bir şekilde anlatılan simetri işlemleri ile bulabiliriz

9.1. Küpte Simetri İşlemleri ve Küpün Simetri Elemanları

9.1.1. Özdeşlik simetri elemanı



Şekil 6. Özdeşlik elemanının etkisi gösterilmiştir.

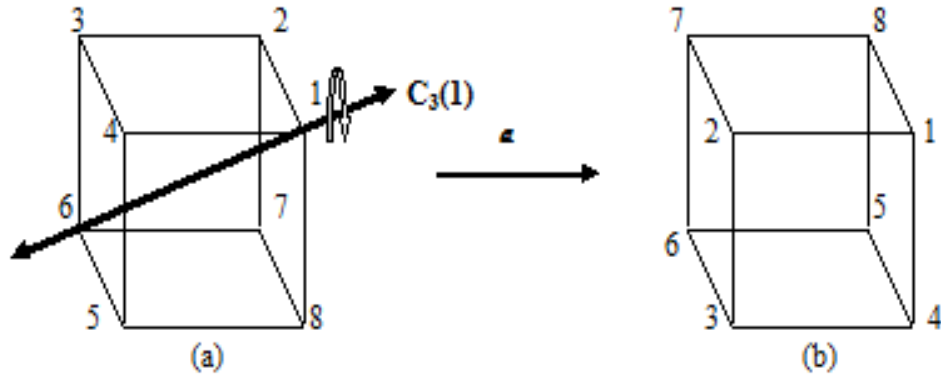
Bu simetri operatörü, küpün ana dönme eksenlerinden tutularak saatin dönme yönünün tersi yönde (proper dönme) 360 derece ya da sıfır derecelik dönme yapması anlamına gelir. Burada dikkat etmemiz gereken nokta; küpün ana dönme eksenlerinin koordinat eksenlerine (x, y, z) denk geldiğinin fark edilmesidir. Bu operatör “ e ” ile temsil edilmiştir. Bu işlem sonucunda küpün ilk durumunu koruması beklenir (Bkz. Şekil 6 (a) ve Şekil 6 (b)). Bu simetri operatörünü aşağıdaki gibi bir permütasyon gösteriminde yazabiliriz. Permütasyonun ilk satırı küpün ilk durumuna karşılık gelirken, ikinci satır küpün simetri işleminden sonraki durumunu temsil eder.

$$e = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 12345678 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki permütasyon şu şekilde yorumlana bilir. Permütasyonun ilk satırı küpün ilk durumunu temsil etmektedir. İlk satırda bulunan rakamlar küpün her bir köşesine temsili olarak bırakılmış rakamlardır. Bu rakamlar yerine istenirse farklı karakterlerde kullanılabilir. İkinci satırdaki rakamlar ise simetri işlemi sonunda küpün ilk duruma göre konumları değişen köşeleri temsil etmektedir. Bunu biraz daha açalım. “e” simetri işlemi sonunda 1 köşesinin yerine yine 1 köşesi gelmiştir. Aynı şekilde 2 köşesinin yerini 2 köşesi, 3 köşesinin yerini 3 köşesi, 4 köşesinin yerini 4 köşesi, beş köşesinin yerini beş köşesi, 6 köşesinin yerini 6 köşesi, 7 köşesinin yerini 7 köşesi ve 8 köşesinin de yerini 8 köşesi almıştır. Yani küpün hiç bir köşesi uzaydaki konumunu değiştirmemiştir. Sonuçta küp konumunu korumuştur.

9.1.2. Küp için üç katlı dönme ekseninden (C_3) simetri işlemleri

İlk işlem $C_3(1)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan simetri işlemidir: Küpün 1 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıdır. Bu simetri operasyonu “ a ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 7 (a) da ki ilk durumu “ a ” simetri işlemi sonucunda Şekil 7 (b) deki gibi olur.



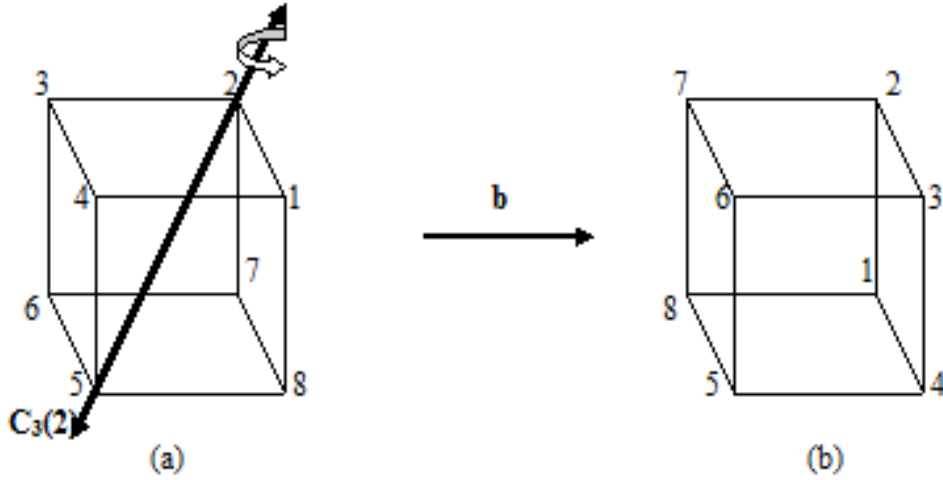
Şekil 7. a simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ a ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$a = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix}$$

“ a ” permütasyonu şu şekilde yorumlanabilir. “ a ” simetri işlemi sonunda 1 köşesi yine 1 köşesine gitmiştir. Aynı şekilde 2 köşesi yerini 4 köşesine, 3 köşesi yerini 5 köşesine, 4 köşesi 8 köşesine, 5 köşesi 7 köşesine, 6 köşesi yine 6 köşesine, 7 köşesi 3 köşesine ve 8 köşesi de 2 köşesine gitmiştir. Yani küpün 1 ve 6 köşesi hariç diğer köşelerinin uzaydaki konumu değişmiştir.

İkinci işlem $C_3(2)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 2 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ b ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 8 (a) da ki ilk durumu “ b ” simetri işlemi sonucunda Şekil 8(b) deki gibi olur

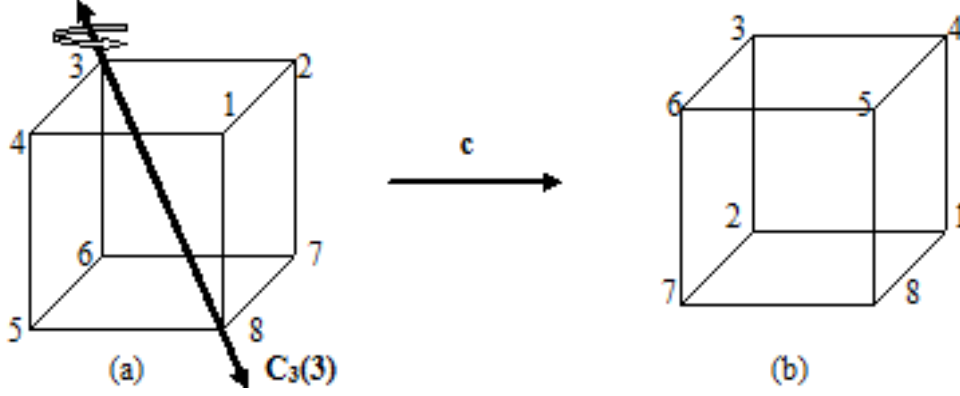


Şekil 8. b simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ b ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$b = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 72185436 \end{pmatrix}$$

Üçüncü işlem $C_3(3)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 3 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ c ” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 9 (a) da ki ilk durumu “ c ” simetri işlemi sonucunda Şekil 9 (b) deki gibi olur

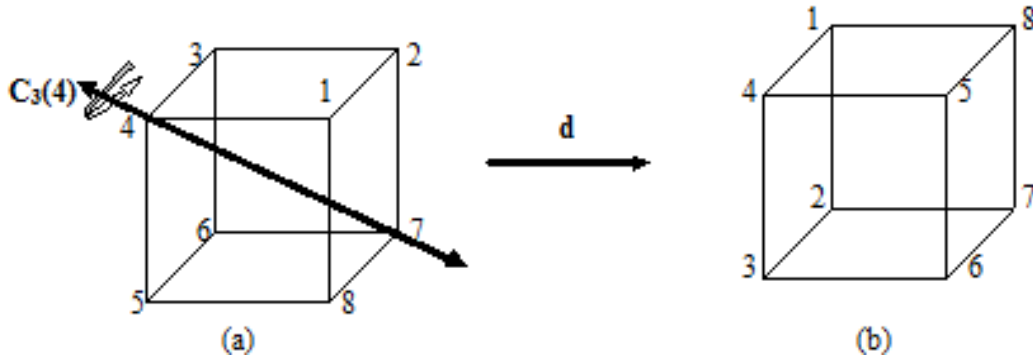


Şekil 9. c simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ c ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$c = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76321458 \end{pmatrix}$$

Dördüncü işlem $C_3(4)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 4 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ d ” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 10 (a) da ki ilk durumu “ d ” simetri işlemi sonucunda Şekil 10 (b) deki gibi olur.

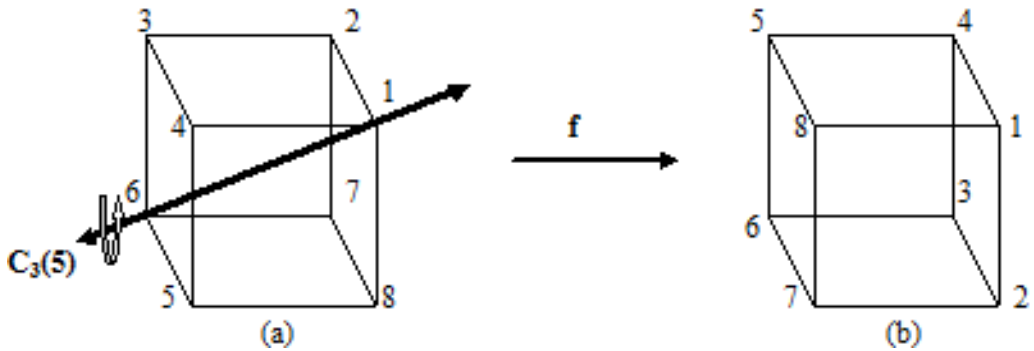


Şekil 10. d simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ d ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz.

$$d = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 36541872 \end{pmatrix}$$

Beşinci işlem $C_3(5)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 6 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ f ” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 11 (a) da ki ilk durumu “ f ” simetri işlemi sonucunda Şekil 11 (b) deki gibi olur

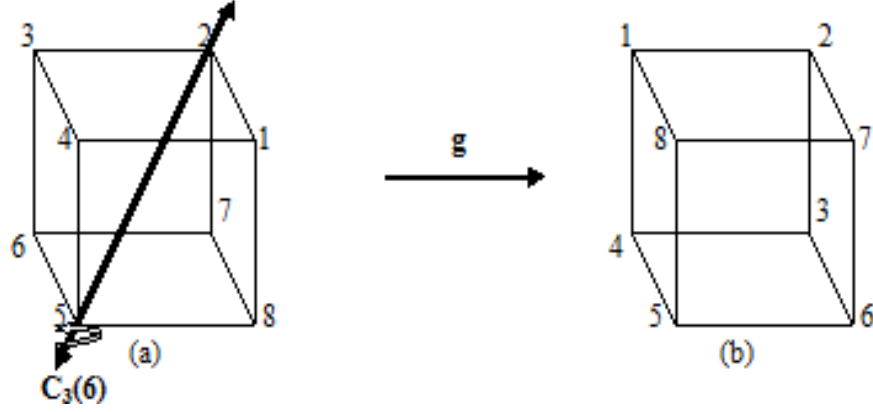


Şekil 11. f simetri elemanının etkisi gösterilmiştir..

Bu simetri işlemi sonucunda f operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$f = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 18723654 \end{pmatrix}$$

Altıncı işlem $C_3(6)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 5 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ g ” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 12 (a) da ki ilk durumu “ g ” simetri işlemi sonucunda Şekil 12 (b) deki gibi olur.

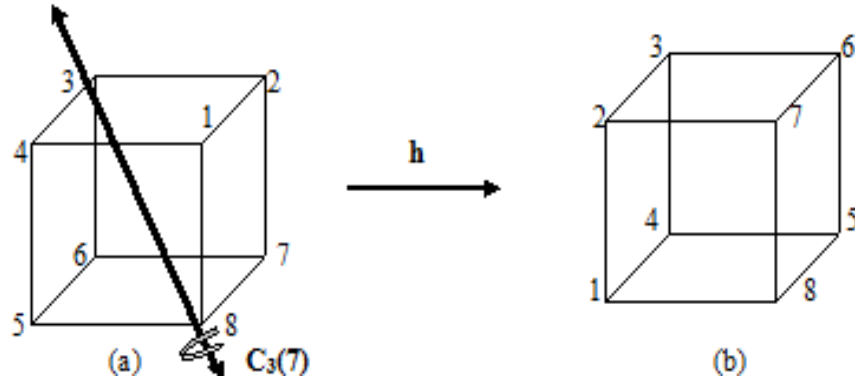


Şekil 12. g simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ g ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$g = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 32765814 \end{pmatrix}$$

Yedinci işlem $C_3(7)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 8 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ h ” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 13 (a) da ki ilk durumu “ h ” simetri işlemi sonucunda Şekil 13 (b) deki gibi olur

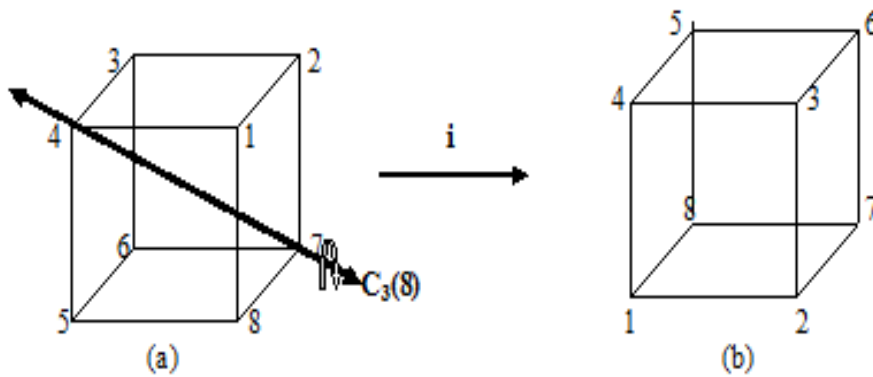


Şekil 13. h simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ h ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$h = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 54367218 \end{pmatrix}$$

Sekizinci ve son işlem, $C_3(8)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 7 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ i ” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 14 (a) da ki ilk durumu “ i ” simetri işlemi sonucunda Şekil 14 (b) deki gibi olur.



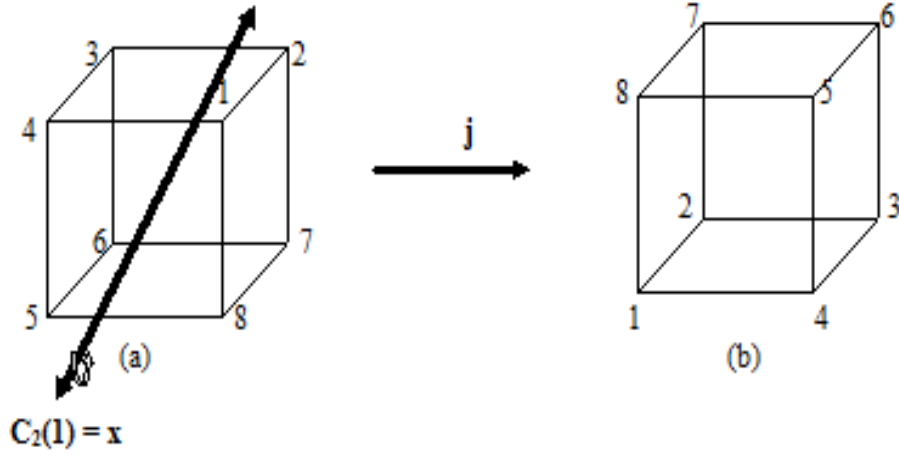
Şekil 14. i simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ i ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$i = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 58143276 \end{pmatrix}$$

9.1.3. K p için iki katlı dönme ekseninden (C₂) simetri işlemleri

 lk işlem C₂(1) simetri eksenini kullanarak yapılan simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda “ x ” eksenidir. Küpün 1, 4, 5 ve 8 k  elerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, seçilen eksen etrafında küpün saat yönünün tersi yönde (proper) 180 derecelik dönme yapması işlemidir. Bu simetri işlemi “ *j* ” ile temsil edilmiştir. Küpün  ekil 15 (a) da ki ilk durumu, “ *j* ” simetri işlemi sonucunda  ekil 15 (b) deki gibi olur.

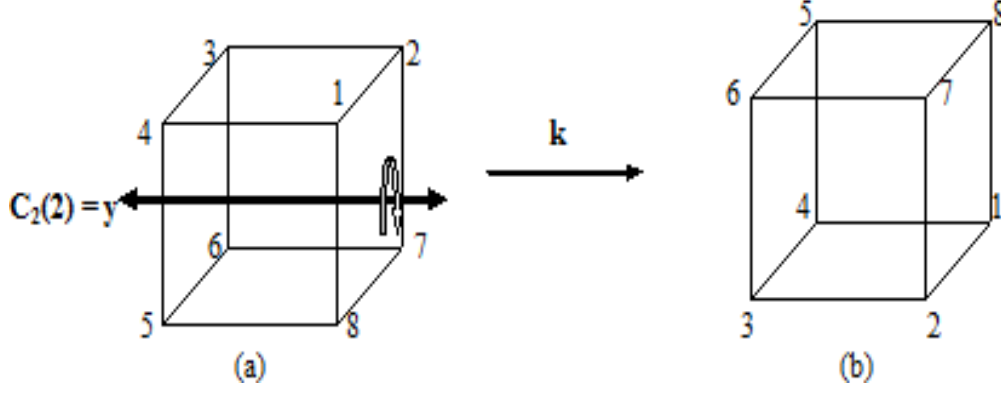


Bu simetri işlemi sonucunda “ *j* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon kar ılı ını yazabiliriz:

$$j = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 56781234 \end{pmatrix}$$

 kinci işlem C₂(2) simetri eksenini kullanarak yapılan simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda “ y ” eksenidir. Bu işlem küpün 1, 2, 7 ve 8 k  elerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, küpün seçilen eksen etrafında saat

yönünün tersi yönde (proper) 180 derecelik dönme yapmasıdır. Bu simetri işlemi “ κ ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 16 (a) da ki ilk durumu, “ κ ” simetri işlemi sonucunda Şekil 16 (b) deki gibi olur.

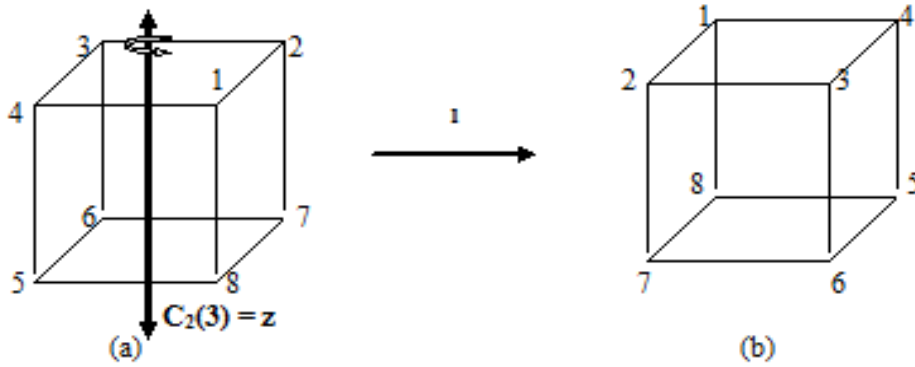


Şekil 16. κ simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ κ ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 78563412 \end{pmatrix}$$

Üçüncü işlem $C_2(3)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda “ z ” eksenidir. Bu işlem, küpün 1, 2, 3 ve 4 köşelerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, küpün saat yönünün tersi yönde (proper) 180 derecelik dönme yapmasıdır. Bu simetri işlemi “ ι ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 17 (a) da ki ilk durumu, “ ι ” simetri işlemi sonucunda Şekil 17 (b) deki gibi olur.



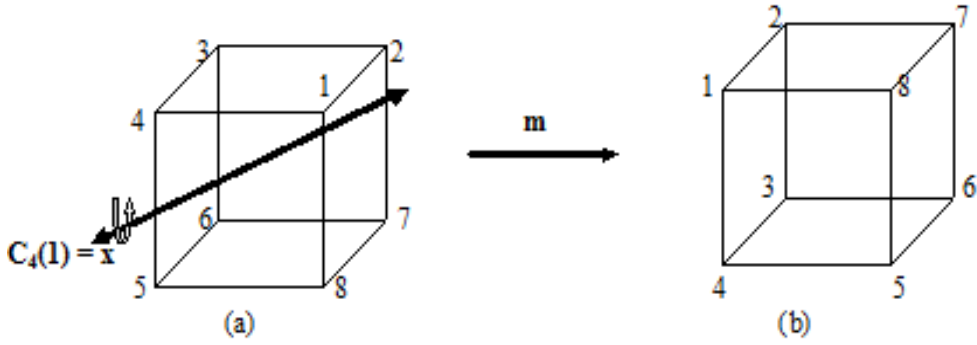
Şekil 17. ι simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ ℓ ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz.

$$\ell = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 34127856 \end{pmatrix}$$

9.1.4. Küp için dört katlı dönme ekseninden (C_4) simetri işlemleri

İlk işlem $C_4(1)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda “ x ” eksenidir. Küpün 1, 4, 5 ve 8 köşelerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, seçilen eksen etrafında küpün saat yönünün tersi yönde (proper) 90 derecelik dönme yapması işlemidir. Bu simetri işlemi “ m ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 18 (a) da ki ilk durumu, “ m ” simetri işlemi sonucunda Şekil 18 (b) deki gibi olur.



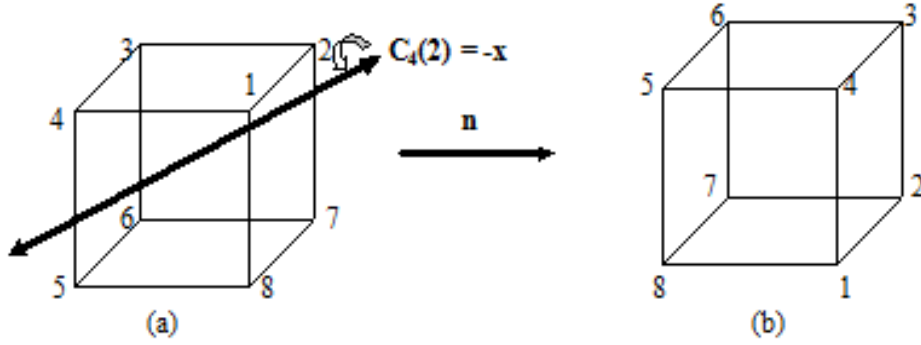
Şekil 18. m simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ m ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$m = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 43658721 \end{pmatrix}$$

İkinci işlem $C_4(2)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda “ $-x$ ” eksenidir. Küpün 2, 3, 6 ve 7 köşelerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, seçilen eksen etrafında küpün saat yönünün tersi yönde (proper) 90 derecelik dönme yapması işlemidir. Bu simetri işlemi “ n ” ile

temsil edilmiştir. Küpün Şekil 19 (a) da ki ilk durumu, “ n ” simetri işlemi sonucunda Şekil 19 (b) deki gibi olur.

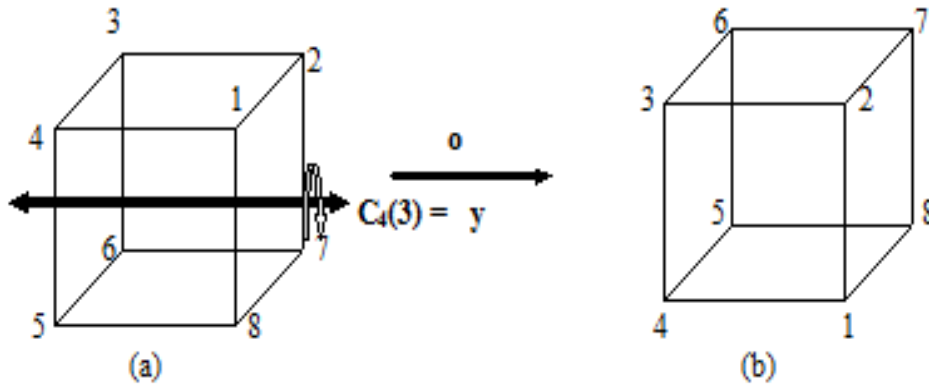


Şekil 19. n simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ n ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$n = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 87214365 \end{pmatrix}$$

Üçüncü işlem $C_4(3)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda “ y ” eksenidir. Küpün 1, 2, 7 ve 8 köşelerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, seçilen eksen etrafında küpün saat yönünün tersi yönde (proper) 90 derecelik dönme yapması işlemidir. Bu simetri işlemi “ o ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 20 (a) da ki ilk durumu, “ o ” simetri işlemi sonucunda Şekil 20 (b) deki gibi olur.

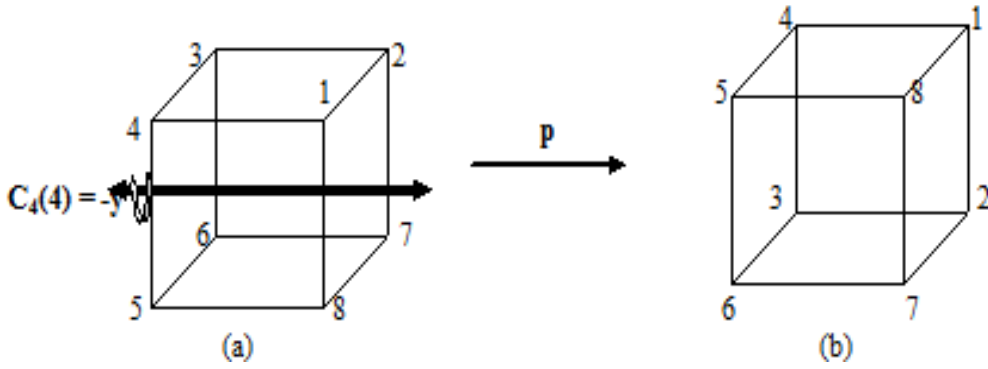


Şekil 20. o simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ o ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$o = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81456327 \end{pmatrix}$$

Dördüncü işlem $C_4(4)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda “ $-y$ ” eksenidir. Küpün 3, 4, 5 ve 6 köşelerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, seçilen eksen etrafında küpün saat yönünün tersi yönde (proper) 90 derecelik dönme yapması işlemidir. Bu simetri işlemi “ p ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 21 (a) da ki ilk durumu, “ p ” simetri işlemi sonucunda Şekil 21 (b) deki gibi olur.

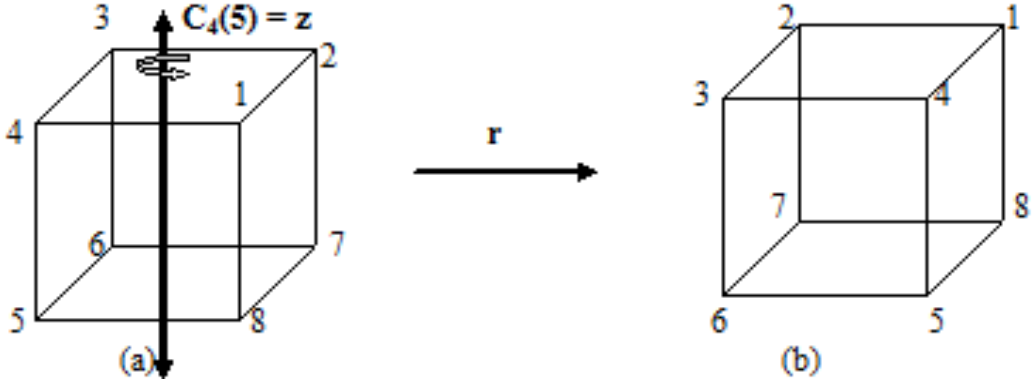


Şekil 21. p simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ p ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$p = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 27634581 \end{pmatrix}$$

Beşinci işlem $C_4(5)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda “ z ” eksenidir. Küpün 1, 2, 3 ve 4 köşelerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, seçilen eksen etrafında küpün saat yönünün tersi yönde (proper) 90 derecelik dönme yapması işlemidir. Bu simetri işlemi “ r ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 22 (a) da ki ilk durumu, “ r ” simetri işlemi sonucunda Şekil 22 (b) deki gibi olur.

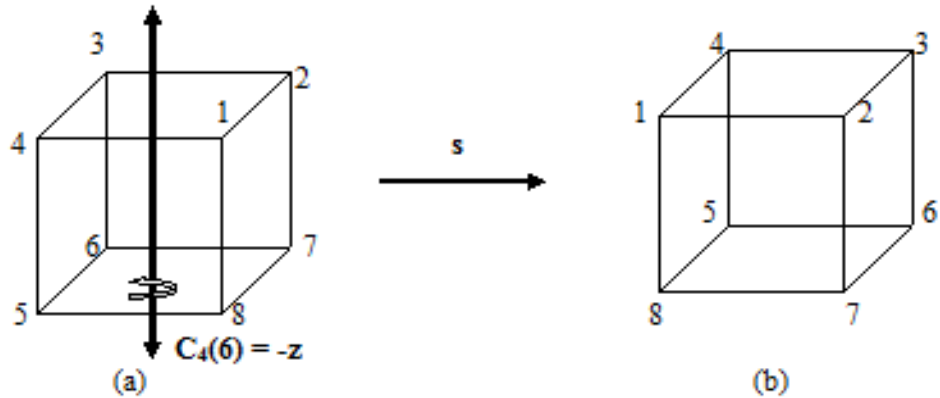


Şekil 22. r simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ r ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$r = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 23418567 \end{pmatrix}$$

Altıncı işlem $C_4(6)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda “ $-z$ ” eksenidir. Küpün 5, 6, 7 ve 8 köşelerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, seçilen eksen etrafında küpün saat yönünün tersi yönde (proper) 90 derecelik dönme yapması işlemidir. Bu simetri işlemi “ s ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 23 (a) da ki ilk durumu, “ s ” simetri işlemi sonucunda Şekil 23 (b) deki gibi olur.



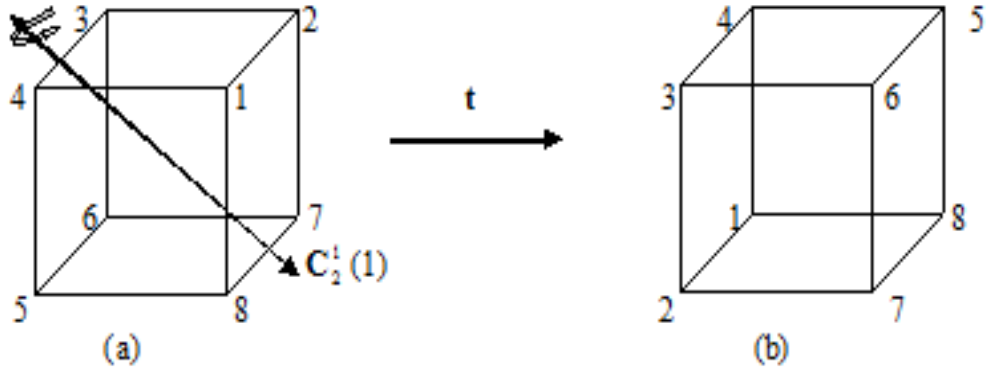
Şekil 23. s simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ s ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$s = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 41236785 \end{pmatrix}$$

9.1.5. Küp için iki katlı (C_2^1) dönme ekseninden simetri işlemleri

İlk işlem $C_2^1(1)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan 180° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda küpün 3-4 ve 7-8 kenarlarından geçen simetri dönme eksenidir. Bu ekseninde meydana gelen dönme simetri işlemi “ t ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 24 (a) da ki ilk durumu, “ t ” simetri işlemi sonucunda Şekil 24 (b) deki gibi olur.



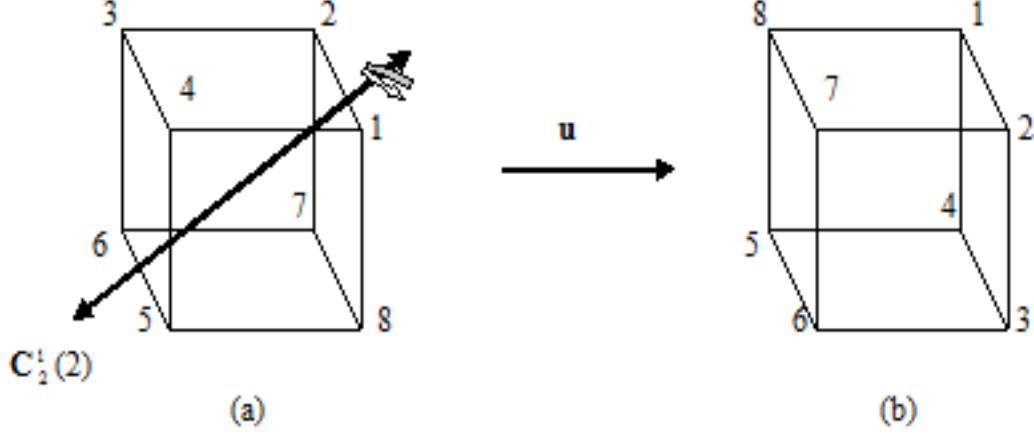
Şekil 24. t simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ t ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$t = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 65432187 \end{pmatrix}$$

İkinci işlem $C_2^1(2)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan 180° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda küpün 1-2 ve 5-6 kenarlarından geçen simetri dönme eksenidir. Bu ekseninde meydana gelen dönme

simetri işlemi “ u ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 25 (a) da ki ilk durumu, “ u ” simetri işlemi sonucunda Şekil 25 (b) deki gibi olur.

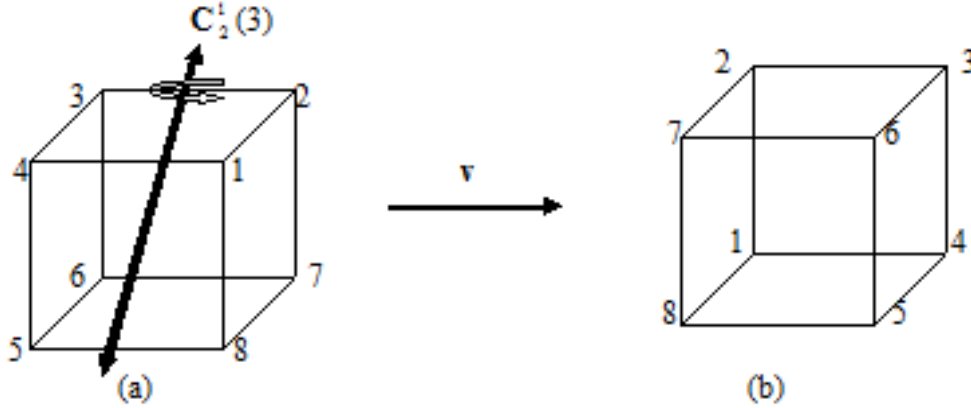


Şekil 25. u simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ u ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$u = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 21876543 \end{pmatrix}$$

Üçüncü işlem $C_2^1(3)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan 180° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda küpün 2-3 ve 5-8 kenarlarından geçen simetri dönme eksenidir. Bu ekseninde meydana gelen dönme simetri işlemi “ v ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 26 (a) da ki ilk durumu, “ v ” simetri işlemi sonucunda Şekil 26 (b) deki gibi olur.

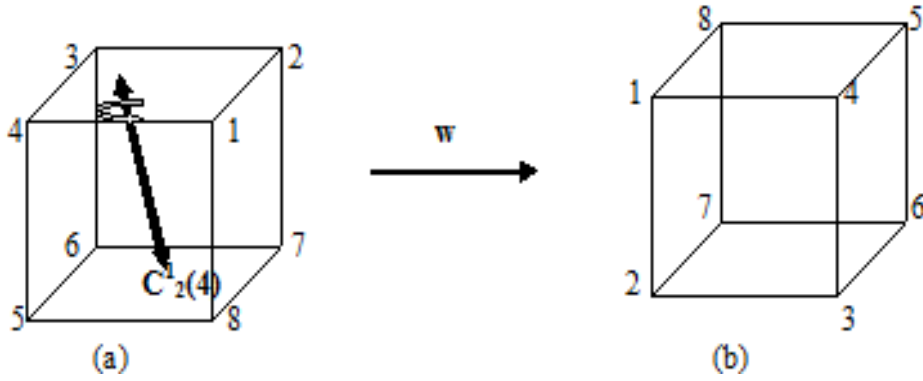


Şekil 26. v simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ v ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$v = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 63278145 \end{pmatrix}$$

Dördüncü işlem $C_2^1(4)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan 180° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda küpün 1-4 ve 6-7 kenarlarından geçen simetri dönme eksenidir. Bu ekseninde meydana gelen dönme simetri işlemi “ w ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 27 (a) da ki ilk durumu, “ w ” simetri işlemi sonucunda Şekil 27 (b) deki gibi olur.

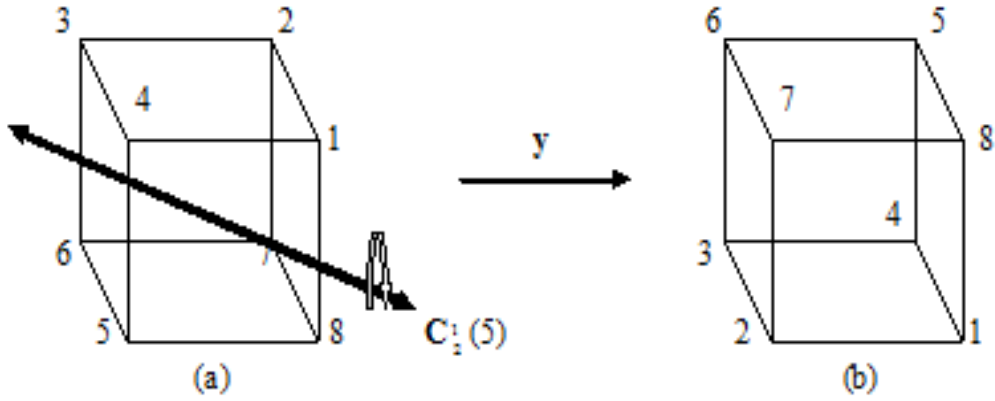


Şekil 27. w simetri elemanın etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ w ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$w = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 45812763 \end{pmatrix}$$

Beşinci işlem $C_2^1(5)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan 180° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda küpün 1-8 ve 3-6 kenarlarından geçen simetri dönme eksenidir. Bu ekseninde meydana gelen dönme simetri işlemi “ y ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 28 (a) da ki ilk durumu, “ y ” simetri işlemi sonucunda Şekil 28 (b) deki gibi olur

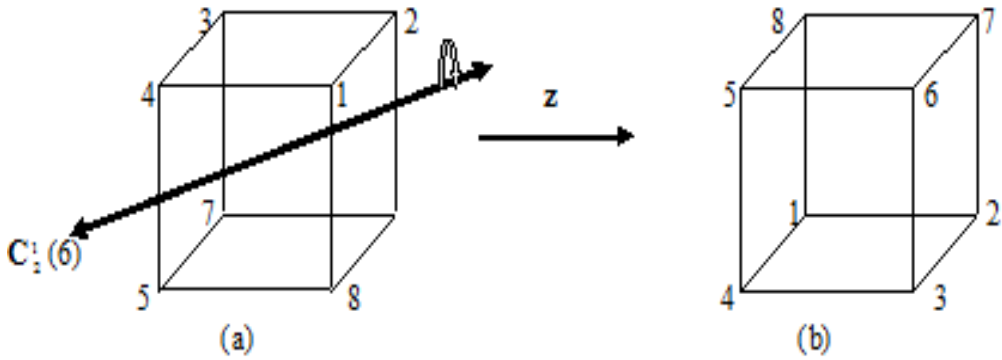


Şekil 28. y simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ y ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$y = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85672341 \end{pmatrix}$$

Altıncı işlem $C_2^1(6)$ simetri eksenini kullanılarak yapılan 180° ’lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme simetri işlemidir. Bu eksen aynı zamanda küpün 4-5 ve 2-7 kenarlarından geçen simetri dönme eksenidir. Bu ekseninde meydana gelen dönme simetri işlemi “ z ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 29 (a) da ki ilk durumu, “ z ” simetri işlemi sonucunda Şekil 29 (b) deki gibi olur.



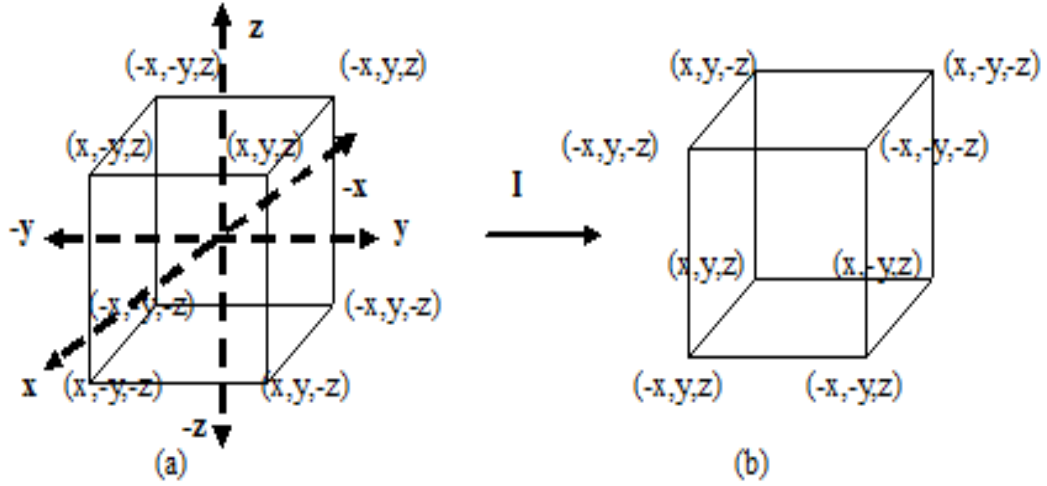
Şekil 29. z simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ z ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$z = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67854123 \end{pmatrix}$$

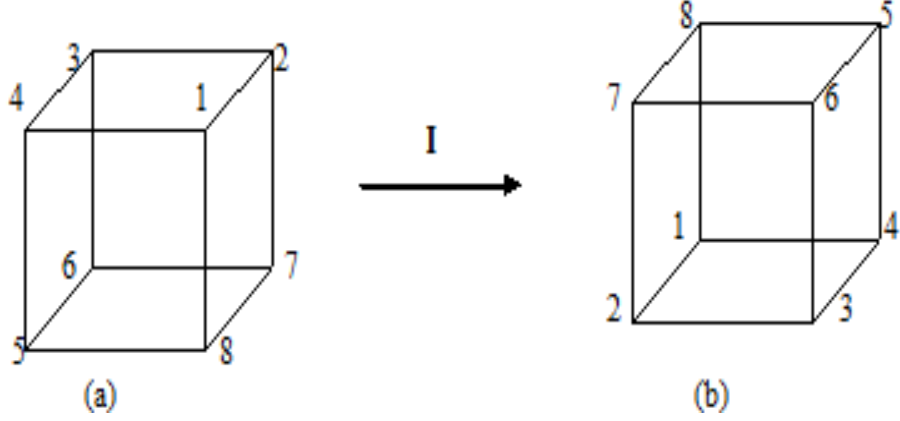
9.1.6. K p için inversiyon simetri işlemleri

2.1.3 teki bilgiler dikkate alınarak, küpün k  elerini koordinat cinsinden yazıp inversiyon işlemine tabi tutalım. Şekil: 30 (a) küpün koordinat cinsinden ilk durumunu göstermektedir. Şekil 30 (b) küpün inversiyon operatörü sonucunda koordinat cinsinden son durumunu göstermektedir.



Şekil 30. K p için inversiyon işlemi.

Şekil: 30 daki bilgiler ışığında küpün inversiyon durumunu bir keredede küpün k  e numaralı cinsinden çizebiliriz (Bkz. Şekil 31). Şekil 31 (a) küpün ilk durumunu göstermektedir. “ I ” operasyonu uygulandıktan sonra; yani inversiyon işleminin sonraki küpün durumu  ekil 31 (b) de gösterilmiştir.



Şekil 31. İnversiyon İşleminin Etkisi Gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “I” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$I = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 65872143 \end{pmatrix}$$

9.1.7. Küp için inversiyon – dönme simetri işlemleri

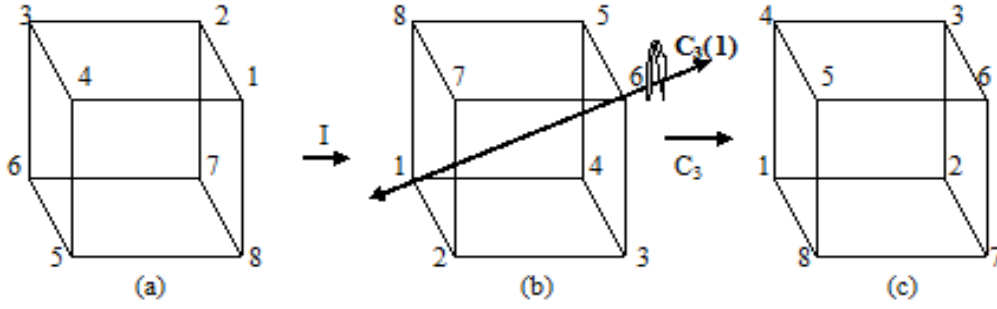
“İnversiyon - Dönme ” simetri elemanı da S_n ile temsil edilir. Bu simetri işlemin gereği; önce küpe inversiyon işlemi uygulanır. Bir sonraki adımda ise inversiyon işlemi uygulanan küp, seçilen dönme simetri eksenini etrafında proper (saat yönünün tersi yönde) döndürülür.

Küpte “ inversiyon - dönme ” simetri elemanı $S_n = S_6$ dır. S_6 matematiksel olarak

$$S_6 = I \cdot C_3$$

şeklinde yazılır. Bu matematiksel ifade; küpün inversiyon işlemi ardından seçilen simetri dönme eksenini etrafında 120 derecelik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptığını ifade eder. Bu tanım gereği şimdide küpün “ inversiyon - dönme ” simetri işlemlerini ve “ inversiyon - dönme ” simetri elemanlarını tek tek gösterebiliriz.

İlk “ inversiyon - dönme ” simetri işlemi; küpün inversiyonunun ardından, küpün 6 köşesinden tutularak, küpün 1 – 6 köşelerinden geçen $C_3(1)$ dönme simetri eksenini etrafında küpün 120^0 lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla gerçekleştirilmiştir. (Bkz. Şekil 32) Bu simetri işlemini gerçekleştiren simetri elemanı “ a^* ” ile temsil edilmiştir.

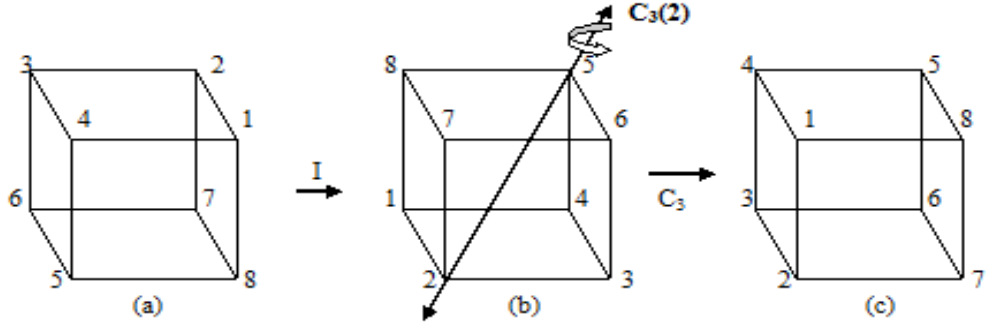


Şekil 32. a^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Görüldüğü üzere Şekil 32 (a) daki küp inversiyon işlemi uygulandıktan sonra Şekil 32 (b) deki duruma gelir. Bu son durumda küpe C_3 işleminin uygulanması yani dönme eksenini etrafında 120^0 lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla küp Şekil 32 (c) deki son durumuna ulaşır. Bu işlemlerin tamamını a^* ile temsil edip aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz.

$$a^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67234185 \end{pmatrix}$$

İkinci “ inversiyon - dönme ” simetri işlemi; küpün inversiyonunun ardından, küpün 5 köşesinden tutularak, küpün 2 – 5 köşelerinden geçen $C_3(2)$ dönme simetri eksenini etrafında küpün 120^0 lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla gerçekleştirilmiştir (Bkz. Şekil 33). Bu simetri işlemini gerçekleştiren simetri elemanı “ b^* ” ile temsil edilmiştir.

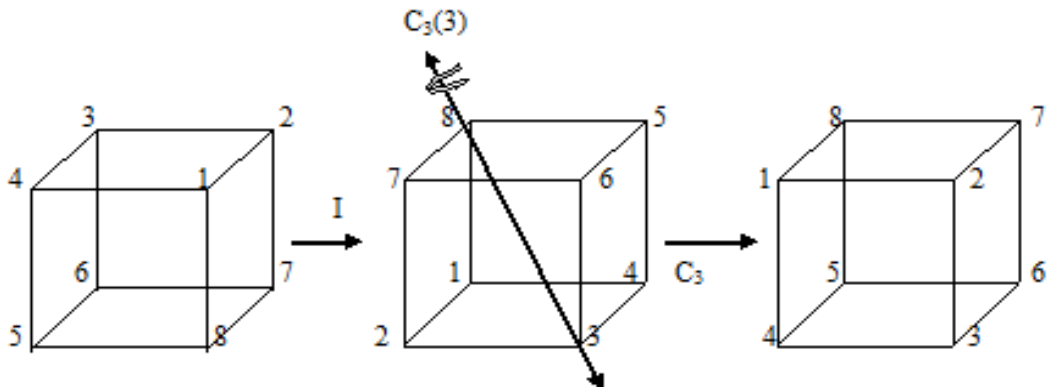


Şekil 33. 6^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Görüldüğü üzere Şekil 33 (a) da ki küp inversiyon işlemi uygulandıktan sonra Şekil 33 (b) deki duruma gelir. Bu son durumda küpe C_3 işleminin uygulanması yani dönme eksenini etrafında 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla küp Şekil 33 (c) deki son durumuna ulaşır. Bu işlemlerin tamamını 6^* ile temsil edip aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$6^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 45632781 \end{pmatrix}$$

Üçüncü “ inversiyon - dönme ” simetri işlemi; küpün inversiyonunun ardından, küpün 8 köşesinden tutularak, küpün 3 – 8 köşelerinden geçen $C_3(3)$ dönme simetri eksenini etrafında küpün 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla gerçekleştirilmiştir (Bkz. Şekil 34). Bu simetri işlemini gerçekleştiren simetri elemanı “ c^* ” ile temsil edilmiştir.

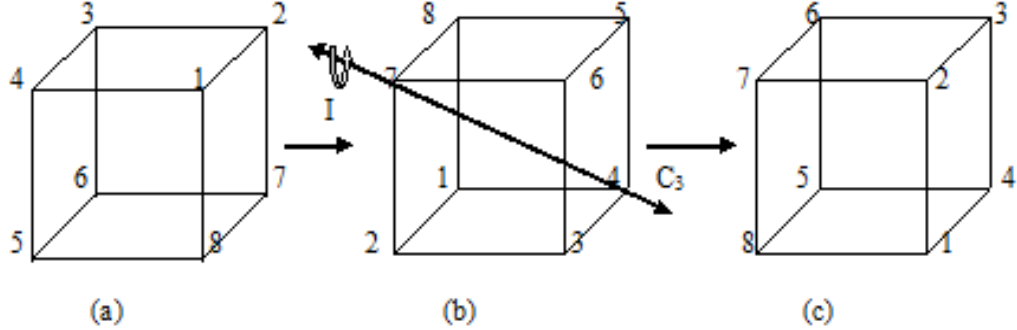


Şekil 34. c^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Görüldüğü üzere Şekil 34 (a) da ki küp inversiyon işlemi uygulandıktan sonra Şekil 34 (b) deki duruma gelir. Bu son durumda küpe C_3 işleminin uygulanması yani dönme eksenini etrafında 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla küp Şekil 34 (c) deki son durumuna ulaşır. Bu işlemlerin tamamını c^* ile temsil edip aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$c^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 41856723 \end{pmatrix}$$

Dördüncü “ inversiyon - dönme ” simetri işlemi; küpün inversiyonunun ardından, küpün 7 köşesinden tutularak, küpün 4 – 7 köşelerinden geçen $C_3(4)$ dönme simetri eksenini etrafında küpün 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla gerçekleştirilmiştir (Bkz. Şekil 35). Bu simetri işlemini gerçekleştiren simetri elemanı “ d^* ” ile temsil edilmiştir.

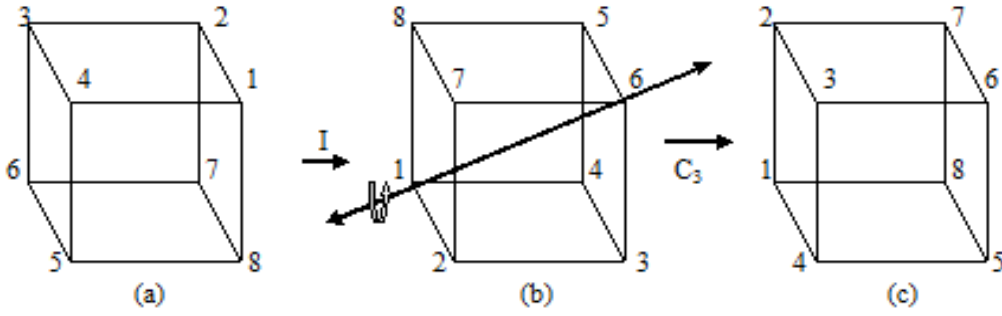


Şekil 35. d^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Görüldüğü üzere Şekil 35 (a) daki küp inversiyon işlemi uygulandıktan sonra Şekil 35 (b) deki duruma gelir. Bu son durumda küpe C_3 işleminin uygulanması yani dönme eksenini etrafında 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla küp Şekil 35 (c) deki son durumuna ulaşır. Bu işlemlerin tamamını d^* ile temsil edip aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$d^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81276345 \end{pmatrix}$$

Beşinci “ inversiyon - dönme ” simetri işlemi; küpün inversiyonunun ardından, küpün 1 köşesinden tutularak, küpün 1 – 6 köşelerinden geçen $C_3(5)$ dönme simetri eksenini etrafında küpün 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla gerçekleştirilmiştir (Bkz. Şekil 36). Bu simetri işlemini gerçekleştiren simetri elemanı “ f^* ” ile temsil edilmiştir.

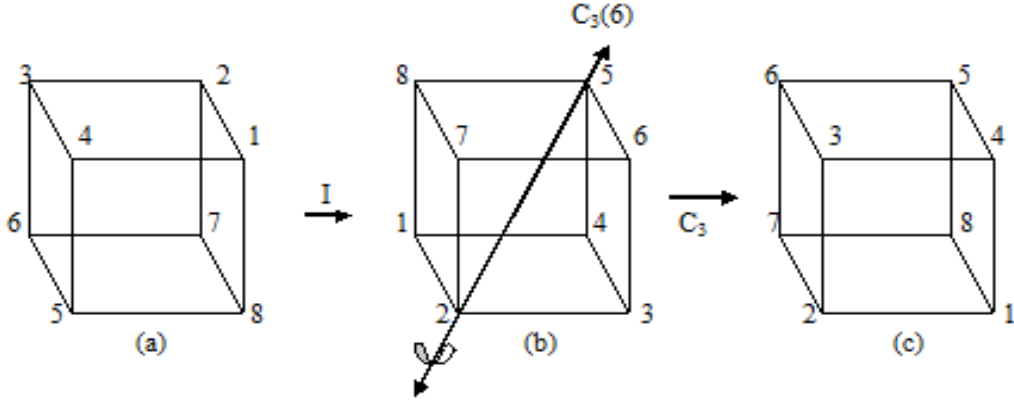


Şekil 36. f^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Görüldüğü üzere Şekil 36 (a) daki küp inversiyon işlemi uygulandıktan sonra Şekil 36 (b) deki duruma gelir. Bu son durumda küpe C_3 işleminin uygulanması yani dönme eksenini etrafında 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla küp Şekil 36 (c) deki son durumuna ulaşır. Bu işlemlerin tamamını f^* ile temsil edip aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz.

$$f^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 63458127 \end{pmatrix}$$

Altıncı “ inversiyon - dönme ” simetri işlemi; küpün inversiyonunun ardından, küpün 2 köşesinden tutularak, küpün 2-5 köşelerinden geçen $C_3(6)$ dönme simetri eksenini etrafında küpün 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla gerçekleştirilmiştir (Bkz. Şekil 37). Bu simetri işlemini gerçekleştiren simetri elemanı “ g^* ” ile temsil edilmiştir.



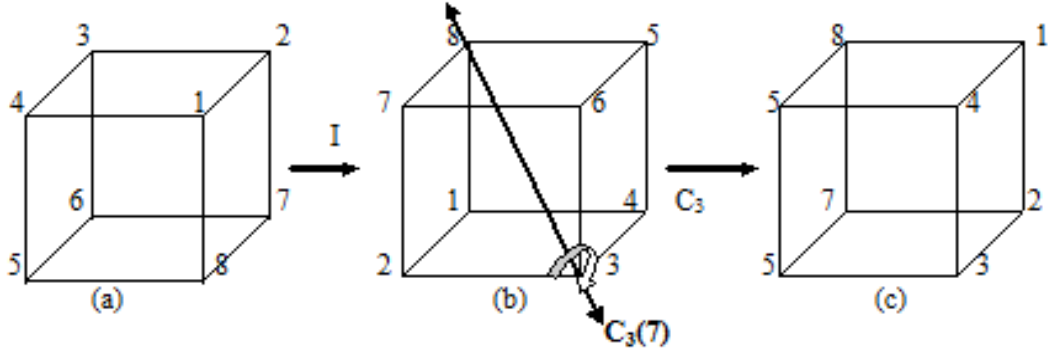
Şekil 37. g^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Görüldüğü üzere Şekil 37 (a) daki küp inversiyon işlemi uygulandıktan sonra Şekil 37 (b) deki duruma gelir. Bu son durumda küpe C_3 işleminin uygulanması yani dönme eksenini etrafında 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla küp Şekil 37 (c) deki son durumuna ulaşır. Bu işlemlerin tamamını g^* ile temsil edip aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$g^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85412367 \end{pmatrix}$$

Bu işlemin bir diğer yöntemi de $C_3(6)$ dönme ekseninden 120° derecelik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme simetri işleminin yapılması (yani “ g ” simetri işlemi) ardında inversiyon işleminin gerçekleştirilmesidir.

Yedinci “ inversiyon - dönme ” simetri işlemi; küpün inversiyonunun ardından, küpün 3 köşesinden tutularak, küpün 3-8 köşelerinden geçen $C_3(7)$ dönme simetri eksenini etrafında küpün 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla gerçekleştirilmiştir (Bkz. Şekil: 38). Bu simetri işlemini gerçekleştiren simetri elemanı “ h^* ” ile temsil edilmiştir.

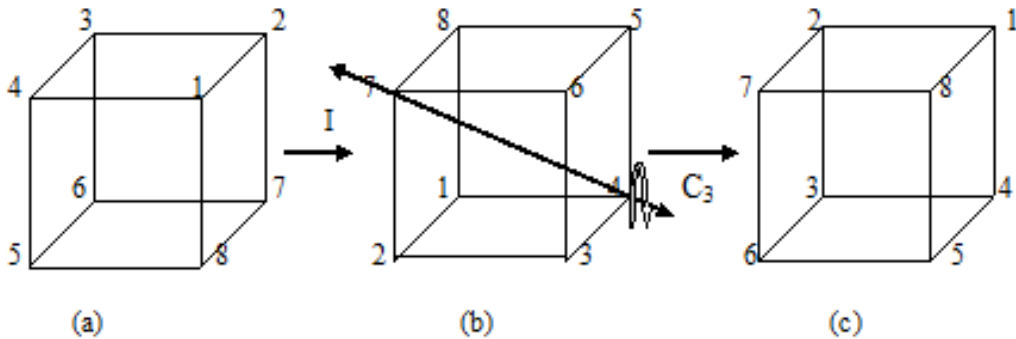


Şekil 38. h^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Görüldüğü üzere Şekil 38 (a) daki küp inversiyon işlemi uygulandıktan sonra Şekil 38 (b) deki duruma gelir. Bu son durumda küpe C_3 işleminin uygulanması yani dönme eksenini etrafında 120° lik proper dönme yaptırılmasıyla küp Şekil 38 (c) deki son durumuna ulaşır. Bu işlemlerin tamamını h^* ile temsil edip aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$h^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 27814563 \end{pmatrix}$$

Sekizinci “ inversiyon - dönme ” simetri işlemi; küpün inversiyonunun ardından, küpün 4 köşesinden tutularak, küpün 4-7 köşelerinden geçen $C_3(8)$ dönme simetri eksenini etrafında küpün 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla gerçekleştirilmiştir (Bkz. Şekil 39). Bu simetri işlemini gerçekleştiren simetri elemanı “ i^* ” ile temsil edilmiştir.



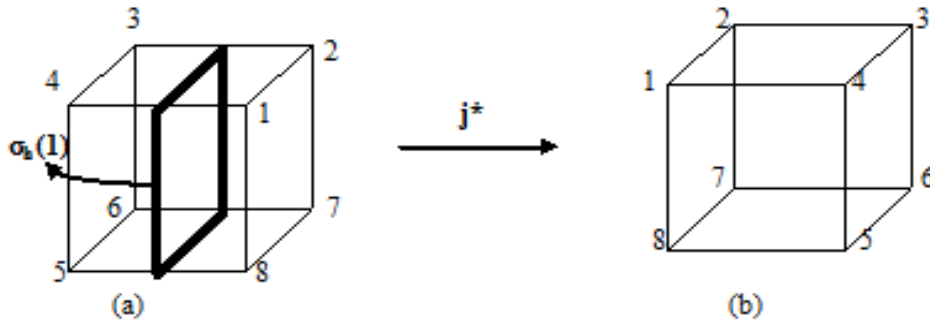
Şekil 39. i^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Görüldüğü üzere Şekil 39 (a) daki küp inversiyon işlemi uygulandıktan sonra Şekil 39 (b) deki duruma gelir. Bu son durumda küpe C3 işleminin uygulanması yani dönme eksenini etrafında 120° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıyla küp Şekil 39 (c) deki son durumuna ulaşır. Bu işlemlerin tamamını i^* ile temsil edip aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz.

$$i^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 23678541 \end{pmatrix}$$

9.1.8. Küp için simetri düzleminde yansıma simetri işlemleri

Küpün x-z eksenlerinin oluşturduğu düzlemle çakışık olan ayna yansıma simetri düzlemi $\sigma_h(1)$ ile temsil edilmiştir (Bkz. Şekil 40). $\sigma_h(1)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ j^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 40 (a) da ki ilk durumu, “ j^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 40 (b) deki gibi olur.



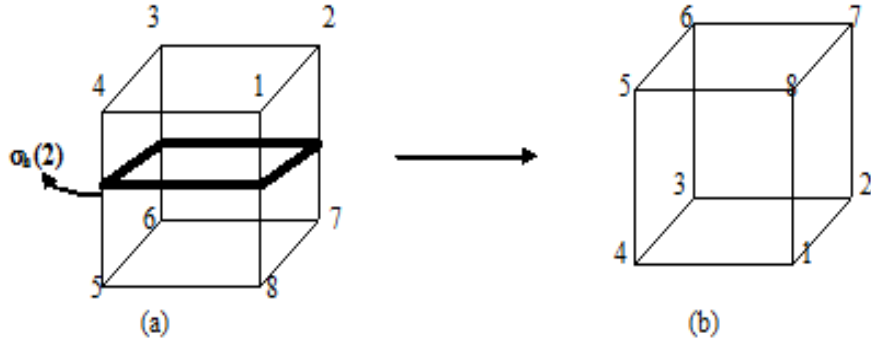
Şekil 40. j^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ j^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$j^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 43218765 \end{pmatrix}$$

Küpün x-y eksenlerinin oluşturduğu düzlemle çakışık olan ayna yansıma simetri düzlemi “ $\sigma_h(2)$ ” ile temsil edilmiştir (bkz. Şekil 41). $\sigma_h(2)$ simetri düzleminde

gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise " κ^* " ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 41 (a) da ki ilk durumu, " κ^* " simetri işlemi sonucunda Şekil 41 (b) deki gibi olur.

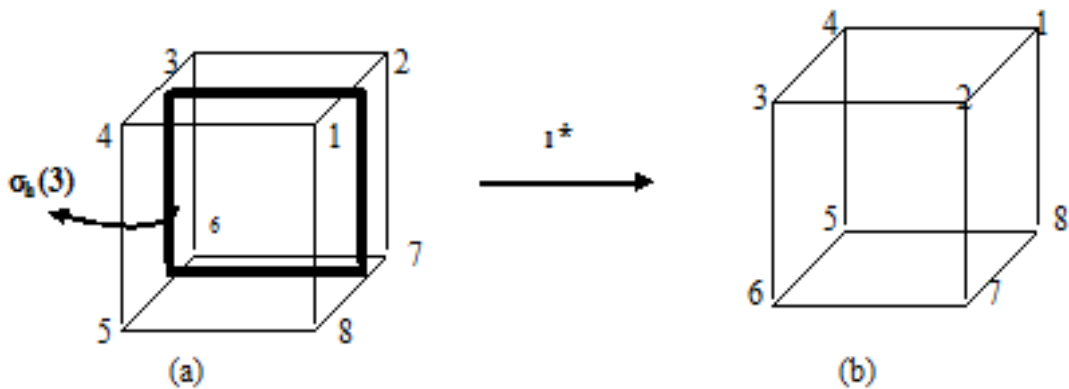


Şekil 41. κ^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda " κ^* " operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$\kappa^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 87654321 \end{pmatrix}$$

Küpün y-z eksenlerinin oluşturduğu düzlemle çakışık olan ayna yansıma simetri düzlemi " $\sigma_h(3)$ " ile temsil edilmiştir (Bkz. Şekil 42). $\sigma_h(3)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise " ι^* " ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 42 (a) da ki ilk durumu, " ι^* " simetri işlemi sonucunda Şekil 42 (b) deki gibi olur.



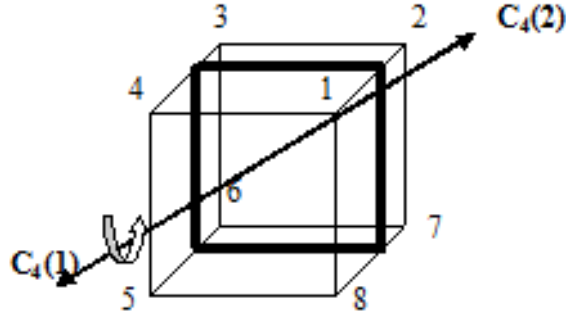
Şekil 42. ι^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ ℓ^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$\ell^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 21436587 \end{pmatrix}$$

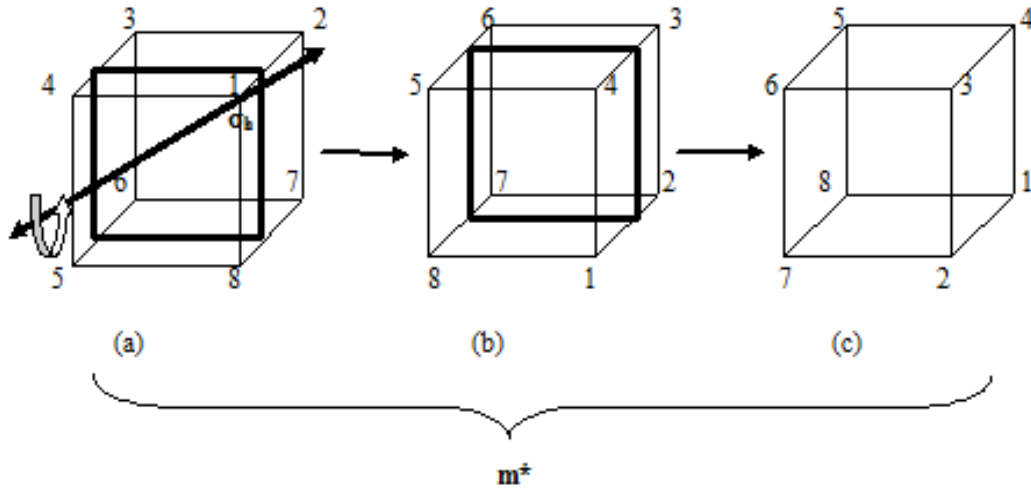
9.1.9. Küp için dönme-yansıma simetri işlemleri

İlk “dönme - yansıma” işlemi $C_4(1) = x$ ve $C_4(2) = -x$ dönme simetri eksenini ve ayna simetri düzlemini kullanarak yapalım (Bkz. Şekil 43)



Şekil 43. $\sigma_h(3)$ düzlemine dik simetri ekseninden “Dönme- Yansıma” işlemi

İlk işlem basamağını ifade edersek; küpün 1, 4, 5 ve 8 köşelerinin oluşturduğu küp yüzeyinden $C_4(1)$ simetri eksenini tutarak küpü 90° proper döndürdükten sonra $\sigma_h(3)$ ayna simetri düzleminden yansıma işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu işlem “ m^* ” simetri operasyonu ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 44 (a) da ki ilk durumu, $C_4(1)$ dönme simetri ekseninden 90° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi sonucunda Şekil 44 (b) deki duruma gelmiştir. Bu son duruma $\sigma_h(3)$ aynasından yansıma operatörü uygulandıktan sonra Şekil 44 (c) deki durum elde edilir.

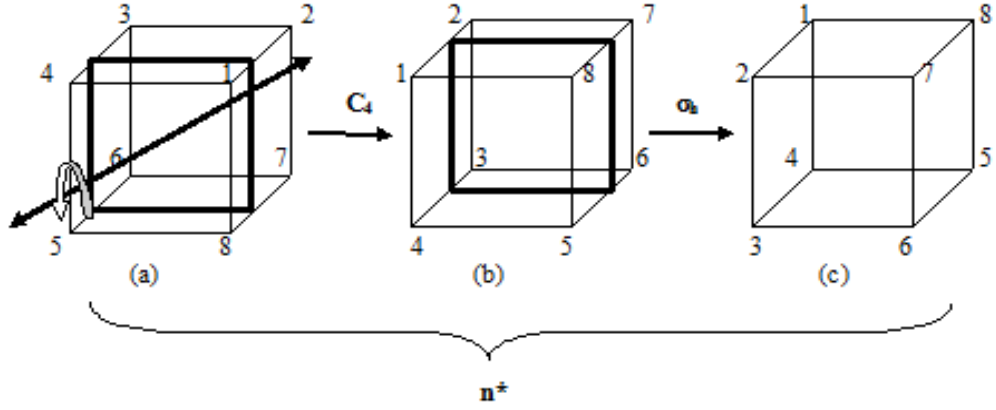


Şekil 44. m^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir

Bu simetri işlemi sonucunda “ m^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$m^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 78123456 \end{pmatrix}$$

İkinci “dönme - yansıma” işlemini de yine $C_4(2) = -x$ dönme simetri eksenini ve $\sigma_h(3)$ ayna simetri düzlemini kullanarak yapalım (Bkz. Şekil 43). bu işlem ayrıca 2, 3, 6 ve 7 köşelerinin oluşturduğu küp yüzeyi tarafından $C_4(2)$ simetri ekseninden tutup 90° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemine denktir. Bu işlem “ n^* ” simetri operatörü ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 45 (a) da ki ilk durumu, $C_4(2)$ dönme simetri ekseninden 90° lik propel dönme işlemi sonucunda Şekil 45 (b) deki duruma gelmiştir. Bu son duruma $\sigma_h(3)$ aynasından yansıma operatörü uygulandıktan sonra Şekil 45 (c) deki durum elde

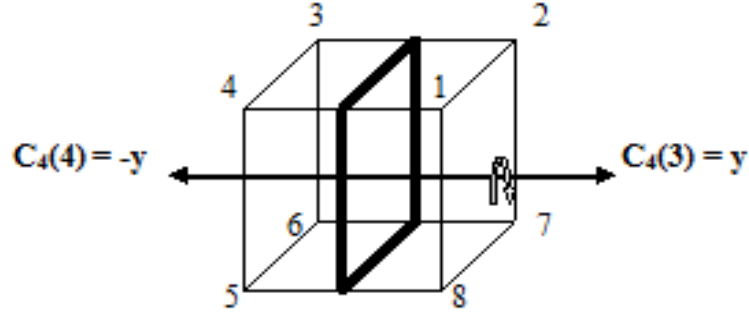


Şekil 45. n^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir

Bu simetri işlemi sonucunda “ n^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$n^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 34567812 \end{pmatrix}$$

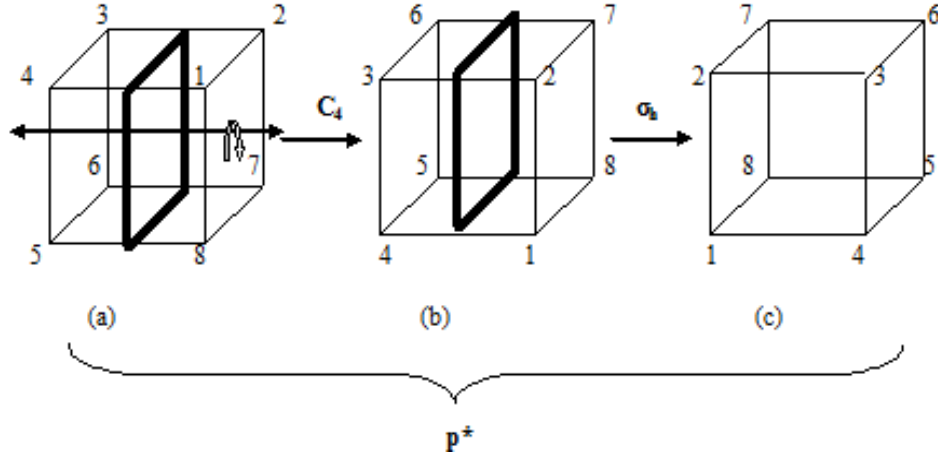
İkinci “dönme - yansıma” işlemini $C_4(3) = y$ ve $C_4(4) = -y$ dönme simetri eksenini ve $\sigma_h(1)$ ayna simetri düzlemini kullanarak yapalım (Bkz. Şekil 46).



Şekil 46. $\sigma_h(1)$ düzlemine dik simetri ekseninden “Dönme- Yansıma” işlemi.

İlk işlem basmağını; küpün 1, 2, 7 ve 8 köşelerinin oluşturduğu küp yüzeyinden $C_4(3) = y$ simetri eksenini tutarak küpü 90° proper (saat yönünün tersi yönde) döndürdükten sonra $\sigma_h(1)$ ayna simetri düzleminden yansıma işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu işlem “ p^* ” simetri operasyonu ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 47 (a) da ki ilk durumu, $C_4(3)$ dönme simetri ekseninden 90° lik proper (saat yönünün tersi yönde)

dönme işlemi sonucunda Şekil 47 (b) deki duruma gelmiştir. Bu son duruma $\sigma_h(1)$ aynasından yansıma operasyonu uygulandıktan sonra Şekil 47 (c) deki durum elde edilir.

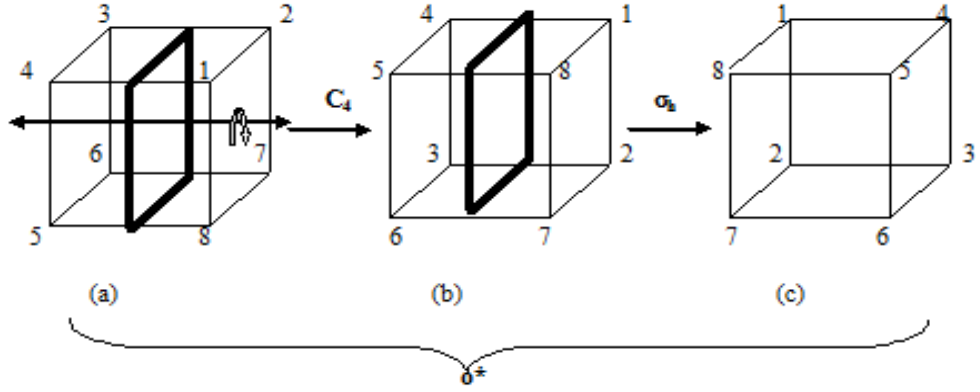


Şekil 47. p^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir

Bu simetri işlemi sonucunda “ p^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$p^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 54187236 \end{pmatrix}$$

Bir diğer işlem basamağını ise “dönme - yansıma” işlemini de yine $C_4(4) = -y$ dönme simetri eksenini ve $\sigma_h(1)$ ayna simetri düzlemini kullanarak yapalım (Bkz. Şekil 46). Bu işlem basamağını şu şekilde ifade edebiliriz. Küpün 3, 4, 5 ve 6 köşelerinin oluşturduğu küp yüzeyi tarafından $C_4(4)$ simetri ekseninden tutup 90° lik propel dönme işlemi, ardından $\sigma_h(1)$ ayna simetri düzleminden yansıtma işlemidir. Bu işlem “ o^* ” simetri operasyonu ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 48 (a) da ki ilk durumu, $C_4(4)$ dönme simetri ekseninden 90° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi sonucunda Şekil 48 (b) deki duruma gelmiştir. Bu son duruma $\sigma_h(1)$ aynasından yansıma operasyonu uygulandıktan sonra Şekil 48 (c) deki durum elde edilir.

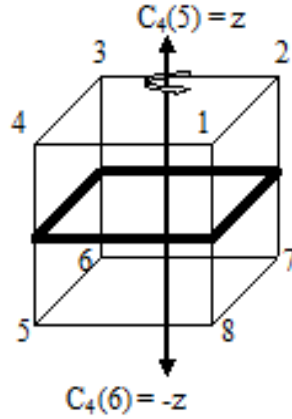


Şekil 48. o^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda " o^* " operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$o^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 36721854 \end{pmatrix}$$

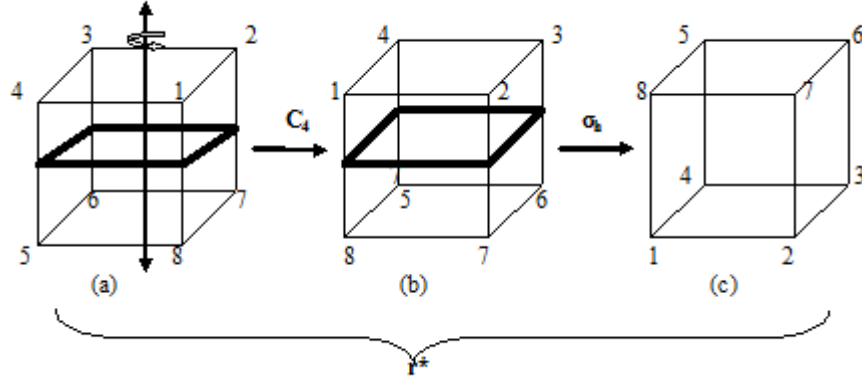
Üçüncü "dönme - yansıma" işlemini $C_4(5) = z$ ve $C_4(6) = -z$ dönme simetri eksenini ve $\sigma_h(2)$ ayna simetri düzlemini kullanarak yapalım (Bkz. Şekil 49)



Şekil 49. $\sigma_h(2)$ düzlemine dik simetri ekseninden "Dönme- Yansıma" işlemi.

İlk işlemi "dönme - yansıma" işlemini de yine $C_4(6) = -z$ dönme simetri eksenini ve $\sigma_h(2)$ ayna simetri düzlemini kullanarak yapalım (Bkz. Şekil 49). Bu işlem 5, 6, 7 ve 8 köşelerinin oluşturduğu küp yüzeyi tarafından $C_4(6)$ simetri ekseninden tutup 90° lik

proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi ardından $\sigma_h(2)$ düzleminden yansıtma işlemi yapılır. Bu işlem “ r^* ” simetri operasyonu ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 51 (a) da ki ilk durumu, $C_4(6)$ dönme simetri ekseninden 90° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi sonucunda Şekil 51 (b) deki duruma gelmiştir. Bu son duruma $\sigma_h(2)$ ayna düzleminden yansıma operasyonu uygulandıktan sonra Şekil 51 (c) deki durum elde edilir.

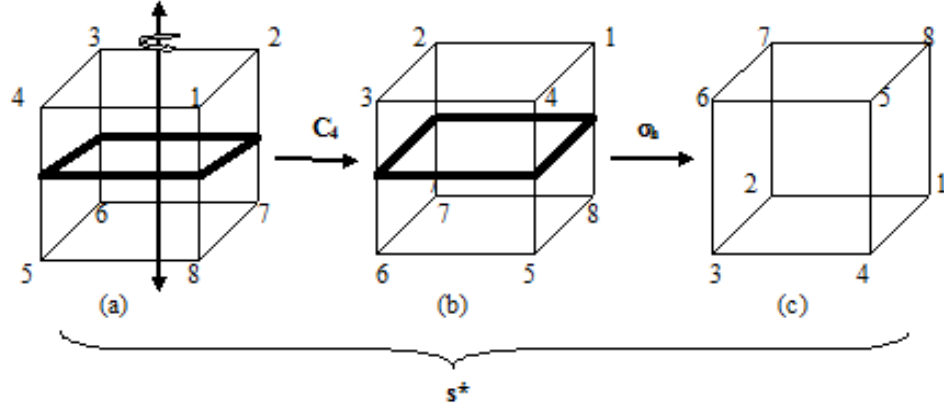


Şekil 50. r^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ r^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$r^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 58763214 \end{pmatrix}$$

İkinci işlemi ise küpün 1, 2, 3 ve 4 köşelerinin oluşturduğu küp yüzeyinden $C_4(5)$ simetri eksenini tutarak küpü 90° proper (saat yönünün tersi yönde) döndürdükten sonra $\sigma_h(2)$ ayna simetri düzleminden yansıma işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu işlem “ s^* ” simetri operasyonu ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 50 (a) da ki ilk durumu, $C_4(5)$ dönme simetri ekseninden 90° lik proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi sonucunda Şekil 50 (b) deki duruma gelmiştir. Bu son duruma $\sigma_h(2)$ aynasından yansıma operasyonu uygulandıktan sonra Şekil 50 (c) deki durum elde edilir.



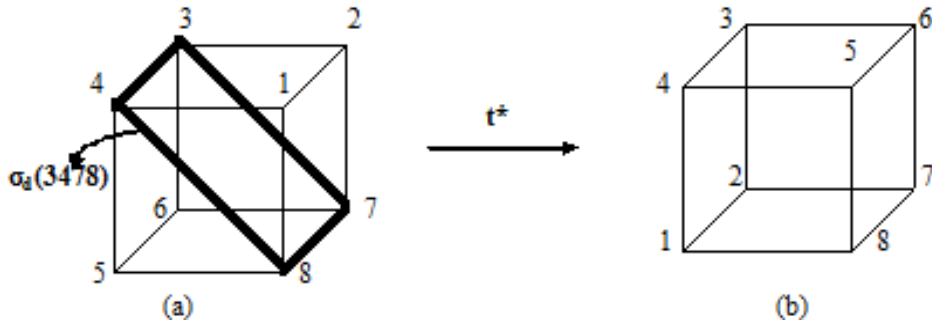
Şekil 51. s^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ s^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$s^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76581432 \end{pmatrix}$$

9.1.10. Küp için çapraz simetri düzleminden yansıma simetri işlemleri

Küpün 3, 4, 7 ve 8 köşelerini birleştiren yansıma simetri düzlemi “ $\sigma_d(3478)$ ” ile temsil edilmiştir. “ $\sigma_d(3478)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ t^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 52 (a) da ki ilk durumu, “ t^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 52 (b) deki gibi olur.

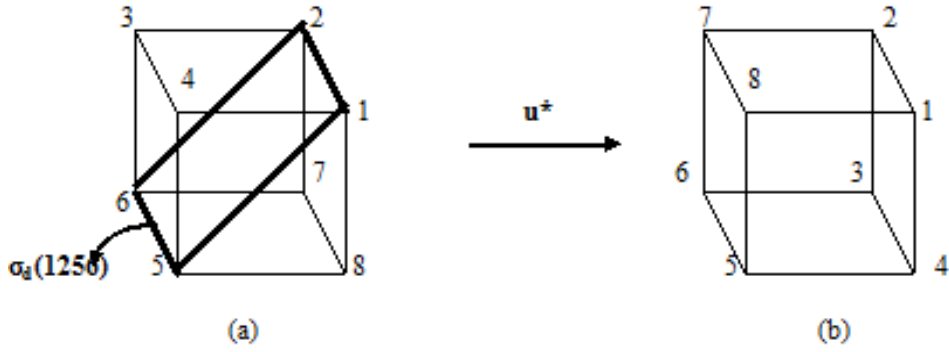


Şekil 52. t^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ t^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$t^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 56341278 \end{pmatrix}$$

Küpün 1, 2, 5 ve 6 köşelerini birleştiren yansıma simetri düzlemi “ $\sigma_d(1256)$ ” ile temsil edilmiştir. “ $\sigma_d(1256)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ u^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 53 (a) da ki ilk durumu, “ u^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 53 (b) deki gibi olur.

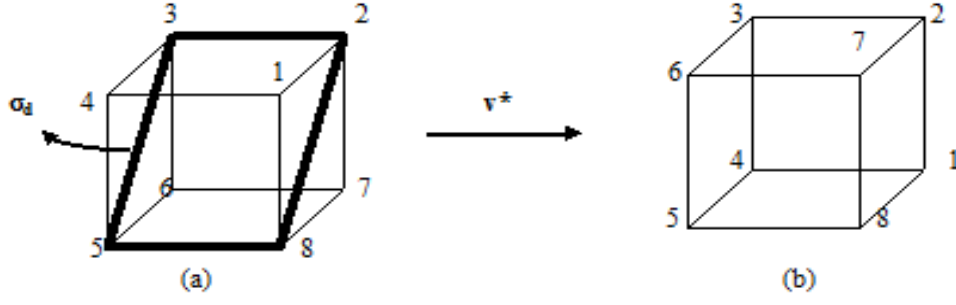


Şekil 53. u^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ u^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$u^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 12785634 \end{pmatrix}$$

Küpün 2, 3, 5 ve 8 köşelerini birleştiren yansıma simetri düzlemi “ $\sigma_d(2358)$ ” ile temsil edilmiştir. “ $\sigma_d(2358)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ v^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 54 (a) da ki ilk durumu, “ v^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 54 (b) deki gibi olur.

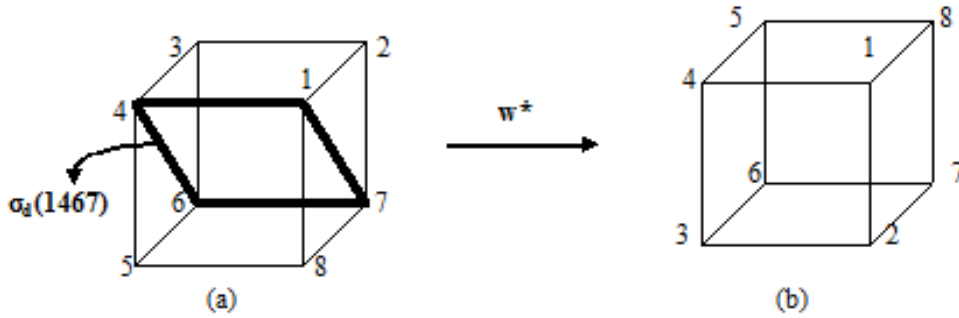


Şekil 54 . v^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ v^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$v^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 72365418 \end{pmatrix}$$

Küpün 1, 4, 6 ve 7 köşelerini birleştiren yansıma simetri düzlemi “ $\sigma_d(1467)$ ” ile temsil edilmiştir. “ $\sigma_d(1467)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ w^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 55 (a) da ki ilk durumu, “ w^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 55 (b) deki gibi olur.

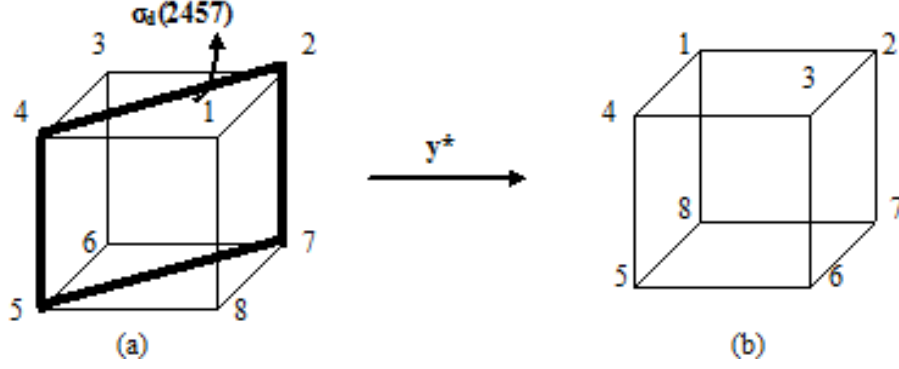


Şekil 55. w^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ w^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$w^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 18543672 \end{pmatrix}$$

Küpün 2, 4, 5 ve 7 köşelerini birleştiren yansıma simetri düzlemi “ $\sigma_d(2457)$ ” ile temsil edilmiştir. “ $\sigma_d(2457)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ y^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 56 (a) da ki ilk durumu, “ y^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 56 (b) deki gibi olur.

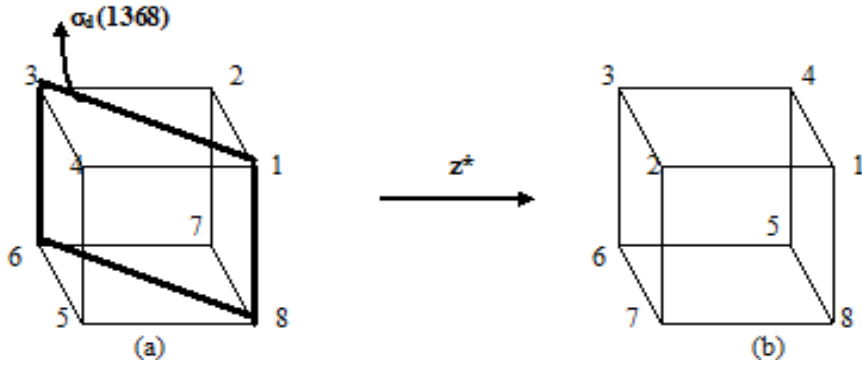


Şekil 56. y^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ y^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$y^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 32145876 \end{pmatrix}$$

Küpün 1, 3, 6 ve 8 köşelerini birleştiren yansıma simetri düzlemi “ $\sigma_d(1368)$ ” ile temsil edilmiştir. “ $\sigma_d(1368)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ z^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 57 (a) da ki ilk durumu, “ z^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 57 (b) deki gibi olur



Şekil 57. z^* simetri elemanının etkisi gösterilmiştir.

Bu simetri işlemi sonucunda “ z^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$z^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14327658 \end{pmatrix}$$

Yukarıda açık şekilde yapılan simetri işlemleri sonucunda elde edilen 48 simetri elemanın tamamı Çizelge 7 de verilmiştir.

Çizelge 7. O_h Nokta Grubunun Simetri Elemanları ve Matris Temsilleri

O_h Nokta Grubunun Simetri elemanları ve P(8) Karşılıkları	O_h nokta grubunun simetri elemanlarının matris temsilleri	Simetri İşlemi
$e = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 12345678 \end{pmatrix}$	$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Özdeşlik elemanı (Şekil 6)
$a = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix}$	$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$C_3(1)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 7)
$b = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 72185436 \end{pmatrix}$	$b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$C_3(2)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 8)
$c = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76321458 \end{pmatrix}$	$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$C_3(3)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 9)
$d = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 36541872 \end{pmatrix}$	$d = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$C_3(4)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 10)
$f = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 18723654 \end{pmatrix}$	$f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$C_3(5)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 11)

Çizelge 7'nin devamı.

$g = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 32765814 \end{pmatrix}$	$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	C ₃ (6) Simetri ekseninden 120°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil12)
$h = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 54367218 \end{pmatrix}$	$h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	C ₃ (7) Simetri ekseninden 120°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 13)
$i = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 58143276 \end{pmatrix}$	$i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	C ₃ (8) Simetri ekseninden 120°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 14)
$j = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 56781234 \end{pmatrix}$	$j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	C ₂ (1) veya “+x” Simetri ekseninden 180°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 15)
$k = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 78563412 \end{pmatrix}$	$k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	C ₂ (2) veya “+y” Simetri ekseninden 180°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 16)
$l = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 34127856 \end{pmatrix}$	$l = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	C ₂ (3) veya “+z” Simetri ekseninden 180°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 17)
$m = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 43658721 \end{pmatrix}$	$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	C ₄ (1) veya “+x” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 18)

Çizelge 7'nin devamı.

$n = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 87214365 \end{pmatrix}$	$n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	C ₄ (2) veya “-x” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 19)
$o = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81456327 \end{pmatrix}$	$o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	C ₄ (3) veya “+y” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 20)
$p = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 27634581 \end{pmatrix}$	$p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	C ₄ (4) veya “-y” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 21)
$r = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 23418567 \end{pmatrix}$	$r = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	C ₄ (5) veya “+z” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 22)
$s = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 41236785 \end{pmatrix}$	$s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	C ₄ (6) veya “-z” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 23)
$t = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 65432187 \end{pmatrix}$	$t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	C ₂ ¹ (1) Simetri ekseninden 180°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 24)

Çizelge 7'nin devamı.

$u = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 21876543 \end{pmatrix}$	$u = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	C_2^1 (2) Simetri ekseninden 180° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 25)
$v = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 63278145 \end{pmatrix}$	$v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	C_2^1 (3) Simetri ekseninden 180° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 26)
$w = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 45812763 \end{pmatrix}$	$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	C_2^1 (4) Simetri ekseninden 180° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 27)
$y = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85672341 \end{pmatrix}$	$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	C_2^1 (5) Simetri ekseninden 180° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 28)
$z = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67854123 \end{pmatrix}$	$z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	C_2^1 (6) Simetri ekseninden 180° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 29)
$I = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 65872143 \end{pmatrix}$	$I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	İnversiyon işlemi. (Şekil 31)

Çizelge 7'nin devamı.

$$a^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67234185 \end{pmatrix}$$

$$a^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

İnversiyon işleminin ardından $C_3(1)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 32)

$$b^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 45632781 \end{pmatrix}$$

$$b^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İnversiyon işleminin ardından $C_3(2)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 33)

$$c^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 41856723 \end{pmatrix}$$

$$c^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

İnversiyon işleminin ardından $C_3(3)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 34)

$$d^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81276345 \end{pmatrix}$$

$$d^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İnversiyon işleminin ardından $C_3(4)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 35)

$$f^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 63458127 \end{pmatrix}$$

$$f^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İnversiyon işleminin ardından $C_3(5)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 36)

Çizelge 7'nin devamı.

$g^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85412367 \end{pmatrix}$	$g^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	İnversiyon işleminin ardından $C_3(6)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 37)
$h^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 27814563 \end{pmatrix}$	$h^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	İnversiyon işleminin ardından $C_3(7)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 38)
$i^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 23678541 \end{pmatrix}$	$i^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	İnversiyon işleminin ardından $C_3(8)$ Simetri ekseninden 120° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi(Şekil 39)
$j^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 43218765 \end{pmatrix}$	$j^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\sigma_h(1)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi. (Şekil 40)
$k^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 87654321 \end{pmatrix}$	$k^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\sigma_h(2)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi. (Şekil 41)
$l^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 21436587 \end{pmatrix}$	$l^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\sigma_h(3)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi. (Şekil 42)
$m^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 78123456 \end{pmatrix}$	$m^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$C_4(1)$ veya “-x” Simetri ekseninden 90° 'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi ardından $\sigma_h(3)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi (Şekil 44)

Çizelge 7'nin devamı.

$n^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 34567812 \end{pmatrix}$	$n^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	C ₄ (2) veya “+x” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi ardından $\sigma_h(3)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi (Şekil 45)
$o^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 36721854 \end{pmatrix}$	$o^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	C ₄ (3) veya “-y” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi ardından $\sigma_h(1)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi (Şekil 47)
$p^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 54187236 \end{pmatrix}$	$p^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	C ₄ (4) veya “+y” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işlemi ardından $\sigma_h(1)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi (Şekil 48)
$r^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 58763214 \end{pmatrix}$	$r^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	C ₄ (5) veya “-z” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işleminin ardından $\sigma_h(2)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi (Şekil 50)
$s^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76581432 \end{pmatrix}$	$s^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	C ₄ (6) veya “+z” Simetri ekseninden 90°'lik Proper (saat yönünün tersi yönde) dönme işleminin ardından $\sigma_h(2)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi (Şekil 51)

Çizelge 7'nin devamı.

$t^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 56341278 \end{pmatrix}$	$t^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	“ $\sigma_d(3478)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi(Şekil 52)
$u^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 12785634 \end{pmatrix}$	$u^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	“ $\sigma_d(1256)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi(Şekil 53)
$v^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 72365418 \end{pmatrix}$	$v^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	“ $\sigma_d(2358)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi(Şekil 54)
$w^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 18543672 \end{pmatrix}$	$w^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	“ $\sigma_d(1467)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi(Şekil 55)
$y^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 32145876 \end{pmatrix}$	$y^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	“ $\sigma_d(2457)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi(Şekil 56)
$z^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14327658 \end{pmatrix}$	$z^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	“ $\sigma_d(1368)$ ” simetri düzleminde gerçekleşen yansıma işlemi(Şekil 57)

9.2. O_h Nokta Grubunun Simetri Elemanlarının Matris Temsilleri

O_h Nokta grubunun simetri elemanlarının matris temsillerini bulmadan önce işimize yarayacak olan matris kavramını hatırlayalım.

9.2.1. Matris

“m” tane satır ve “n” tane sütun oluşturacak biçimde dizilmiş “m x n” tane sayının oluşturduğu tabloya bir “m x n” matris denir. Bir “m x n” matris A genellikle aşağıdaki gibi gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tablosuna $m \times n$ tipindeki A **matrisi** denir. Kısaca:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

şeklinde gösterilir. Burada “ a_{ij} ”, A matrisinin i’ inci satır j’ inci sütunun kesişmesidir. Tablodaki yatay sıralara matrisin satırları, dişey sıralara da matrisin sütunları denir. A matrisi m tane satır ve n tane sütundan oluşan “ $m \times n$ ” tipinde bir matristir.

9.2.2. Kare matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Satır ve sütun sayısı eşit olan matrise kare matris denir. A matrisi 3 satırlı ve 3 sütunlu bir kare matristir.

9.2.3. Birim matris

Bütün köşegen elemanları 1 ve diğ er bütün elemanları sıfır olan kare matrislere birim matris denir ve birim matris I harfi ile gösterilir.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.2.4. Matrislerin çarpımı

İki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısının ikinci matrisin satır sayısına eşit olması gerekir. A ve B iki matris olmak üzere A'nın 1. Satır elemanları B'nin 1. sütun elemanları ile çarpılıp toplanır. Bu çarpım A matrisinin bütün satırları B matrisinin bütün sütunları ile çarpılıp yeni matris elde edilinceye kadar devam eder.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} = C \text{ olacağından } C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}$$

sonucuna ulaşılır. Bu matrisleri denklem olarak açarsak

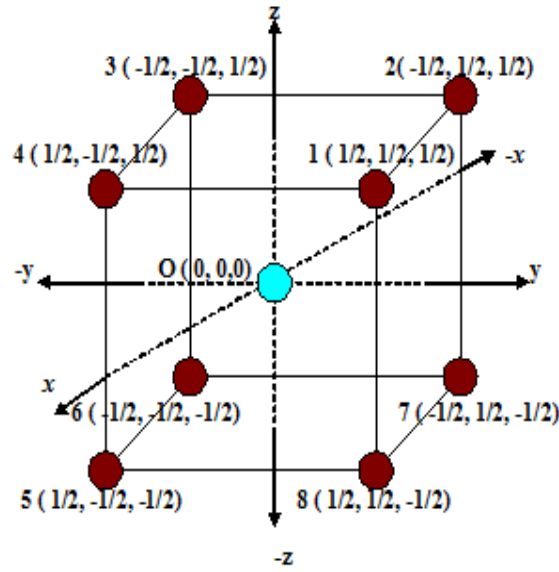
$$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = c_{11}$$

$$a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = c_{21}$$

$$a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} = c_{31} \quad \text{sonuçları elde edilir.}$$

9.2.5. O_h Nokta grubunun simetri elemanlarının matris temsilleri

Varsayalım ki küpün kenar uzunlukları 1 birimdir. Bu küpü, (x, y, z) koordinat ekseninde göstermek istersek. Küpün köşe koordinatları $\pm 1/2$ değerlerini alır. Bu ifade görsel olarak Şekil 58 te gösterilmiştir.



Şekil 58. Küpün köşe koordinatlarının gösterimi

Daha önceden bahis ettiğimiz matris çarpımı denklemlerini ve O_h nokta grubunun simetri elemanlarının permütasyon gösterimlerini kullanarak, O_h nokta grubunun matris temsillerini gösterebiliriz.

İlk olarak “ e ” simetri elemanının matris temsilini gösterelim. e ’nin permütasyon gösteriminin

$$e = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 12345678 \end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8 köşelerini şekil kullanarak bir sütun matris formunda yazabiliriz.

$$1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad 2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad 3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad 4 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$5 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad 6 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad 7 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad 8 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

ve işlemde kullanacağımız matris aşağıdaki 3x3 lük bir A matrisi olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bu bilgiler ışığında küpün 1 köşesinin “e” simetri elemanı sonucunda tekrar 1 köşesi olduğunu kolayca anlarız. Yani A matrisin, 1 köşesinin koordinat matrisiyle çarpımı yine 1 köşesinin koordinat matrisine eşit olacaktır. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$A \times 1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 1$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 \dots \dots \dots \mathbf{1(a)}$$

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 \dots \dots \dots \mathbf{1(b)}$$

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1 \dots \dots \dots \mathbf{1(c)}$$

A matrisin, 2 köşesinin koordinat matrisiyle çarpımı yine 2 köşesinin koordinat matrisine eşit olacaktır. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$A \times 2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 2$$

$$-a_{11} + a_{12} + a_{13} = -1 \dots \dots \dots \mathbf{2(a)}$$

$$-a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 \dots \dots \dots \mathbf{2(b)}$$

$$-a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1 \dots \dots \dots \mathbf{2(c)}$$

A matrisin, 3 köşesinin koordinat matrisiyle çarpımı yine 3 köşesinin koordinat matrisine eşit olacaktır. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$A \times 3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 3$$

$$-a_{11} - a_{12} + a_{13} = -1 \dots \dots \dots 3(a)$$

$$-a_{21} - a_{22} + a_{23} = -1 \dots \dots \dots 3(b)$$

$$-a_{31} - a_{32} + a_{33} = 1 \dots \dots \dots 3(c)$$

1(a) ve **3(a)** denklemlerini kendi aralarında, **1(b)** ve **3(b)** denklemlerini kendi aralarında, **1(c)** ve **3(c)** denklemlerini de kendi aralarında, taraf tarafa toplayabiliriz.

$$\begin{array}{lll} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 & a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 & a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1 \\ -a_{11} - a_{12} + a_{13} = -1 & -a_{21} - a_{22} + a_{23} = -1 & -a_{31} - a_{32} + a_{33} = 1 \\ 2a_{13} = 0 \text{ ise } a_{13} = 0 & 2a_{23} = 0 \text{ ise } a_{23} = 0 & 2a_{33} = 2 \text{ ise } a_{33} = 1 \end{array}$$

1(a) ve **2(a)** denklemlerini kendi aralarında, **1(b)** ve **2(b)** denklemlerini kendi aralarında, **1(c)** ve **3(c)** denklemlerini de kendi aralarında, taraf tarafa toplayıp, yukarıda elde ettiğimiz sonuçları aşağıda yerine koyabiliriz.

$$\begin{array}{lll} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 & a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 & a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1 \\ -a_{11} + a_{12} + a_{13} = -1 & -a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 & -a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1 \\ 2a_{12} + 2a_{13} = 0 & 2a_{22} + 2a_{23} = 2 & 2a_{32} + 2a_{33} = 2 \\ 2a_{12} + 0 = 0 \text{ ise } a_{12} = 0 & 2a_{22} + 0 = 2 \text{ ise } a_{22} = 1 & 2a_{32} + 2 = 2 \text{ ise } a_{32} = 0 \end{array}$$

Elde ettiğimiz bu sonuçları **1(a)**, **1(b)** ve **1(c)** denklemlerinde yerine koyarsak:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 \text{ ise } a_{11} + 0 + 0 = 1 \text{ ve } a_{11} = 1$$

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 \text{ ise } a_{21} + 1 + 0 = 1 \text{ ve } a_{21} = 0$$

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1 \text{ ise } a_{31} + 0 + 1 = 1 \text{ ve } a_{31} = 0$$

Bu veriler kullanılarak “e” simetri elemanının matris temsilini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aynı işlemleri bir de rast gele seçilen “c” simetri elemanının matris temsilini bulmak için kullanalım, c’ nin permütasyon gösteriminin;

$$c = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76321458 \end{pmatrix}$$

ve işlemde kullanacağımız matrisin aşağıdaki 3x3 lük bir A matrisi olduğunu biliyoruz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bu bilgiler ışığında küpün 1 köşesinin “c” simetri elemanı sonucunda 7 köşesi ile yer değiştirdiğini kolayca anlarız. Yani A matrisin, 1 köşesinin koordinat matrisiyle çarpımı, 7 köşesinin koordinat matrisine eşit olacaktır. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$A \times 1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = 7$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = -1 \dots\dots\dots \mathbf{1(a)}$$

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 \dots\dots\dots \mathbf{1(b)}$$

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = -1 \dots\dots\dots \mathbf{1(c)}$$

A matrisin, 2 köşesinin koordinat matrisiyle çarpımı da 6 köşesinin koordinat matrisine eşit olacaktır. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$A \times 2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = 6$$

$$-a_{11} + a_{12} + a_{13} = -1 \dots\dots\dots \mathbf{2(a)}$$

$$-a_{21} + a_{22} + a_{23} = -1 \dots\dots\dots \mathbf{2(b)}$$

$$-a_{31} + a_{32} + a_{33} = -1 \dots\dots\dots \mathbf{2(c)}$$

A matrisin, 3 köşesinin koordinat matrisiyle çarpımı da yine 3 köşesinin koordinat matrisine eşit olacaktır. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$A \times 3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 3$$

$$-a_{11} - a_{12} + a_{13} = -1 \dots\dots\dots \mathbf{3(a)}$$

$$-a_{21} - a_{22} + a_{23} = -1 \dots\dots\dots \mathbf{3(b)}$$

$$-a_{31} - a_{32} + a_{33} = 1 \dots\dots\dots \mathbf{3(c)}$$

$\mathbf{1(a)}$ ve $\mathbf{3(a)}$ denklemlerini kendi aralarında, $\mathbf{1(b)}$ ve $\mathbf{3(b)}$ denklemlerini kendi aralarında, $\mathbf{1(c)}$ ve $\mathbf{3(c)}$ denklemlerini de kendi aralarında, taraf tarafa toplayabiliriz.

$$\begin{array}{lll}
a_{11} + a_{12} + a_{13} = -1 & a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 & a_{31} + a_{32} + a_{33} = -1 \\
-a_{11} - a_{12} + a_{13} = -1 & -a_{21} - a_{22} + a_{23} = -1 & -a_{31} - a_{32} + a_{33} = 1 \\
2a_{13} = -2 \text{ ise } a_{13} = -1 & 2a_{23} = 0 \text{ ise } a_{23} = 0 & 2a_{33} = 0 \text{ ise } a_{33} = 0
\end{array}$$

1(a) ve **2(a)** denklemlerini kendi aralarında, **1(b)** ve **2(b)** denklemlerini kendi aralarında, **1(c)** ve **3(c)** denklemlerini de kendi aralarında, taraf tarafa toplayıp, yukarıda elde ettiğimiz sonuçları aşağıda yerine koyabiliriz.

$$\begin{array}{lll}
a_{11} + a_{12} + a_{13} = -1 & a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 & a_{31} + a_{32} + a_{33} = -1 \\
-a_{11} + a_{12} + a_{13} = -1 & -a_{21} + a_{22} + a_{23} = -1 & -a_{31} + a_{32} + a_{33} = -1 \\
2a_{12} + 2a_{13} = -2 & 2a_{22} + 2a_{23} = 0 & 2a_{32} + 2a_{33} = -2 \\
2a_{12} + 2(-1) = -2 \text{ ise } a_{12} = 0 & 2a_{22} + 0 = 0 \text{ ise } a_{22} = 0 & 2a_{32} + 0 = -2 \text{ ise } a_{32} = -1
\end{array}$$

Elde ettiğimiz bu sonuçları **1(a)**, **1(b)** ve **1(c)** denklemlerinde yerine koyarsak:

$$\begin{array}{l}
a_{11} + a_{12} + a_{13} = -1 \text{ ise } a_{11} + 0 - 1 = -1 \text{ ve } a_{11} = 0 \\
a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 \text{ ise } a_{21} + 0 + 0 = 1 \text{ ve } a_{21} = 1 \\
a_{31} + a_{32} + a_{33} = -1 \text{ ise } a_{31} + 0 - 1 = -1 \text{ ve } a_{31} = 0
\end{array}$$

Bu veriler kullanılarak “*c*” simetri elemanının matris temsilini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu işlem basmaklarını, O_h nokta grubunun 48 simetri elemanlarının tamamına uygulayabiliriz. Böylece O_h nokta grubun 48 simetri elemanın tamamının matris temsilleri bulunmuş olur. O_h nokta grubunun simetri elemanlarının matris temsillerinin tamamı Çizelge 7 de gösterilmiştir.

Bulduğumuz matrislerin doğruluğunu yine matris çarpımı kullanarak test edebiliriz. Örneğin “c” matrisinin doğruluğuna bakalım. “c” permütasyonu göz önüne alındığında “4” köşesinin koordinat matrisinin “c” matrisiyle çarpımı sonucunda, “2” köşesinin koordinat matrisi elde edildiğini kolayca görmemiz mümkündür.

$$c \times 4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$$c_{11} = (1/2 \times 0) + (-1/2 \times 0) + (1/2 \times -1) = 0 + 0 - 1/2 = -1/2$$

$$c_{21} = (1/2 \times 1) + (-1/2 \times 0) + (1/2 \times 0) = 1/2 + 0 + 0 = 1/2$$

$$c_{31} = (1/2 \times 0) + (-1/2 \times -1) + (1/2 \times 0) = 0 + 1/2 + 0 = 1/2$$

$$\text{yani } c \times 4 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 2 \text{ sonucuna ulaşılır.}$$

9.3. Permütasyon İşlemleri ve O_h Nokta Grubunun Çarpım Tablosu

Bulgular kısmının başında 48 elemanlı O_h nokta grubunun $P(8)$ permütasyon grubunun bir alt grubu ile izomorfik olduğundan bahsedilmişti. Bu bilgi yardımıyla simetri elemanlarının Çizelge 7 deki permütasyon temsilleri ve ya O_h nokta grubunun matris temsillerini kullanarak toplamda $48 \times 48 = 2304$ adet permütasyon çarpımı veya matris çarpımı işlemleri yapılabilir. Bu işlemler yardımıyla O_h nokta grubuna ait Çarpım Tablosu oluşturulabilir.

Abelian gruplarda permütasyon çarpımı ve matris çarpımı işlemleri bir birine eşit sonuçlar verir. Ancak abelian olmayan gruplarda permütasyon çarpımı işlemleriyle matris çarpımı işlemlerinin sonuçlarındaki farklılıklara dikkat edilmelidir. Bu farklılığı ortadan kaldırmak için ; abelian olmayan gruplar da permütasyon çarpım işlemleri sanki abelian bir grupta yapılmış gibi çözülmelidir. Yani: $a \cdot g = g \cdot a$ şeklinde

çözölmelidir. Genellikle permütasyon çarpımı işlemlerinde denklemi sağdan sola çözmek bu sorunu ortadan kaldıracaktır. Permütasyon işleminin işlem basamağı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$a \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= h \text{ yani } (a \cdot g = h)$$

Bu işlem basamağı şu şekilde yorumlanır. “ $a \cdot g$ ” nin yukarıda yazılan permütasyon ifadesinin sağından başlanarak sola doğru işlem yapılır. Yani işleme “ g ” nin birinci satır sekizinci sütunundan başlanarak yine “ g ” nin birinci satır birinci sütununa kadar devam edilir.

“ g ” nin birinci satır, sekizinci sütundaki 8 rakamı 4 rakamına karşılık gelmiştir. Aynı şekil de “ a ” nin birinci satır, dördüncü sütundaki 4 rakamı da 8 rakamına karşılık gelmiştir. Bu işlemleri toplarsak “ g ” nin birinci satır sekizinci sütundaki 8 rakamı, “ a ” nin ikinci satır dördüncü sütunundaki 8 rakamına karşılık geldiğini kolayca görürüz. “ g ” nin birinci satır, yedinci sütundaki 7 rakamı 1 rakamına karşılık gelmiştir. Aynı şekil de “ a ” nin birinci satır, birinci sütundaki 1 rakamı da yine 1 rakamına karşılık gelmiştir. Bu işlemleri toplarsak “ g ” nin birinci satır yedinci sütundaki 7 rakamının, “ a ” nin ikinci satır birinci sütunundaki 1 rakamına karşılık geldiğini kolayca görürüz. Bu işlemler bütün permütasyon elemanlarına uygulanarak yeni bir simetri elemanı elde edilir.

Bu bilgiler ışığında permütasyon işlemler aracılığıyla, O_h nokta grubunun Çarpım tablosu oluşturulabilir (Bkz. Çizelge 8). Bunun için 2304 adet permütasyon işlemi yapılır. Örnek olması amacıyla “ a ” simetri elemanının diğer simetri elemanlarıyla girdiği permütasyon işlemleri aşağıda verilmiştir.

$$a \bullet e = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 12345678 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} = a$$

$$a \bullet a = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 18723654 \end{pmatrix} = f$$

$$a \bullet b = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 72185436 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 34127856 \end{pmatrix} = \ell$$

$$a \bullet c = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76321458 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 36541872 \end{pmatrix} = d$$

$$a \bullet d = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 36541872 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 56781234 \end{pmatrix} = j$$

$$a \bullet f = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 18723654 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 12345678 \end{pmatrix} = e$$

$$a \bullet g = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 32765814 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 54367218 \end{pmatrix} = h$$

$$a \bullet h = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 54367218 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 78563412 \end{pmatrix} = \kappa$$

$$a \bullet i = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 58143276 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 72185436 \end{pmatrix} = b$$

$$a \bullet j = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 56781234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76321458 \end{pmatrix} = c$$

$$a \bullet \kappa = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 78563412 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 32765814 \end{pmatrix} = g$$

$$a \bullet \ell = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 34127856 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 58143276 \end{pmatrix} = i$$

$$a \bullet m = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 43658721 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85672341 \end{pmatrix} = y$$

$$a \bullet n = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 87214365 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 23418567 \end{pmatrix} = r$$

$$a \bullet o = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81456327 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 21876543 \end{pmatrix} = u$$

$$a \bullet p = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 27634581 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 43658721 \end{pmatrix} = m$$

$$a \bullet r = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 23418567 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 45812763 \end{pmatrix} = w$$

$$a \bullet s = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 41236785 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81456327 \end{pmatrix} = o$$

$$a \bullet t = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 65432187 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67854123 \end{pmatrix} = z$$

$$a \bullet u = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 21876543 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 41236785 \end{pmatrix} = s$$

$$a \bullet v = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 63278145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 65432187 \end{pmatrix} = t$$

$$a \bullet w = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 45812763 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 87214365 \end{pmatrix} = n$$

$$a \bullet y = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85672341 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 27634581 \end{pmatrix} = p$$

$$a \bullet z = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67854123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 63278145 \end{pmatrix} = v$$

$$a \bullet I = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 65872143 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67234185 \end{pmatrix} = a^*$$

$$a \bullet a^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67234185 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 63458127 \end{pmatrix} = f^*$$

$$a \bullet b^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 45632781 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 87654321 \end{pmatrix} = k^*$$

$$a \bullet c^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 41856723 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81276345 \end{pmatrix} = d^*$$

$$a \bullet d^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81276345 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 21436587 \end{pmatrix} = l^*$$

$$a \bullet f^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 63458127 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 65872143 \end{pmatrix} = I$$

$$a \bullet g^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85412367 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 27814563 \end{pmatrix} = h^*$$

$$a \bullet h^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 27814563 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 43218765 \end{pmatrix} = j^*$$

$$a \bullet i^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1234678 \\ 23678541 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 45632781 \end{pmatrix} = b^*$$

$$a \bullet j^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 43218765 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85412367 \end{pmatrix} = g^*$$

$$a \bullet k^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 87654321 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 23678541 \end{pmatrix} = i^*$$

$$a \bullet l^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 21436587 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 41856723 \end{pmatrix} = c^*$$

$$a \bullet m^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 78123456 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 32145876 \end{pmatrix} = y^*$$

$$a \bullet n^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 34567812 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 58763214 \end{pmatrix} = r^*$$

$$a \bullet o^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 36721854 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 56341278 \end{pmatrix} = t^*$$

$$a \bullet p^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 54187236 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 78123456 \end{pmatrix} = m^*$$

$$a \bullet r^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 58763214 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 72365418 \end{pmatrix} = v^*$$

$$a \bullet s^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76581432 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 36721854 \end{pmatrix} = o^*$$

$$a \bullet t^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 56341278 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76581432 \end{pmatrix} = s^*$$

$$a \bullet u^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 12785634 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14327658 \end{pmatrix} = z^*$$

$$a \bullet v^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 72365418 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 34567812 \end{pmatrix} = n^*$$

$$a \bullet w^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 18543672 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 12785634 \end{pmatrix} = u^*$$

$$a \bullet y^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 32145876 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 54187236 \end{pmatrix} = p^*$$

$$a \bullet z^* = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14587632 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14327658 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 18543672 \end{pmatrix} = w^*$$

ikinci yöntem olan matris çarpımına örnek olarak:

$$a \bullet g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = h$$

matris çarpımı gösterilebilir. Görüldüğü üzere a ve g simetri elemanlarının matris temsilleri çarpımı h simetri elemanının matris temsilini verir. Bu ikili matris çarpımı işlemleri 48 simetri elemanı için tekrar tekrar yapılırsa sonuç olarak tekrar Çizelge 8. deki O_h nokta grubun çarpım tablosu bulunmuş olur.

Çizelge 8. O_h Nokta Grubunun Çarpım Tablosu

•	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>l</i>	<i>d</i>	<i>j</i>	<i>e</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>g</i>	<i>i</i>	<i>y</i>	<i>r</i>	<i>u</i>	<i>m</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>k</i>	<i>g</i>	<i>l</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>h</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>o</i>	<i>v</i>	<i>z</i>	<i>r</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>j</i>	<i>h</i>	<i>l</i>	<i>k</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>i</i>	<i>g</i>	<i>r</i>	<i>y</i>	<i>n</i>	<i>t</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>l</i>	<i>c</i>	<i>k</i>	<i>i</i>	<i>g</i>	<i>j</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>r</i>	<i>z</i>
<i>f</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>k</i>	<i>g</i>	<i>l</i>	<i>d</i>	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>p</i>	<i>w</i>	<i>s</i>	<i>y</i>
<i>g</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>b</i>	<i>j</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>z</i>	<i>s</i>	<i>m</i>	<i>u</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>j</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>i</i>	<i>l</i>	<i>c</i>	<i>k</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>v</i>	<i>o</i>	<i>y</i>	<i>s</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>j</i>	<i>f</i>	<i>l</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>s</i>	<i>z</i>	<i>t</i>	<i>n</i>
<i>j</i>	<i>j</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	<i>k</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>w</i>	<i>v</i>
<i>k</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	<i>j</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>p</i>	<i>o</i>
<i>l</i>	<i>l</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	<i>e</i>	<i>u</i>	<i>t</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
<i>m</i>	<i>m</i>	<i>w</i>	<i>r</i>	<i>p</i>	<i>z</i>	<i>s</i>	<i>v</i>	<i>y</i>	<i>o</i>	<i>n</i>	<i>u</i>	<i>t</i>	<i>j</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>g</i>
<i>n</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>z</i>	<i>v</i>	<i>r</i>	<i>y</i>	<i>p</i>	<i>s</i>	<i>w</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>e</i>	<i>j</i>	<i>i</i>	<i>c</i>
<i>o</i>	<i>o</i>	<i>y</i>	<i>u</i>	<i>r</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>z</i>	<i>v</i>	<i>p</i>	<i>w</i>	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>k</i>	<i>e</i>
<i>p</i>	<i>p</i>	<i>r</i>	<i>n</i>	<i>y</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>z</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>w</i>	<i>o</i>	<i>v</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>k</i>
<i>r</i>	<i>r</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>t</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>m</i>	<i>o</i>	<i>n</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>s</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
<i>s</i>	<i>s</i>	<i>m</i>	<i>o</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	<i>w</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>t</i>	<i>z</i>	<i>y</i>	<i>r</i>	<i>g</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>f</i>
<i>t</i>	<i>t</i>	<i>v</i>	<i>y</i>	<i>o</i>	<i>s</i>	<i>z</i>	<i>w</i>	<i>r</i>	<i>p</i>	<i>u</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>l</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>i</i>
<i>u</i>	<i>u</i>	<i>p</i>	<i>s</i>	<i>w</i>	<i>y</i>	<i>r</i>	<i>o</i>	<i>z</i>	<i>v</i>	<i>t</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>g</i>	<i>a</i>
<i>v</i>	<i>v</i>	<i>z</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>u</i>	<i>t</i>	<i>r</i>	<i>n</i>	<i>y</i>	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>j</i>	<i>l</i>
<i>w</i>	<i>w</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>z</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>y</i>	<i>u</i>	<i>r</i>	<i>p</i>	<i>v</i>	<i>o</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>l</i>	<i>j</i>
<i>y</i>	<i>y</i>	<i>n</i>	<i>w</i>	<i>m</i>	<i>v</i>	<i>o</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>u</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>z</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>h</i>
<i>z</i>	<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>u</i>	<i>o</i>	<i>v</i>	<i>n</i>	<i>w</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>r</i>	<i>y</i>	<i>i</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>a</i> *	<i>b</i> *	<i>c</i> *	<i>d</i> *	<i>f</i> *	<i>g</i> *	<i>h</i> *	<i>i</i> *	<i>l</i> *	<i>j</i> *	<i>k</i> *	<i>m</i> *	<i>n</i> *	<i>o</i> *	<i>p</i> *
<i>a</i> *	<i>a</i> *	<i>f</i> *	<i>k</i> *	<i>d</i> *	<i>l</i> *	<i>I</i>	<i>h</i> *	<i>j</i> *	<i>b</i> *	<i>c</i> *	<i>g</i> *	<i>i</i> *	<i>y</i> *	<i>r</i> *	<i>u</i> *	<i>m</i> *
<i>b</i> *	<i>b</i> *	<i>j</i> *	<i>g</i> *	<i>k</i> *	<i>a</i> *	<i>c</i> *	<i>I</i>	<i>i</i> *	<i>l</i> *	<i>h</i> *	<i>d</i> *	<i>f</i> *	<i>o</i> *	<i>w</i> *	<i>z</i> *	<i>r</i> *
<i>c</i> *	<i>c</i> *	<i>b</i> *	<i>l</i> *	<i>h</i> *	<i>k</i> *	<i>j</i> *	<i>d</i> *	<i>I</i>	<i>f</i> *	<i>a</i> *	<i>i</i> *	<i>g</i> *	<i>r</i> *	<i>y</i> *	<i>n</i> *	<i>u</i> *
<i>d</i> *	<i>d</i> *	<i>k</i> *	<i>c</i> *	<i>j</i> *	<i>i</i> *	<i>g</i> *	<i>l</i> *	<i>a</i> *	<i>I</i>	<i>f</i> *	<i>b</i> *	<i>h</i> *	<i>v</i> *	<i>p</i> *	<i>r</i> *	<i>z</i> *
<i>f</i> *	<i>f</i> *	<i>I</i>	<i>i</i> *	<i>l</i> *	<i>c</i> *	<i>a</i> *	<i>j</i> *	<i>g</i> *	<i>k</i> *	<i>d</i> *	<i>h</i> *	<i>b</i> *	<i>p</i> *	<i>v</i> *	<i>s</i> *	<i>y</i> *
<i>g</i> *	<i>g</i> *	<i>d</i> *	<i>I</i>	<i>f</i> *	<i>j</i> *	<i>k</i> *	<i>b</i> *	<i>l</i> *	<i>h</i> *	<i>i</i> *	<i>a</i> *	<i>c</i> *	<i>z</i> *	<i>s</i> *	<i>m</i> *	<i>t</i> *
<i>h</i> *	<i>h</i> *	<i>l</i> *	<i>a</i> *	<i>I</i>	<i>g</i> *	<i>i</i> *	<i>k</i> *	<i>c</i> *	<i>j</i> *	<i>b</i> *	<i>f</i> *	<i>d</i> *	<i>w</i> *	<i>o</i> *	<i>y</i> *	<i>s</i> *
<i>i</i> *	<i>i</i> *	<i>h</i> *	<i>j</i> *	<i>b</i> *	<i>I</i>	<i>l</i> *	<i>f</i> *	<i>k</i> *	<i>d</i> *	<i>g</i> *	<i>c</i> *	<i>a</i> *	<i>s</i> *	<i>z</i> *	<i>u</i> *	<i>n</i> *
<i>j</i> *	<i>j</i> *	<i>c</i> *	<i>f</i> *	<i>a</i> *	<i>h</i> *	<i>b</i> *	<i>i</i> *	<i>d</i> *	<i>g</i> *	<i>k</i> *	<i>I</i>	<i>l</i> *	<i>u</i> *	<i>t</i> *	<i>p</i> *	<i>o</i> *
<i>k</i> *	<i>k</i> *	<i>g</i> *	<i>h</i> *	<i>i</i> *	<i>f</i> *	<i>d</i> *	<i>a</i> *	<i>b</i> *	<i>c</i> *	<i>j</i> *	<i>l</i> *	<i>I</i>	<i>t</i> *	<i>u</i> *	<i>w</i> *	<i>v</i> *
<i>l</i> *	<i>l</i> *	<i>i</i> *	<i>d</i> *	<i>g</i> *	<i>b</i> *	<i>h</i> *	<i>c</i> *	<i>t</i> *	<i>a</i> *	<i>I</i>	<i>k</i> *	<i>j</i> *	<i>n</i> *	<i>m</i> *	<i>v</i> *	<i>w</i> *
<i>m</i> *	<i>m</i> *	<i>v</i> *	<i>r</i> *	<i>p</i> *	<i>z</i> *	<i>s</i> *	<i>w</i> *	<i>y</i> *	<i>o</i> *	<i>n</i> *	<i>t</i> *	<i>u</i> *	<i>l</i> *	<i>I</i>	<i>a</i> *	<i>g</i> *
<i>n</i> *	<i>n</i> *	<i>o</i> *	<i>z</i> *	<i>w</i> *	<i>r</i> *	<i>y</i> *	<i>p</i> *	<i>s</i> *	<i>v</i> *	<i>m</i> *	<i>u</i> *	<i>t</i> *	<i>I</i>	<i>l</i> *	<i>i</i> *	<i>c</i> *
<i>o</i> *	<i>o</i> *	<i>y</i> *	<i>t</i> *	<i>r</i> *	<i>m</i> *	<i>n</i> *	<i>s</i> *	<i>u</i> *	<i>z</i> *	<i>w</i> *	<i>p</i> *	<i>v</i> *	<i>h</i> *	<i>b</i> *	<i>j</i> *	<i>I</i>
<i>p</i> *	<i>p</i> *	<i>r</i> *	<i>n</i> *	<i>y</i> *	<i>u</i> *	<i>t</i> *	<i>z</i> *	<i>m</i> *	<i>s</i> *	<i>v</i> *	<i>o</i> *	<i>w</i> *	<i>d</i> *	<i>f</i> *	<i>I</i>	<i>j</i> *
<i>r</i> *	<i>r</i> *	<i>t</i> *	<i>w</i> *	<i>u</i> *	<i>v</i> *	<i>p</i> *	<i>m</i> *	<i>o</i> *	<i>n</i> *	<i>y</i> *	<i>z</i> *	<i>s</i> *	<i>a</i> *	<i>c</i> *	<i>b</i> *	<i>d</i> *
<i>s</i> *	<i>s</i> *	<i>m</i> *	<i>o</i> *	<i>n</i> *	<i>p</i> *	<i>v</i> *	<i>t</i> *	<i>w</i> *	<i>u</i> *	<i>z</i> *	<i>y</i> *	<i>r</i> *	<i>g</i> *	<i>i</i> *	<i>h</i> *	<i>f</i> *
<i>t</i> *	<i>t</i> *	<i>p</i> *	<i>s</i> *	<i>v</i> *	<i>y</i> *	<i>r</i> *	<i>o</i> *	<i>z</i> *	<i>w</i> *	<i>u</i> *	<i>m</i> *	<i>n</i> *	<i>j</i> *	<i>k</i> *	<i>g</i> *	<i>a</i> *
<i>u</i> *	<i>u</i> *	<i>w</i> *	<i>y</i> *	<i>o</i> *	<i>s</i> *	<i>z</i> *	<i>v</i> *	<i>r</i> *	<i>p</i> *	<i>t</i> *	<i>n</i> *	<i>m</i> *	<i>k</i> *	<i>j</i> *	<i>c</i> *	<i>i</i> *
<i>v</i> *	<i>v</i> *	<i>s</i> *	<i>u</i> *	<i>z</i> *	<i>n</i> *	<i>m</i> *	<i>y</i> *	<i>t</i> *	<i>r</i> *	<i>p</i> *	<i>w</i> *	<i>o</i> *	<i>f</i> *	<i>d</i> *	<i>k</i> *	<i>l</i> *
<i>w</i> *	<i>w</i> *	<i>z</i> *	<i>m</i> *	<i>s</i> *	<i>t</i> *	<i>u</i> *	<i>r</i> *	<i>n</i> *	<i>y</i> *	<i>o</i> *	<i>v</i> *	<i>p</i> *	<i>b</i> *	<i>h</i> *	<i>l</i> *	<i>k</i> *
<i>y</i> *	<i>y</i> *	<i>n</i> *	<i>v</i> *	<i>m</i> *	<i>w</i> *	<i>o</i> *	<i>u</i> *	<i>p</i> *	<i>t</i> *	<i>r</i> *	<i>s</i> *	<i>z</i> *	<i>c</i> *	<i>a</i> *	<i>f</i> *	<i>h</i> *
<i>z</i> *	<i>z</i> *	<i>u</i> *	<i>p</i> *	<i>t</i> *	<i>o</i> *	<i>w</i> *	<i>n</i> *	<i>v</i> *	<i>m</i> *	<i>s</i> *	<i>r</i> *	<i>y</i> *	<i>i</i> *	<i>g</i> *	<i>d</i> *	<i>b</i> *

Çizelge 8'in devamı.

•	r	s	t	u	v	w	y	z	I	a*	b*	c*	d*	f*	g*	h*
e	r	s	t	u	v	w	y	z	I	a*	b*	c*	d*	f*	g*	h*
a	w	o	z	s	t	n	p	v	a*	f*	k*	d*	l*	I	h*	j*
b	u	n	w	p	s	y	t	m	b*	j*	g*	k*	a*	c*	I	i*
c	v	p	s	z	m	u	o	w	c*	b*	l*	h*	k*	j*	d*	I
d	t	m	o	v	y	s	u	n	d*	k*	c*	j*	i*	g*	l*	a*
f	n	u	v	o	z	r	m	t	f*	I	i*	l*	c*	a*	j*	g*
g	p	v	y	r	n	t	w	o	g*	d*	I	f*	j*	k*	b*	l*
h	m	t	p	w	r	z	n	u	h*	l*	a*	I	g*	i*	k*	c*
i	o	w	r	y	u	m	v	p	i*	h*	j*	b*	I	l*	f*	k*
j	z	y	u	t	p	o	s	r	l*	i*	d*	g*	b*	h*	c*	f*
k	y	z	m	n	w	v	r	s	j*	c*	f*	a*	h*	b*	i*	d*
l	s	r	n	m	o	p	z	y	k*	g*	h*	i*	f*	d*	a*	b*
m	d	h	k	l	c	i	f	b	m*	v*	r*	p*	z*	s*	w*	y*
n	b	f	l	k	g	a	h	d	n*	o*	z*	w*	r*	y*	p*	s*
o	a	i	d	f	l	j	c	g	o*	y*	t*	r*	m*	n*	s*	u*
p	c	g	h	b	j	l	a	i	p*	r*	n*	y*	u*	t*	z*	m*
r	l	e	i	g	h	f	k	j	r*	t*	w*	u*	v*	p*	m*	o*
s	e	l	c	a	b	d	j	k	s*	m*	o*	n*	p*	v*	t*	w*
t	h	d	e	j	a	g	b	f	u*	w*	y*	o*	s*	z*	v*	r*
u	f	b	j	e	i	c	d	h	t*	p*	s*	v*	y*	r*	o*	z*
v	g	c	f	d	e	k	i	a	w*	z*	m*	s*	t*	u*	r*	n*
w	i	a	b	h	k	e	g	c	v*	s*	u*	z*	n*	m*	y*	t*
y	j	k	g	i	d	b	e	l	y*	n*	v*	m*	w*	o*	u*	p*
z	k	j	a	c	f	h	l	e	z*	u*	p*	t*	o*	w*	n*	v*
I	r*	s*	u*	t*	w*	v*	y*	z*	e	a	b	c	d	f	g	h
a*	v*	o*	z*	s*	u*	n*	p*	w*	a	f	l	d	j	e	h	k
b*	t*	n*	v*	p*	s*	y*	u*	m*	b	k	g	l	a	c	e	i
c*	w*	p*	s*	z*	m*	t*	o*	v*	c	b	j	h	l	k	d	e
d*	u*	m*	o*	w*	y*	s*	t*	n*	d	l	c	k	i	g	j	a
f*	n*	t*	w*	o*	z*	r*	m*	u*	f	e	i	j	c	a	k	g
g*	p*	w*	y*	r*	n*	u*	v*	o*	g	d	e	f	k	l	b	j
h*	m*	u*	p*	v*	r*	z*	n*	t*	h	j	a	e	g	i	l	c
i*	o*	v*	r*	y*	t*	m*	w*	p*	i	h	k	b	e	j	f	l
j*	y*	z*	m*	n*	v*	w*	r*	s*	k	c	f	a	h	b	i	d
k*	s*	r*	n*	m*	o*	p*	z*	y*	l	g	h	i	f	d	a	b
l*	z*	y*	t*	u*	p*	o*	s*	r*	j	i	d	g	b	h	c	f
m*	d*	h*	j*	k*	c*	i*	f*	b*	m	w	r	p	z	s	v	y
n*	b*	f*	k*	j*	g*	a*	h*	d*	n	o	z	v	r	y	p	s
o*	a*	i*	d*	f*	k*	l*	c*	g*	o	y	u	r	m	n	s	t
p*	c*	g*	h*	b*	l*	k*	a*	i*	p	r	n	y	t	u	z	m
r*	k*	I	i*	g*	h*	f*	j*	l*	r	u	v	t	w	p	m	o
s*	I	k*	c*	a*	b*	d*	l*	j*	s	m	o	n	p	w	u	v
t*	f*	b*	l*	I	i*	c*	d*	h*	u	p	s	w	y	r	o	z
u*	h*	d*	I	l*	a*	g*	b*	f*	t	v	y	o	s	z	w	r
v*	i*	a*	b*	h*	j*	I	g*	c*	w	s	t	z	n	m	y	u
w*	g*	c*	f*	d*	I	j*	i*	a*	v	z	m	s	u	t	r	n
y*	l*	j*	g*	i*	d*	b*	I	k*	y	n	w	m	v	o	t	p
z*	j*	l*	a*	c*	f*	h*	k*	I	z	l	p	u	o	v	n	w

Çizelge 8'in devamı.

•	<i>i</i> *	<i>j</i> *	<i>k</i> *	<i>l</i> *	<i>m</i> *	<i>n</i> *	<i>o</i> *	<i>p</i> *	<i>r</i> *	<i>s</i> *	<i>t</i> *	<i>u</i> *	<i>v</i> *	<i>w</i> *	<i>y</i> *	<i>z</i> *
<i>e</i>	<i>i</i> *	<i>j</i> *	<i>k</i> *	<i>l</i> *	<i>m</i> *	<i>n</i> *	<i>o</i> *	<i>p</i> *	<i>r</i> *	<i>s</i> *	<i>t</i> *	<i>u</i> *	<i>v</i> *	<i>w</i> *	<i>y</i> *	<i>z</i> *
<i>a</i>	<i>b</i> *	<i>g</i> *	<i>i</i> *	<i>c</i> *	<i>y</i> *	<i>r</i> *	<i>t</i> *	<i>m</i> *	<i>v</i> *	<i>o</i> *	<i>s</i> *	<i>z</i> *	<i>n</i> *	<i>u</i> *	<i>p</i> *	<i>w</i> *
<i>b</i>	<i>l</i> *	<i>d</i> *	<i>f</i> *	<i>h</i> *	<i>o</i> *	<i>w</i> *	<i>z</i> *	<i>r</i> *	<i>t</i> *	<i>n</i> *	<i>p</i> *	<i>v</i> *	<i>y</i> *	<i>s</i> *	<i>u</i> *	<i>m</i> *
<i>c</i>	<i>f</i> *	<i>i</i> *	<i>g</i> *	<i>a</i> *	<i>r</i> *	<i>y</i> *	<i>n</i> *	<i>u</i> *	<i>w</i> *	<i>p</i> *	<i>z</i> *	<i>s</i> *	<i>t</i> *	<i>m</i> *	<i>o</i> *	<i>v</i> *
<i>d</i>	<i>I</i>	<i>b</i> *	<i>h</i> *	<i>f</i> *	<i>v</i> *	<i>p</i> *	<i>r</i> *	<i>z</i> *	<i>u</i> *	<i>m</i> *	<i>w</i> *	<i>o</i> *	<i>s</i> *	<i>y</i> *	<i>t</i> *	<i>n</i> *
<i>f</i>	<i>k</i> *	<i>h</i> *	<i>b</i> *	<i>d</i> *	<i>p</i> *	<i>v</i> *	<i>s</i> *	<i>y</i> *	<i>n</i> *	<i>t</i> *	<i>o</i> *	<i>w</i> *	<i>r</i> *	<i>z</i> *	<i>m</i> *	<i>u</i> *
<i>g</i>	<i>h</i> *	<i>a</i> *	<i>c</i> *	<i>i</i> *	<i>z</i> *	<i>s</i> *	<i>m</i> *	<i>t</i> *	<i>p</i> *	<i>w</i> *	<i>r</i> *	<i>y</i> *	<i>u</i> *	<i>n</i> *	<i>v</i> *	<i>o</i> *
<i>h</i>	<i>j</i> *	<i>f</i> *	<i>d</i> *	<i>b</i> *	<i>w</i> *	<i>o</i> *	<i>y</i> *	<i>s</i> *	<i>m</i> *	<i>u</i> *	<i>v</i> *	<i>p</i> *	<i>z</i> *	<i>r</i> *	<i>n</i> *	<i>t</i> *
<i>i</i>	<i>d</i> *	<i>c</i> *	<i>a</i> *	<i>g</i> *	<i>s</i> *	<i>z</i> *	<i>u</i> *	<i>n</i> *	<i>o</i> *	<i>v</i> *	<i>y</i> *	<i>r</i> *	<i>m</i> *	<i>t</i> *	<i>w</i> *	<i>p</i> *
<i>j</i>	<i>a</i> *	<i>k</i> *	<i>j</i> *	<i>I</i>	<i>n</i> *	<i>m</i> *	<i>v</i> *	<i>w</i> *	<i>z</i> *	<i>y</i> *	<i>u</i> *	<i>t</i> *	<i>o</i> *	<i>p</i> *	<i>s</i> *	<i>r</i> *
<i>k</i>	<i>g</i> *	<i>I</i>	<i>l</i> *	<i>k</i> *	<i>u</i> *	<i>t</i> *	<i>p</i> *	<i>o</i> *	<i>y</i> *	<i>z</i> *	<i>n</i> *	<i>m</i> *	<i>w</i> *	<i>v</i> *	<i>r</i> *	<i>s</i> *
<i>l</i>	<i>c</i> *	<i>l</i> *	<i>I</i>	<i>j</i> *	<i>t</i> *	<i>u</i> *	<i>w</i> *	<i>v</i> *	<i>s</i> *	<i>r</i> *	<i>m</i> *	<i>n</i> *	<i>p</i> *	<i>o</i> *	<i>z</i> *	<i>y</i> *
<i>m</i>	<i>o</i> *	<i>t</i> *	<i>u</i> *	<i>n</i> *	<i>l</i> *	<i>I</i>	<i>a</i> *	<i>g</i> *	<i>d</i> *	<i>h</i> *	<i>k</i> *	<i>j</i> *	<i>i</i> *	<i>c</i> *	<i>f</i> *	<i>b</i> *
<i>n</i>	<i>v</i> *	<i>u</i> *	<i>t</i> *	<i>m</i> *	<i>I</i>	<i>l</i> *	<i>i</i> *	<i>c</i> *	<i>b</i> *	<i>f</i> *	<i>j</i> *	<i>k</i> *	<i>a</i> *	<i>g</i> *	<i>h</i> *	<i>d</i> *
<i>o</i>	<i>z</i> *	<i>p</i> *	<i>v</i> *	<i>w</i> *	<i>h</i> *	<i>b</i> *	<i>j</i> *	<i>I</i>	<i>a</i> *	<i>i</i> *	<i>f</i> *	<i>d</i> *	<i>l</i> *	<i>k</i> *	<i>c</i> *	<i>g</i> *
<i>p</i>	<i>s</i> *	<i>o</i> *	<i>w</i> *	<i>v</i> *	<i>d</i> *	<i>f</i> *	<i>I</i>	<i>j</i> *	<i>c</i> *	<i>g</i> *	<i>b</i> *	<i>h</i> *	<i>k</i> *	<i>l</i> *	<i>a</i> *	<i>i</i> *
<i>r</i>	<i>n</i> *	<i>z</i> *	<i>s</i> *	<i>y</i> *	<i>a</i> *	<i>c</i> *	<i>b</i> *	<i>d</i> *	<i>k</i> *	<i>I</i>	<i>g</i> *	<i>i</i> *	<i>f</i> *	<i>h</i> *	<i>j</i> *	<i>l</i> *
<i>s</i>	<i>u</i> *	<i>y</i> *	<i>r</i> *	<i>z</i> *	<i>g</i> *	<i>i</i> *	<i>h</i> *	<i>f</i> *	<i>I</i>	<i>k</i> *	<i>a</i> *	<i>c</i> *	<i>d</i> *	<i>b</i> *	<i>l</i> *	<i>j</i> *
<i>t</i>	<i>p</i> *	<i>n</i> *	<i>m</i> *	<i>t</i> *	<i>k</i> *	<i>j</i> *	<i>c</i> *	<i>i</i> *	<i>h</i> *	<i>d</i> *	<i>l</i> *	<i>I</i>	<i>g</i> *	<i>a</i> *	<i>b</i> *	<i>f</i> *
<i>u</i>	<i>w</i> *	<i>m</i> *	<i>n</i> *	<i>u</i> *	<i>j</i> *	<i>k</i> *	<i>g</i> *	<i>a</i> *	<i>f</i> *	<i>b</i> *	<i>I</i>	<i>l</i> *	<i>c</i> *	<i>i</i> *	<i>d</i> *	<i>h</i> *
<i>v</i>	<i>y</i> *	<i>v</i> *	<i>p</i> *	<i>o</i> *	<i>b</i> *	<i>h</i> *	<i>l</i> *	<i>k</i> *	<i>g</i> *	<i>c</i> *	<i>d</i> *	<i>f</i> *	<i>j</i> *	<i>I</i>	<i>i</i> *	<i>a</i> *
<i>w</i>	<i>r</i> *	<i>w</i> *	<i>o</i> *	<i>p</i> *	<i>f</i> *	<i>d</i> *	<i>k</i> *	<i>l</i> *	<i>i</i> *	<i>a</i> *	<i>h</i> *	<i>b</i> *	<i>I</i>	<i>j</i> *	<i>g</i> *	<i>c</i> *
<i>y</i>	<i>t</i> *	<i>s</i> *	<i>z</i> *	<i>r</i> *	<i>c</i> *	<i>a</i> *	<i>f</i> *	<i>h</i> *	<i>l</i> *	<i>j</i> *	<i>i</i> *	<i>g</i> *	<i>b</i> *	<i>d</i> *	<i>I</i>	<i>k</i> *
<i>z</i>	<i>m</i> *	<i>r</i> *	<i>y</i> *	<i>s</i> *	<i>i</i> *	<i>g</i> *	<i>d</i> *	<i>b</i> *	<i>j</i> *	<i>l</i> *	<i>c</i> *	<i>a</i> *	<i>h</i> *	<i>f</i> *	<i>k</i> *	<i>I</i>
<i>I</i>	<i>i</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>j</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>u</i>	<i>t</i>	<i>w</i>	<i>v</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>a</i> *	<i>b</i>	<i>g</i>	<i>i</i>	<i>c</i>	<i>y</i>	<i>r</i>	<i>u</i>	<i>m</i>	<i>w</i>	<i>o</i>	<i>s</i>	<i>z</i>	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>v</i>
<i>b</i> *	<i>j</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	<i>o</i>	<i>v</i>	<i>z</i>	<i>r</i>	<i>u</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	<i>w</i>	<i>y</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>m</i>
<i>c</i> *	<i>f</i>	<i>i</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>r</i>	<i>y</i>	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>v</i>	<i>p</i>	<i>z</i>	<i>s</i>	<i>u</i>	<i>m</i>	<i>o</i>	<i>w</i>
<i>d</i> *	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>r</i>	<i>z</i>	<i>t</i>	<i>m</i>	<i>v</i>	<i>o</i>	<i>s</i>	<i>y</i>	<i>u</i>	<i>n</i>
<i>f</i> *	<i>l</i>	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>p</i>	<i>w</i>	<i>s</i>	<i>y</i>	<i>n</i>	<i>u</i>	<i>o</i>	<i>v</i>	<i>r</i>	<i>z</i>	<i>m</i>	<i>t</i>
<i>g</i> *	<i>h</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>i</i>	<i>z</i>	<i>s</i>	<i>m</i>	<i>u</i>	<i>p</i>	<i>v</i>	<i>r</i>	<i>y</i>	<i>t</i>	<i>n</i>	<i>w</i>	<i>o</i>
<i>h</i> *	<i>k</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>v</i>	<i>o</i>	<i>y</i>	<i>s</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>z</i>	<i>r</i>	<i>n</i>	<i>u</i>
<i>i</i> *	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>g</i>	<i>s</i>	<i>z</i>	<i>t</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>w</i>	<i>y</i>	<i>r</i>	<i>m</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>p</i>
<i>j</i> *	<i>g</i>	<i>e</i>	<i>j</i>	<i>l</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>p</i>	<i>o</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>r</i>	<i>s</i>
<i>k</i> *	<i>c</i>	<i>j</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>u</i>	<i>t</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>s</i>	<i>r</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	<i>o</i>	<i>z</i>	<i>y</i>
<i>l</i> *	<i>a</i>	<i>l</i>	<i>k</i>	<i>e</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>w</i>	<i>v</i>	<i>z</i>	<i>y</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>s</i>	<i>r</i>
<i>m</i> *	<i>o</i>	<i>u</i>	<i>t</i>	<i>n</i>	<i>j</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>h</i>	<i>l</i>	<i>k</i>	<i>i</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>b</i>
<i>n</i> *	<i>w</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>m</i>	<i>e</i>	<i>j</i>	<i>i</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>a</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>d</i>
<i>o</i> *	<i>z</i>	<i>p</i>	<i>w</i>	<i>v</i>	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>k</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>i</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>j</i>	<i>l</i>	<i>c</i>	<i>g</i>
<i>p</i> *	<i>s</i>	<i>o</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>g</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>l</i>	<i>j</i>	<i>a</i>	<i>i</i>
<i>r</i> *	<i>n</i>	<i>z</i>	<i>s</i>	<i>y</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>i</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>j</i>
<i>s</i> *	<i>t</i>	<i>y</i>	<i>r</i>	<i>z</i>	<i>g</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>t</i> *	<i>v</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>t</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>j</i>	<i>c</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>h</i>
<i>u</i> *	<i>p</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>u</i>	<i>l</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>d</i>	<i>j</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>f</i>
<i>v</i> *	<i>r</i>	<i>v</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>l</i>	<i>j</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>g</i>	<i>c</i>
<i>w</i> *	<i>y</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>o</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>j</i>	<i>l</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>k</i>	<i>e</i>	<i>i</i>	<i>a</i>
<i>y</i> *	<i>u</i>	<i>s</i>	<i>z</i>	<i>r</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>i</i>	<i>g</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>l</i>
<i>z</i> *	<i>m</i>	<i>r</i>	<i>y</i>	<i>s</i>	<i>i</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>l</i>	<i>e</i>

9.3.1 O_h nokta grubu için grup aksiyomları

Çizelge 8'i kullanarak O_h nokta grubunun aşağıdaki aksiyomları sağlayıp sağlamadığını inceleyebiliriz.

9.3.1.1. O_h nokta grubu için kapalılık aksiyomu

$$f \bullet r^* = n^* \text{ ve } n^* \in \mathcal{X}$$

$$z^* \bullet k^* = y \text{ ve } y \in \mathcal{X}$$

$$o^* \bullet m = h^* \text{ ve } h^* \in \mathcal{X}$$

O_h nokta grubu kapalılık özelliğini sağlar.

9.3.1.2. O_h nokta grubu için birleşme aksiyomu

$$a \bullet (y \bullet s) = (a \bullet y) \bullet s$$

$$a \bullet k = p \bullet s$$

$$g = g$$

$$d^* \bullet (l^* \bullet b^*) = (d^* \bullet l^*) \bullet b^*$$

$$d^* \bullet d = f \bullet b^*$$

$$i^* = i^*$$

O_h nokta grubu birleşme özelliğini sağlar.

9.3.1.3. O_h nokta grubu için birim eleman aksiyomu

$$“e”$$

O_h nokta grubu birim eleman özelliğini sağlar.

9.3.1.4. O_h nokta grubu için ters eleman

$$e^{-1} = e \quad a^{-1} = f \quad b^{-1} = g \quad c^{-1} = h \quad d^{-1} = i \quad f^{-1} = a \quad g^{-1} = b \quad h^{-1} = c$$

$$i^{-1} = d \quad j^{-1} = j \quad k^{-1} = k \quad l^{-1} = l \quad m^{-1} = n \quad n^{-1} = m \quad o^{-1} = p \quad p^{-1} = o$$

$$\begin{aligned}
r^1 &= s & s^1 &= r & t^1 &= t & u^1 &= u & v^1 &= v & w^1 &= w & y^1 &= y & z^1 &= z \\
I^1 &= I & a^{*-1} &= f^* & b^{*-1} &= g^* & c^{*-1} &= h^* & d^{*-1} &= i^* & f^{*-1} &= a^* & g^{*-1} &= b^* & h^{*-1} &= c^* \\
i^{*-1} &= d^* & j^{*-1} &= j^* & k^{*-1} &= k^* & l^{*-1} &= l^* & m^{*-1} &= n^* & n^{*-1} &= m^* & o^{*-1} &= p^* & p^{*-1} &= o^* \\
r^{*-1} &= s^* & s^{*-1} &= r^* & t^{*-1} &= t^* & u^{*-1} &= u^* & v^{*-1} &= v^* & w^{*-1} &= w^* & y^{*-1} &= y^* & z^{*-1} &= z^*
\end{aligned}$$

Bu 4 aksiyomu (kapalılık, birleşme, birim eleman, ters eleman) sağladığı için O_h bir simetri grubudur.

9.3.1.5. O_h nokta grubu için değişme özelliği

$$\begin{aligned}
a \bullet z &= z \bullet a \\
v &\neq t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m^* \bullet w^* &= w^* \bullet m^* \\
c &\neq b
\end{aligned}$$

olduğundan değişme özelliğini sağlamadığı için O_h nokta grubu Abelian grup değildir.

9.4. O_h Nokta Grubunun Sınıfları

$$O_h = \{ e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, r, s, t, u, v, w, y, z, I, a^*, b^*, c^*, d^*, f^*, g^*, h^*, i^*, j^*, k^*, l^*, m^*, n^*, o^*, p^*, r^*, s^*, t^*, u^*, v^*, y^*, z^* \}$$

Seti göz önüne alındığında ve 7.13 teki bilgiler aracılığı ile O_h nokta grubunun sınıflarını bulabiliriz. Örnek olması adına “a” simetri elemanının eşlenikleri bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
e \bullet a &= e^1 = e & a \bullet e &= a & e \bullet e &= a \\
a \bullet a &= a^{-1} = a & a \bullet f &= f & f \bullet f &= a \\
b \bullet a &= b^{-1} = b & a \bullet g &= k & g \bullet g &= i \\
c \bullet a &= c^{-1} = c & a \bullet h &= b & h \bullet h &= i \\
d \bullet a &= d^{-1} = d & a \bullet i &= l & i \bullet i &= c \\
f \bullet a &= f^{-1} = f & a \bullet a &= e & a \bullet a &= a \\
g \bullet a &= g^{-1} = g & a \bullet b &= d & b \bullet b &= c \\
h \bullet a &= h^{-1} = h & a \bullet c &= j & c \bullet c &= g \\
i \bullet a &= i^{-1} = i & a \bullet d &= h & d \bullet d &= g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j \bullet a \bullet j^1 &= j \bullet a \bullet j = i \bullet j = g \\
\mathcal{k} \bullet a \bullet \mathcal{k}^1 &= \mathcal{k} \bullet a \bullet \mathcal{k} = c \bullet \mathcal{k} = i \\
\ell \bullet a \bullet \ell^1 &= \ell \bullet a \bullet g = g \bullet \ell = c \\
m \bullet a \bullet m^1 &= m \bullet a \bullet n = w \bullet n = d \\
n \bullet a \bullet n^1 &= n \bullet a \bullet m = o \bullet m = h \\
o \bullet a \bullet o^1 &= o \bullet a \bullet p = y \bullet p = h \\
p \bullet a \bullet p^1 &= p \bullet a \bullet o = r \bullet o = b \\
r \bullet a \bullet r^1 &= r \bullet a \bullet s = u \bullet s = b \\
s \bullet a \bullet s^1 &= s \bullet a \bullet r = m \bullet r = d \\
t \bullet a \bullet t^1 &= t \bullet a \bullet t = v \bullet t = f \\
u \bullet a \bullet u^1 &= u \bullet a \bullet u = p \bullet u = b \\
v \bullet a \bullet v^1 &= v \bullet a \bullet v = z \bullet v = f \\
w \bullet a \bullet w^1 &= w \bullet a \bullet w = s \bullet w = d \\
y \bullet a \bullet y^1 &= y \bullet a \bullet y = n \bullet y = h \\
z \bullet a \bullet z^1 &= z \bullet a \bullet z = t \bullet z = f \\
I \bullet a \bullet I^1 &= I \bullet a \bullet I = a^* \bullet I = a \\
a^* \bullet a \bullet a^{*-1} &= a^* \bullet a \bullet f^* = f^* \bullet f^* = a \\
b^* \bullet a \bullet b^{*-1} &= b^* \bullet a \bullet g^* = j^* \bullet g^* = i \\
c^* \bullet a \bullet c^{*-1} &= c^* \bullet a \bullet h^* = b^* \bullet h^* = i \\
d^* \bullet a \bullet d^{*-1} &= d^* \bullet a \bullet i^* = \mathcal{k}^* \bullet i^* = c \\
f^* \bullet a \bullet f^{*-1} &= f^* \bullet a \bullet a^* = I \bullet a^* = a \\
g^* \bullet a \bullet g^{*-1} &= g^* \bullet a \bullet b^* = d^* \bullet b^* = c \\
h^* \bullet a \bullet h^{*-1} &= h^* \bullet a \bullet c^* = \ell^* \bullet c^* = g \\
i^* \bullet a \bullet i^{*-1} &= i^* \bullet a \bullet d^* = h^* \bullet d^* = g \\
j^* \bullet a \bullet j^{*-1} &= j^* \bullet a \bullet j^* = c^* \bullet j^* = i \\
\mathcal{k}^* \bullet a \bullet \mathcal{k}^{*-1} &= \mathcal{k}^* \bullet a \bullet \mathcal{k}^* = g^* \bullet \mathcal{k}^* = c \\
\ell^* \bullet a \bullet \ell^{*-1} &= \ell^* \bullet a \bullet \ell^* = i^* \bullet \ell^* = g \\
m^* \bullet a \bullet m^{*-1} &= m^* \bullet a \bullet n^* = v^* \bullet n^* = d \\
n^* \bullet a \bullet n^{*-1} &= n^* \bullet a \bullet m^* = o^* \bullet m^* = h \\
o^* \bullet a \bullet o^{*-1} &= o^* \bullet a \bullet p^* = y^* \bullet p^* = h \\
p^* \bullet a \bullet p^{*-1} &= p^* \bullet a \bullet o^* = r^* \bullet o^* = b \\
r^* \bullet a \bullet r^{*-1} &= r^* \bullet a \bullet s^* = t^* \bullet s^* = b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^* \bullet a \bullet s^{*-1} &= s^* \bullet a \bullet r^* = m^* \bullet r^* = d \\
t^* \bullet a \bullet t^{*-1} &= t^* \bullet a \bullet t^* = p^* \bullet t^* = b \\
u^* \bullet a \bullet u^{*-1} &= u^* \bullet a \bullet u^* = w^* \bullet u^* = f \\
v^* \bullet a \bullet v^{*-1} &= v^* \bullet a \bullet v^* = s^* \bullet v^* = d \\
w^* \bullet a \bullet w^{*-1} &= w^* \bullet a \bullet w^* = z^* \bullet w^* = f \\
y^* \bullet a \bullet y^{*-1} &= y^* \bullet a \bullet y^* = n^* \bullet y^* = h \\
z^* \bullet a \bullet z^{*-1} &= z^* \bullet a \bullet z^* = u^* \bullet z^* = f
\end{aligned}$$

işlemler sonucunda “ a, b, c, d, f, g, h, i ” simetri elemanlarının “ a ” simetri elemanının eşlenikleri olduğu görülmektedir. “ a ” simetri elemanın eşleniği olan “ a, b, c, d, f, g, h, i ” simetri elemanlarının oluşturduğu sete de O_h nokta grubunun bir sınıfı denir.

Yukarıdaki işlemler X setinin bütün elemanlarına tek tek uygulansa yani O_h nokta grubunun 48 elemanının her birinin ayrı ayrı eşlenikleri bulunduğu, O_h nokta grubunun 10 tane sınıfı olduğu görülür. O_h nokta grubunun bu sınıfları aşağıdaki Çizelge 9. da verilmiştir.

Çizelge 9. O_h Nokta Grubunun Sınıfları

$\{e\}$	$\{I\}$
$\{k, j\}$	$\{k^*, l^*, j^*\}$
$\{m, n, o, p, r, s\}$	$\{m^*, n^*, o^*, p^*, r^*, s^*\}$
$\{t, u, v, w, y, z\}$	$\{t^*, u^*, v^*, w^*, y^*, z^*\}$
$\{a, b, c, d, f, g, h, i\}$	$\{a^*, b^*, c^*, d^*, f^*, g^*, h^*, i^*\}$

9.5. O_h Nokta Grubunun Mertebesi ve O_h Nokta Grubunun Alt Grupları

$O_h = \{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, r, s, t, u, v, w, y, z, I, a^*, b^*, c^*, d^*, f^*, g^*, h^*, i^*, j^*, k^*, l^*, m^*, n^*, o^*, p^*, r^*, s^*, t^*, u^*, v^*, y^*, z^*\}$ seti göz önüne alındığında ve 7.11. deki bilgiler ışığında O_h nokta grubun mertebesi ve Abelian Alt gruplarını bulabiliriz.

O_h nokta grubunun mertebesi $= s(O_h) = 48$ sonucuna ulaşılır. O_h nokta grubunun tüm mertebesi ise O_h setinin her bir elemanın mertebelerinin toplamıdır. Anlaşılacağı üzere X setinin toplam mertebesinin bulunması için, O_h setini oluşturan elemanların her birinin mertebesinin ayrı ayrı bulunması gerekir. Bu işlem sonucunda bulunan rakamsal değere o set elemanının mertebesi denir. Aşağıdaki işlemlerde O_h setinin her bir elemanının mertebesi bulunmuştur (Bkz. Çizelge 10). Bununla birlikte O_h nokta grubunun Abelian alt grubu (A. A. G.) da bulunmuştur. (Bkz. Çizelge 11)

- $e^1 = e$ olduğundan e 'nin mertebesi 1 dir.
A.A.G. = $\{e\}$ dir.
- $a^3 = a \cdot a \cdot a = a \cdot f = e$ olduğundan a 'nın mertebesi 3, periyodu 2dir.
A.A.G. = $\{e, a, f\}$ dir.
- $b^3 = b \cdot b \cdot b = b \cdot g = e$ olduğundan b 'nin mertebesi 3 tür, periyodu 2 dir
A.A.G. = $\{e, b, g\}$ dir.
- $c^3 = c \cdot c \cdot c = c \cdot h = e$ olduğundan c 'nin mertebesi 3 tür, periyodu 2 dir.
A.A.G. = $\{e, c, h\}$ dir.
- $d^3 = d \cdot d \cdot d = d \cdot i = e$ olduğundan d 'nin mertebesi 3 tür, periyodu 2 dir.
A.A.G. = $\{e, i, d\}$ dir.
- $f^3 = f \cdot f \cdot f = f \cdot a = e$ olduğundan f 'nin mertebesi 3 tür, periyodu 2 dir.
A.A.G. = $\{e, a, f\}$ dir.
- $g^3 = g \cdot g \cdot g = g \cdot b = e$ olduğundan g 'nin mertebesi 3 tür, periyodu 2 dir.
A.A.G. = $\{e, b, g\}$ dir.
- $h^3 = h \cdot h \cdot h = h \cdot c = e$ olduğundan h 'nin mertebesi 3 tür, periyodu 2 dir.
A.A.G. = $\{e, c, h\}$ dir.
- $i^3 = i \cdot i \cdot i = i \cdot d = e$ olduğundan i 'nin mertebesi 3 tür, periyodu 2 dir

A.A.G. = $\{e, d, i\}$ dir.

- $j^2 = j \bullet j = e$ olduğundan j 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, j\}$ dir.

- $k^2 = k \bullet k = e$ olduğundan k 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, k\}$ dir.

- $\ell^2 = \ell \bullet \ell = e$ olduğundan ℓ 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, \ell\}$ dir.

- $m^4 = m \bullet m \bullet m \bullet m = m \bullet m \bullet j = m \bullet n = e$ olduğundan m 'nin mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{e, n, j, m\}$ dir.

- $n^4 = n \bullet n \bullet n \bullet n = n \bullet n \bullet j = n \bullet m = e$ olduğundan n 'nin mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{e, m, j, n\}$ dir.

- $o^4 = o \bullet o \bullet o \bullet o = o \bullet o \bullet k = o \bullet p = e$ olduğundan o 'nun mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{e, p, k, o\}$ dir.

- $p^4 = p \bullet p \bullet p \bullet p = p \bullet p \bullet k = p \bullet o = e$ olduğundan p 'nin mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{e, o, k, p\}$ dir.

- $r^4 = r \bullet r \bullet r \bullet r = r \bullet r \bullet \ell = r \bullet s = e$ olduğundan r 'nin mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{e, s, \ell, r\}$ dir.

- $s^4 = s \bullet s \bullet s \bullet s = s \bullet s \bullet i = s \bullet r = e$ olduğundan s 'nin mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{e, r, \ell, s\}$ dir.

- $t^2 = t \bullet t = e$ olduğundan t 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, t\}$ dir.

- $u^2 = u \bullet u = e$ olduğundan u 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, u\}$ dir.

- $v^2 = v \bullet v = e$ olduğundan v 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, v\}$ dir.

- $w^2 = w \bullet w = e$ olduğundan w 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, w\}$ dir.

- $y^2 = y \bullet y = e$ olduğundan y 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, y\}$ dir.

- $z^2 = z \bullet z = e$ olduğundan z 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = {e, z} dir.

- $I^2 = I \cdot I = e$ olduğundan I 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = {e, I} dir.

- $a^{*6} = a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot a^* = a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot f = a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot I = a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot f^* = e$ olduğundan a^* 'nin mertebesi 6, periyodu 5 tir.

A.A.G. = {e, f^* , a, I, f, a^* }

- $b^{*6} = b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot b^* = b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot g = b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot I = b^* \cdot b^* \cdot b = b^* \cdot g^* = e$ olduğundan b^* 'nin mertebesi 6, periyodu 5 tir.

A.A.G. = {e, g^* , b, I, g, b^* } dir.

- $c^{*6} = c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot c^* = c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot h = c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot I = c^* \cdot c^* \cdot c = c^* \cdot h^* = e$ olduğundan c^* 'nin mertebesi 6, periyodu 5 tir.

A.A.G. = {e, h^* , c, I, h, c^* } dir.

- $d^{*6} = d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot d^* = d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot i = d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot I = d^* \cdot d^* \cdot d = d^* \cdot i^* = e$ olduğundan d^* 'nin mertebesi 6, periyodu 5 tir.

A.A.G. = {e, i^* , d, I, i, d^* } dir.

- $f^{*6} = f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot f^* = f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot a = f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot I = f^* \cdot f^* \cdot f = f^* \cdot a^* = e$ olduğundan f^* 'nin mertebesi 6, periyodu 5 tir.

A.A.G. = {e, a^* , f, I, a, f^* } dir.

- $g^{*6} = g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot g^* = g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot b = g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot I = g^* \cdot g^* \cdot g = g^* \cdot b^* = e$ olduğundan g^* 'nin mertebesi 6, periyodu 5 tir.

A.A.G. = {e, b^* , g, I, b, g^* } dir.

- $h^{*6} = h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot h^* = h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot c = h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot I = h^* \cdot h^* \cdot h = h^* \cdot c^* = e$ olduğundan h^* 'nin mertebesi 6, periyodu 5 tir.

A.A.G. = {e, c^* , h, I, c, h^* } dir.

- $i^{*6} = i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot i^* = i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot d = i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot I = i^* \cdot i^* \cdot i = i^* \cdot d^* = e$ olduğundan i^* 'nin mertebesi 6, periyodu 5 tir.

A.A.G. = {e, d^* , i, I, d, i^* } dir.

- $j^{*2} = j^* \cdot j^* = e$ olduğundan j^* 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = {e, j^* } dir.

- $k^{*2} = k^* \cdot k^* = e$ olduğundan k^* 'nin mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{ e, k^* \}$ dir.

- $l^{*2} = l^* \bullet l^* = e$ olduğundan l^* ' nün mertebesi 2, periyodu 1 dir

A.A.G. = $\{ e, l^* \}$ dir.

- $m^{*4} = m^* \bullet m^* \bullet m^* \bullet m^* = m^* \bullet m^* \bullet j = m^* \bullet n^* = e$ olduğundan m^* ' nün mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{ e, n^*, j, m^* \}$ dir.

- $n^{*4} = n^* \bullet n^* \bullet n^* \bullet n^* = n^* \bullet n^* \bullet j = n^* \bullet m^* = e$ olduğundan n^* ' nün mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{ e, m^*, j, n^* \}$ dir.

- $o^{*4} = o^* \bullet o^* \bullet o^* \bullet o^* = o^* \bullet o^* \bullet k = o^* \bullet p^* = e$ olduğundan o^* ' nün mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{ e, p^*, k, o^* \}$ dir.

- $p^{*4} = p^* \bullet p^* \bullet p^* \bullet p^* = p^* \bullet p^* \bullet k = p^* \bullet o^* = e$ olduğundan p^* ' nün mertebesi 4 tür, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{ e, o^*, k, p^* \}$ dir.

- $r^{*4} = r^* \bullet r^* \bullet r^* \bullet r^* = r^* \bullet r^* \bullet l = r^* \bullet s^* = e$ olduğundan r^* ' nün mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{ e, s^*, l, r^* \}$ dir.

- $s^{*4} = s^* \bullet s^* \bullet s^* \bullet s^* = s^* \bullet s^* \bullet l = s^* \bullet r^* = e$ olduğundan s^* ' nün mertebesi 4, periyodu 3 tür.

A.A.G. = $\{ e, r^*, l, s^* \}$ dir.

- $t^{*2} = t^* \bullet t^* = e$ olduğundan t^* ' nün mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{ e, t^* \}$ dir.

- $u^{*2} = u^* \bullet u^* = e$ olduğundan u^* ' nün mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{ e, u^* \}$ dir.

- $v^{*2} = v^* \bullet v^* = e$ olduğundan v^* ' nün mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{ e, v^* \}$ dir.

- $w^{*2} = w^* \bullet w^* = e$ olduğundan w^* ' nün mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{ e, w^* \}$ dir.

- $y^{*2} = y^* \bullet y^* = e$ olduğundan y^* ' nün mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, y^*\}$ dir.

- $z^{*2} = z^* \bullet z^* = e$ olduğundan z^* ' nün mertebesi 2, periyodu 1 dir.

A.A.G. = $\{e, z^*\}$ dir.

Çizelge 10. O_h Nokta Grubunun Simetri Elemanlarının Mertebeleri

Mertebesi “ 1 ” olan	$\{e\}$
Mertebesi “ 2 ” olan	$\{j, k, l, t, u, v, w, y, z, I, j^*, k^*, l^*, t^*, u^*, v^*, w^*, y^*, z^*\}$
Mertebesi “ 3 ” olan	$\{a, b, c, d, f, g, h, i\}$
Mertebesi “ 4 ” olan	$\{n, m, o, p, r, s, m^*, n^*, o^*, p^*, r^*, s^*\}$
Mertebesi “ 6 ” olan	$\{a^*, b^*, c^*, d^*, f^*, g^*, h^*, i^*\}$

Yukarıda X setinin her bir elemanının mertebesi bulunmuştur. Ayrıca O_h nokta grubunun 34 tane de ableian alt grubu da bu işlemler sırasında tespit edilmiştir. Bulunan 34 tane abelian alt grup Çizelge 11. de görülmektedir.

Çizelge 11. O_h Nokta Grubunun Abelian Alt Grupları

$\{e\}$	$\{e, j\}$	$\{e, k\}$	$\{e, l\}$	$\{e, t\}$
$\{e, u\}$	$\{e, v\}$	$\{e, w\}$	$\{e, y\}$	$\{e, z\}$
$\{e, I\}$	$\{e, j^*\}$	$\{e, k^*\}$	$\{e, l^*\}$	$\{e, t^*\}$
$\{e, u^*\}$	$\{e, v^*\}$	$\{e, w^*\}$	$\{e, y^*\}$	$\{e, z^*\}$
$\{e, a, f\}$	$\{e, b, g\}$	$\{e, c, h\}$	$\{e, d, i\}$	$\{e, j, m, n\}$
$\{e, k, o, p\}$	$\{e, l, r, s\}$	$\{e, j, m^*, n^*\}$	$\{e, k, o^*, p^*\}$	$\{e, l, r^*, s^*\}$
$\{e, I, a, a^*, f, f^*\}$	$\{e, I, b, b^*, g, g^*\}$	$\{e, I, c, c^*, h, h^*\}$	$\{e, I, d, d^*, i, i^*\}$	

Grup teorisinde, verilen sonlu bir grup için alt grupların sayısını bize verecek herhangi bir teorem yoktur. Ancak, bir veya daha fazla elemente bazı yöntemler uygulayarak bazı alt gruplar oluşturabiliriz. Örneğin bu yöntemi “ e, a ve b ” elementlerine uygulayarak bir alt grup oluşturabiliriz. $\{e, a, b\}$ setini örnek olarak ele alalım. Görüyoruz ki bu set bir alt grup değildir çünkü a ve b elementlerinin tersi sette yoktur. Öyleyse bu sete a ve b nin tersi olan f ve g elementlerini dâhil edebiliriz. Yeni bir $\{e, a, b, f, g\}$ setine sahip oluruz. Bu yeni set bir alt grup olmayacaktır çünkü mertebesi O_h grubunun mertebesinin bir böleni değildir. Görüldüğü üzere O_h grubun mertebesi 48 yeni setimizin mertebesi 5 tir. Bu setimizin bir alt grup oluşturabilmesi için grup

aksiyomlarından kapalılık aksiyomunu sağlamak zorundadır. O zaman set elemanlarını, her bir set elemanı üzerine bir ikili işlem oluşturacak şekilde dağıtalım: $\{(e \bullet e), (e \bullet a), (e \bullet b), (e \bullet f), (e \bullet g), (a \bullet e), (a \bullet a), (a \bullet b), (a \bullet f), (a \bullet g), (b \bullet e), (b \bullet a), (b \bullet b), (b \bullet f), (b \bullet g), (f \bullet e), (f \bullet a), (f \bullet b), (f \bullet f), (f \bullet g), (g \bullet e), (g \bullet a), (g \bullet b), (g \bullet f), (g \bullet g)\} = \{e, a, b, c, d, f, g, h, i, k, l\}$ sonucuna ulaşılır. Bu son durumda “c, d, h, i, k, l” elementlerinin de sete dahil olduğu görülür. Ne var ki son setimizin mertebesi 11 dir. Yani O_h grubunun mertebesinin bir böleni değildir. Bu nedenle $\{e, a, b, c, d, f, g, h, i, k, l\}$ setinin her bir elemanı her bir elemanı üzerine tekrar ikili işlemler oluşturacak şekilde dağıtıldığında, yine kapalılık aksiyomunu sağlaması nedeniyle “j” elemanının da sete dâhil olduğu görülür. Son durumda mertebesi 12 olan $\{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l\}$ seti elde edilir. Bu setin mertebesinin O_h grubunun mertebesinin bir böleni olması dolayısıyla; $\{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l\}$ seti O_h grubunun bir alt grubudur.

Yukarıdaki metodu $\{e, a, z^*\}, \{e, b^*, y^*\}, \{e, c^*, v^*\}, \{e, d^*, w^*\}, \{e, a, m\}, \{e, a, a^*\}$ ve $\{e, a, m^*\}$ elementler setine uygulayarak O_h ın bazı alt gruplarını aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

$$\begin{aligned} &\{e, a, f, t, v, z, I, a^*, f^*, u^*, w^*, z^*\} \\ &\{e, b, g, t, w, y, I, b^*, g^*, u^*, v^*, y^*\} \\ &\{e, c, h, u, w, z, I, c^*, h^*, t^*, v^*, z^*\} \\ &\{e, d, i, u, v, y, I, d^*, i^*, t^*, w^*, y^*\} \\ &\{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, r, s, t, u, v, w, y, z\} \\ &\{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, m^*, n^*, o^*, p^*, r^*, s^*, t^*, u^*, v^*, w^*, y^*, z^*\} \\ &\{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, I, a^*, b^*, c^*, d^*, f^*, g^*, h^*, i^*, j^*, k^*, l^*\} \end{aligned}$$

Nokta grubunun alt gruplarının tespiti bizim üzerinde çalıştığımız nokta grup hakkında kısa bir zamanda bilgi edinmemizi sağlar. Birim hücre tanımından hatırlanacağı üzere; birim hücreyi bilmek, milyon sayıdaki birim hücreden oluşan kristal hakkında daha çabuk bilgi edinmemizi sağlar. Alt gruplarda aynı mantıkla çalışır ve işimizi oldukça kolaylaştırır.

9.6. O_h Nokta Grubunun Kosetleri

Çizelge 11’de O_h nokta grubunun Abelian alt gruplarını göstermiştik ve 7.12. de koset kavramını izah etmiştik. Bu bilinenler ışığında O_h nokta grubunun Tüm kosetlerini bulabiliriz.

Kosetin nasıl bulunacağını göstermek adına, O_h nokta grubun abelian alt gruplarından rastgele seçilen herhangi iki alt grubun sağ ve sol kosetleri aşağıda açık bir şekilde gösterilmiştir.

(e, ℓ, r, s) Abelian alt grubunun sağ kosetleri

$$\begin{aligned}
(e, \ell, r, s) \bullet e &= ((e \bullet e), (\ell \bullet e), (r \bullet e), (s \bullet e)) = (e, \ell, r, s) \\
(e, \ell, r, s) \bullet a &= ((e \bullet a), (\ell \bullet a), (r \bullet a), (s \bullet a)) = (a, g, u, m) \\
(e, \ell, r, s) \bullet b &= ((e \bullet b), (\ell \bullet b), (r \bullet b), (s \bullet b)) = (b, h, v, o) \\
(e, \ell, r, s) \bullet c &= ((e \bullet c), (\ell \bullet c), (r \bullet c), (s \bullet c)) = (c, i, t, n) \\
(e, \ell, r, s) \bullet d &= ((e \bullet d), (\ell \bullet d), (r \bullet d), (s \bullet d)) = (d, f, w, p) \\
(e, \ell, r, s) \bullet f &= ((e \bullet f), (\ell \bullet f), (r \bullet f), (s \bullet f)) = (f, d, p, w) \\
(e, \ell, r, s) \bullet g &= ((e \bullet g), (\ell \bullet g), (r \bullet g), (s \bullet g)) = (g, a, m, u) \\
(e, \ell, r, s) \bullet h &= ((e \bullet h), (\ell \bullet h), (r \bullet h), (s \bullet h)) = (h, b, o, v) \\
(e, \ell, r, s) \bullet i &= ((e \bullet i), (\ell \bullet i), (r \bullet i), (s \bullet i)) = (i, c, n, t) \\
(e, \ell, r, s) \bullet j &= ((e \bullet j), (\ell \bullet j), (r \bullet j), (s \bullet j)) = (j, k, y, z) \\
(e, \ell, r, s) \bullet k &= ((e \bullet k), (\ell \bullet k), (r \bullet k), (s \bullet k)) = (k, j, y, z) \\
(e, \ell, r, s) \bullet l &= ((e \bullet l), (\ell \bullet l), (r \bullet l), (s \bullet l)) = (l, e, s, r) \\
(e, \ell, r, s) \bullet m &= ((e \bullet m), (\ell \bullet m), (r \bullet m), (s \bullet m)) = (m, u, a, g) \\
(e, \ell, r, s) \bullet n &= ((e \bullet n), (\ell \bullet n), (r \bullet n), (s \bullet n)) = (n, t, c, i) \\
(e, \ell, r, s) \bullet o &= ((e \bullet o), (\ell \bullet o), (r \bullet o), (s \bullet o)) = (o, v, b, h) \\
(e, \ell, r, s) \bullet p &= ((e \bullet p), (\ell \bullet p), (r \bullet p), (s \bullet p)) = (p, w, d, f) \\
(e, \ell, r, s) \bullet r &= ((e \bullet r), (\ell \bullet r), (r \bullet r), (s \bullet r)) = (r, s, \ell, e) \\
(e, \ell, r, s) \bullet s &= ((e \bullet s), (\ell \bullet s), (r \bullet s), (s \bullet s)) = (s, r, e, l) \\
(e, \ell, r, s) \bullet t &= ((e \bullet t), (\ell \bullet t), (r \bullet t), (s \bullet t)) = (t, n, i, c) \\
(e, \ell, r, s) \bullet u &= ((e \bullet u), (\ell \bullet u), (r \bullet u), (s \bullet u)) = (u, m, g, a) \\
(e, \ell, r, s) \bullet v &= ((e \bullet v), (\ell \bullet v), (r \bullet v), (s \bullet v)) = (v, o, h, b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e, \ell, r, s) \bullet w &= ((e \bullet w), (\ell \bullet w), (r \bullet w), (s \bullet w)) = (w, p, f, d) \\
(e, \ell, r, s) \bullet y &= ((e \bullet y), (\ell \bullet y), (r \bullet y), (s \bullet y)) = (y, z, k, j) \\
(e, \ell, r, s) \bullet z &= ((e \bullet z), (\ell \bullet z), (r \bullet z), (s \bullet z)) = (z, y, j, k) \\
(e, \ell, r, s) \bullet I &= ((e \bullet I), (\ell \bullet I), (r \bullet I), (s \bullet I)) = (I, k^*, r^*, s^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet a^* &= ((e \bullet a^*), (\ell \bullet a^*), (r \bullet a^*), (s \bullet a^*)) = (a^*, g^*, t^*, m^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet b^* &= ((e \bullet b^*), (\ell \bullet b^*), (r \bullet b^*), (s \bullet b^*)) = (b^*, h^*, w^*, o^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet c^* &= ((e \bullet c^*), (\ell \bullet c^*), (r \bullet c^*), (s \bullet c^*)) = (c^*, i^*, u^*, n^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet d^* &= ((e \bullet d^*), (\ell \bullet d^*), (r \bullet d^*), (s \bullet d^*)) = (d^*, f^*, v^*, p^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet f^* &= ((e \bullet f^*), (\ell \bullet f^*), (r \bullet f^*), (s \bullet f^*)) = (f^*, d^*, p^*, v^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet g^* &= ((e \bullet g^*), (\ell \bullet g^*), (r \bullet g^*), (s \bullet g^*)) = (g^*, a, a^*, m^*, t^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet h^* &= ((e \bullet h^*), (\ell \bullet h^*), (r \bullet h^*), (s \bullet h^*)) = (h^*, b^*, o^*, w^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet i^* &= ((e \bullet i^*), (\ell \bullet i^*), (r \bullet i^*), (s \bullet i^*)) = (i^*, c^*, n^*, u^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet j^* &= ((e \bullet j^*), (\ell \bullet j^*), (r \bullet j^*), (s \bullet j^*)) = (j^*, \ell^*, z^*, y^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet k^* &= ((e \bullet k^*), (\ell \bullet k^*), (r \bullet k^*), (s \bullet k^*)) = (k^*, I, s^*, r^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet \ell^* &= ((e \bullet \ell^*), (\ell \bullet \ell^*), (r \bullet \ell^*), (s \bullet \ell^*)) = (\ell^*, j^*, y^*, z^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet m^* &= ((e \bullet m^*), (\ell \bullet m^*), (r \bullet m^*), (s \bullet m^*)) = (m^*, t^*, a^*, g^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet n^* &= ((e \bullet n^*), (\ell \bullet n^*), (r \bullet n^*), (s \bullet n^*)) = (n^*, u^*, c^*, i^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet o^* &= ((e \bullet o^*), (\ell \bullet o^*), (r \bullet o^*), (s \bullet o^*)) = (o^*, w^*, b^*, u^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet p^* &= ((e \bullet p^*), (\ell \bullet p^*), (r \bullet p^*), (s \bullet p^*)) = (p^*, v^*, d^*, f^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet r^* &= ((e \bullet r^*), (\ell \bullet r^*), (r \bullet r^*), (s \bullet r^*)) = (r^*, s^*, k^*, I) \\
(e, \ell, r, s) \bullet s^* &= ((e \bullet s^*), (\ell \bullet s^*), (r \bullet s^*), (s \bullet s^*)) = (s^*, r^*, I, k^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet t^* &= ((e \bullet t^*), (\ell \bullet t^*), (r \bullet t^*), (s \bullet t^*)) = (t^*, m^*, g^*, a^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet u^* &= ((e \bullet u^*), (\ell \bullet u^*), (r \bullet u^*), (s \bullet u^*)) = (u^*, n^*, i^*, c^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet v^* &= ((e \bullet v^*), (\ell \bullet v^*), (r \bullet v^*), (s \bullet v^*)) = (v^*, p^*, f^*, d^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet w^* &= ((e \bullet w^*), (\ell \bullet w^*), (r \bullet w^*), (s \bullet w^*)) = (w^*, o^*, h^*, b^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet y^* &= ((e \bullet y^*), (\ell \bullet y^*), (r \bullet y^*), (s \bullet y^*)) = (y^*, z^*, j^*, \ell^*) \\
(e, \ell, r, s) \bullet z^* &= ((e \bullet z^*), (\ell \bullet z^*), (r \bullet z^*), (s \bullet z^*)) = (z^*, y^*, \ell^*, j^*)
\end{aligned}$$

Sonuçta (e, ℓ, r, s) Abelian alt grubunun sağ kosetleri:

$$\{(e, \ell, r, s), (a, g, u, m), (b, h, v, o), (c, i, t, n), (d, f, w, p), (y, z, k, j), (I, k^*, r^*, s^*), (a^*, g^*, t^*, m^*), (b^*, h^*, w^*, o^*), (c^*, i^*, u^*, n^*), (d^*, f^*, v^*, p^*), (j^*, \ell^*, z^*, y^*)\} \text{ seti bulunur.}$$

(e, ℓ, r, s) Abelian alt grubunun sol kosetleri

$$\begin{aligned}
e \bullet (e, \ell, r, s) &= ((e \bullet e), (e \bullet \ell), (e \bullet r), (e \bullet s)) = (e, \ell, r, s) \\
a \bullet (e, \ell, r, s) &= ((a \bullet e), (a \bullet \ell), (a \bullet r), (a \bullet s)) = (a, i, w, o) \\
b \bullet (e, \ell, r, s) &= ((b \bullet e), (b \bullet \ell), (b \bullet r), (b \bullet s)) = (b, f, u, n) \\
c \bullet (e, \ell, r, s) &= ((c \bullet e), (c \bullet \ell), (c \bullet r), (c \bullet s)) = (c, g, v, p) \\
d \bullet (e, \ell, r, s) &= ((d \bullet e), (d \bullet \ell), (d \bullet r), (d \bullet s)) = (d, h, t, m) \\
f \bullet (e, \ell, r, s) &= ((f \bullet e), (f \bullet \ell), (f \bullet r), (f \bullet s)) = (f, b, n, u) \\
g \bullet (e, \ell, r, s) &= ((g \bullet e), (g \bullet \ell), (g \bullet r), (g \bullet s)) = (g, c, p, v) \\
h \bullet (e, \ell, r, s) &= ((h \bullet e), (h \bullet \ell), (h \bullet r), (h \bullet s)) = (h, d, m, t) \\
i \bullet (e, \ell, r, s) &= ((i \bullet e), (i \bullet \ell), (i \bullet r), (i \bullet s)) = (i, a, o, w) \\
j \bullet (e, \ell, r, s) &= ((j \bullet e), (j \bullet \ell), (j \bullet r), (j \bullet s)) = (j, k, z, y) \\
k \bullet (e, \ell, r, s) &= ((k \bullet e), (k \bullet \ell), (k \bullet r), (k \bullet s)) = (k, j, y, z) \\
l \bullet (e, \ell, r, s) &= ((l \bullet e), (l \bullet \ell), (l \bullet r), (l \bullet s)) = (l, e, s, r) \\
m \bullet (e, \ell, r, s) &= ((m \bullet e), (m \bullet \ell), (m \bullet r), (m \bullet s)) = (m, t, d, h) \\
n \bullet (e, \ell, r, s) &= ((n \bullet e), (n \bullet \ell), (n \bullet r), (n \bullet s)) = (n, u, b, f) \\
o \bullet (e, \ell, r, s) &= ((o \bullet e), (o \bullet \ell), (o \bullet r), (o \bullet s)) = (o, w, a, i) \\
p \bullet (e, \ell, r, s) &= ((p \bullet e), (p \bullet \ell), (p \bullet r), (p \bullet s)) = (p, v, c, g) \\
r \bullet (e, \ell, r, s) &= ((r \bullet e), (r \bullet \ell), (r \bullet r), (r \bullet s)) = (r, s, \ell, e) \\
s \bullet (e, \ell, r, s) &= ((s \bullet e), (s \bullet \ell), (s \bullet r), (s \bullet s)) = (s, r, e, \ell) \\
t \bullet (e, \ell, r, s) &= ((t \bullet e), (t \bullet \ell), (t \bullet r), (t \bullet s)) = (t, m, h, d) \\
u \bullet (e, \ell, r, s) &= ((u \bullet e), (u \bullet \ell), (u \bullet r), (u \bullet s)) = (u, n, f, b) \\
v \bullet (e, \ell, r, s) &= ((v \bullet e), (v \bullet \ell), (v \bullet r), (v \bullet s)) = (v, p, g, c) \\
w \bullet (e, \ell, r, s) &= ((w \bullet e), (w \bullet \ell), (w \bullet r), (w \bullet s)) = (w, o, i, a) \\
y \bullet (e, \ell, r, s) &= ((y \bullet e), (y \bullet \ell), (y \bullet r), (y \bullet s)) = (y, z, j, k) \\
z \bullet (e, \ell, r, s) &= ((z \bullet e), (z \bullet \ell), (z \bullet r), (z \bullet s)) = (z, y, k, j) \\
I \bullet (e, \ell, r, s) &= ((I \bullet e), (I \bullet \ell), (I \bullet r), (I \bullet s)) = (I, k^*, r^*, s^*) \\
a^* \bullet (e, \ell, r, s) &= ((a^* \bullet e), (a^* \bullet \ell), (a^* \bullet r), (a^* \bullet s)) = (a^*, i^*, v^*, o^*) \\
b^* \bullet (e, \ell, r, s) &= ((b^* \bullet e), (b^* \bullet \ell), (b^* \bullet r), (b^* \bullet s)) = (b^*, f^*, t^*, n^*) \\
c^* \bullet (e, \ell, r, s) &= ((c^* \bullet e), (c^* \bullet \ell), (c^* \bullet r), (c^* \bullet s)) = (c^*, g^*, w^*, p^*) \\
d^* \bullet (e, \ell, r, s) &= ((d^* \bullet e), (d^* \bullet \ell), (d^* \bullet r), (d^* \bullet s)) = (d^*, h^*, u^*, m^*) \\
f^* \bullet (e, \ell, r, s) &= ((f^* \bullet e), (f^* \bullet \ell), (f^* \bullet r), (f^* \bullet s)) = (f^*, b^*, n^*, t^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (g^* \bullet e, (g^* \bullet \ell), (g^* \bullet r), (g^* \bullet s)) = (g^*, c^*, p^*, w^*) \\
h^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (h^* \bullet e, (h^* \bullet \ell), (h^* \bullet r), (h^* \bullet s)) = (h^*, d^*, m^*, u^*) \\
i^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (i^* \bullet e, (i^* \bullet \ell), (i^* \bullet r), (i^* \bullet s)) = (i^*, a^*, o^*, v^*) \\
j^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (j^* \bullet e, (j^* \bullet \ell), (j^* \bullet r), (j^* \bullet s)) = (j^*, l^*, y^*, z^*) \\
k^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (k^* \bullet e, (k^* \bullet \ell), (k^* \bullet r), (k^* \bullet s)) = (k^*, I, s^*, r^*) \\
l^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (l^* \bullet e, (l^* \bullet \ell), (l^* \bullet r), (l^* \bullet s)) = (l^*, j^*, z^*, y^*) \\
m^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (m^* \bullet e, (m^* \bullet \ell), (m^* \bullet r), (m^* \bullet s)) = (m^*, u^*, d^*, h^*) \\
n^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (n^* \bullet e, (n^* \bullet \ell), (n^* \bullet r), (n^* \bullet s)) = (n^*, t^*, b^*, f^*) \\
o^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (o^* \bullet e, (o^* \bullet \ell), (o^* \bullet r), (o^* \bullet s)) = (o^*, v^*, a^*, i^*) \\
p^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (p^* \bullet e, (p^* \bullet \ell), (p^* \bullet r), (p^* \bullet s)) = (p^*, w^*, c^*, g^*) \\
r^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (r^* \bullet e, (r^* \bullet \ell), (r^* \bullet r), (r^* \bullet s)) = (r^*, s^*, k^*, I) \\
s^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (s^* \bullet e, (s^* \bullet \ell), (s^* \bullet r), (s^* \bullet s)) = (s^*, r^*, I, k^*) \\
t^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (t^* \bullet e, (t^* \bullet \ell), (t^* \bullet r), (t^* \bullet s)) = (t^*, n^*, f^*, b^*) \\
u^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (u^* \bullet e, (u^* \bullet \ell), (u^* \bullet r), (u^* \bullet s)) = (u^*, m^*, h^*, d^*) \\
v^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (v^* \bullet e, (v^* \bullet \ell), (v^* \bullet r), (v^* \bullet s)) = (v^*, o^*, i^*, a^*) \\
w^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (w^* \bullet e, (w^* \bullet \ell), (w^* \bullet r), (w^* \bullet s)) = (w^*, p^*, g^*, c^*) \\
y^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (y^* \bullet e, (y^* \bullet \ell), (y^* \bullet r), (y^* \bullet s)) = (y^*, z^*, l^*, j^*) \\
z^* \bullet (e, \ell, r, s) &= (z^* \bullet e, (z^* \bullet \ell), (z^* \bullet r), (z^* \bullet s)) = (z^*, y^*, j^*, l^*)
\end{aligned}$$

Sonuçta (e, ℓ, r, s) Abelian alt grubunun sol kosetleri:

$$\{(e, \ell, r, s), (a, i, w, o), (b, f, u, n), (c, g, v, p), (d, h, t, m), (y, z, j, k), (I, k^*, r^*, s^*), (a^*, i^*, v^*, o^*), (b^*, f^*, t^*, n^*), (c^*, g^*, w^*, p^*), (d^*, h^*, u^*, m^*), (z^*, y^*, j^*, l^*)\} \text{ seti bulunur.}$$

O_h nokta grubunun tüm Abelian alt gruplarının sağ ve kosetleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge12. O_h Nokta grubunun kosetleri.

O_h Nokta Grubunun Abelian Alt Grubu	Abelian Alt Grubun Sağ kosetleri	Abelian Alt Grubun Sol Kosetleri
(e)	$\{(e), (a), (b), (c), (d), (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l), (m), (n), (o), (p), (r), (s), (t), (u), (v), (w), (y), (z), (I), (a^*), (b^*), (c^*), (d^*), (f^*), (g^*), (h^*), (i^*), (j^*), (k^*), (l^*), (m^*), (n^*), (o^*), (p^*), (r^*), (s^*), (t^*), (u^*), (v^*), (w^*), (y^*), (z^*)\}$	$\{(e), (a), (b), (c), (d), (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l), (m), (n), (o), (p), (r), (s), (t), (u), (v), (w), (y), (z), (I), (a^*), (b^*), (c^*), (d^*), (f^*), (g^*), (h^*), (i^*), (j^*), (k^*), (l^*), (m^*), (n^*), (o^*), (p^*), (r^*), (s^*), (t^*), (u^*), (v^*), (w^*), (y^*), (z^*)\}$
(e, j)	$\{(e, j), (a, i), (b, d), (c, g), (f, h), (k, l), (m, n), (o, w), (p, v), (r, z), (s, y), (t, u), (I, l^*), (a^*, i^*), (b^*, d^*), (c^*, g^*), (f^*, h^*), (j^*, k^*), (m^*, n^*), (o^*, v^*), (p^*, w^*), (r^*, z^*), (s^*, y^*), (t^*, u^*)\}$	$\{(e, j), (a, c), (b, h), (d, f), (g, i), (k, l), (m, n), (o, v), (p, w), (r, y), (s, z), (t, u), (I, l^*), (a^*, c^*), (b^*, h^*), (d^*, f^*), (g^*, i^*), (j^*, k^*), (m^*, n^*), (o^*, w^*), (p^*, v^*), (r^*, y^*), (s^*, z^*), (t^*, u^*)\}$
(e, k)	$\{(e, k), (a, c), (b, f), (d, h), (g, i), (j, l), (m, t), (n, u), (o, p), (r, y), (s, z), (v, w), (I, j^*), (a^*, c^*), (b^*, f^*), (d^*, h^*), (g^*, i^*), (k^*, l^*), (m^*, u^*), (n^*, t^*), (o^*, p^*), (r^*, y^*), (s^*, z^*), (v^*, w^*)\}$	$\{(e, k), (a, g), (b, d), (c, i), (f, h), (j, l), (m, u), (n, t), (o, p), (r, z), (s, y), (v, w), (I, j^*), (a^*, g^*), (b^*, d^*), (c^*, i^*), (f^*, h^*), (k^*, l^*), (m^*, t^*), (n^*, u^*), (o^*, p^*), (r^*, z^*), (s^*, y^*), (v^*, w^*)\}$
(e, l)	$\{(e, l), (a, g), (b, h), (c, i), (d, f), (j, k), (m, u), (n, t), (o, v), (p, w), (r, s), (y, z), (I, k^*), (a^*, g^*), (b^*, h^*), (c^*, i^*), (d^*, f^*), (j^*, l^*), (m^*, t^*), (n^*, u^*), (o^*, v^*), (p^*, w^*), (r^*, s^*), (y^*, z^*)\}$	$\{(e, l), (a, i), (b, f), (c, g), (d, h), (j, k), (m, t), (n, u), (o, w), (p, v), (r, s), (y, z), (I, k^*), (a^*, i^*), (b^*, f^*), (c^*, g^*), (d^*, h^*), (j^*, l^*), (m^*, u^*), (n^*, t^*), (o^*, v^*), (p^*, w^*), (r^*, s^*), (y^*, z^*)\}$
(e, t)	$\{(e, t), (a, v), (b, y), (c, o), (d, s), (f, z), (g, w), (h, r), (i, p), (j, u), (k, m), (l, n), (I, u^*), (a^*, w^*), (b^*, y^*), (c^*, o^*), (d^*, s^*), (f^*, z^*), (g^*, v^*), (h^*, r^*), (i^*, p^*), (j^*, n^*), (k^*, m^*), (l^*, t^*)\}$	$\{(e, t), (a, z), (b, w), (c, s), (d, o), (f, v), (g, y), (h, p), (i, r), (j, u), (k, m), (l, n), (I, u^*), (a^*, z^*), (b^*, v^*), (c^*, s^*), (d^*, o^*), (f^*, w^*), (g^*, y^*), (h^*, p^*), (i^*, r^*), (j^*, m^*), (k^*, n^*), (l^*, t^*)\}$

Çizelge 12'nin devamı

(e, u)	$\{(e, u), (a, p), (b, s), (c, w), (d, y), (f, r), (g, o), (h, z), (i, v), (j, t), (k, m), (l, n), (I, t^*), (a^*, p^*), (b^*, s^*), (c^*, v^*), (d^*, y^*), (f^*, r^*), (g^*, o^*), (h^*, z^*), (i^*, w^*), (j^*, m^*), (k^*, n^*), (l^*, u^*)\}$	$\{(e, u), (a, s), (b, p), (c, z), (d, v), (f, o), (g, r), (h, w), (i, y), (j, t), (k, n), (l, m), (I, t^*), (a^*, s^*), (b^*, p^*), (c^*, z^*), (d^*, w^*), (f^*, o^*), (g^*, r^*), (h^*, v^*), (i^*, y^*), (j^*, n^*), (k^*, m^*), (l^*, u^*)\}$
(e, v)	$\{(e, v), (a, z), (b, m), (c, s), (d, u), (f, t), (g, r), (h, n), (i, y), (j, o), (k, w), (l, p), (I, w^*), (a^*, z^*), (b^*, m^*), (c^*, s^*), (d^*, t^*), (f^*, u^*), (g^*, r^*), (h^*, n^*), (i^*, y^*), (j^*, v^*), (k^*, p^*), (l^*, o^*)\}$	$\{(e, v), (a, t), (b, s), (c, m), (d, y), (f, z), (g, n), (h, r), (i, u), (j, p), (k, w), (l, o), (I, w^*), (a^*, u^*), (b^*, s^*), (c^*, m^*), (d^*, y^*), (f^*, z^*), (g^*, n^*), (h^*, r^*), (i^*, t^*), (j^*, v^*), (k^*, o^*), (l^*, p^*)\}$
(e, w)	$\{(e, w), (a, s), (b, t), (c, z), (d, n), (f, m), (g, y), (h, u), (i, r), (j, p), (k, v), (l, o), (I, v^*), (a^*, s^*), (b^*, u^*), (c^*, z^*), (d^*, n^*), (f^*, m^*), (g^*, y^*), (h^*, t^*), (i^*, r^*), (j^*, w^*), (k^*, o^*), (l^*, p^*)\}$	$\{(e, w), (a, n), (b, y), (c, u), (d, s), (f, r), (g, t), (h, z), (i, m), (j, o), (k, v), (l, p), (I, v^*), (a^*, n^*), (b^*, y^*), (c^*, t^*), (d^*, s^*), (f^*, r^*), (g^*, u^*), (h^*, z^*), (i^*, m^*), (j^*, w^*), (k^*, p^*), (l^*, o^*)\}$
(e, y)	$\{(e, y), (a, n), (b, w), (c, m), (d, v), (f, o), (g, t), (h, p), (i, u), (j, r), (k, s), (l, z), (I, y^*), (a^*, n^*), (b^*, v^*), (c^*, m^*), (d^*, w^*), (f^*, o^*), (g^*, u^*), (h^*, p^*), (i^*, t^*), (j^*, s^*), (k^*, z^*), (l^*, r^*)\}$	$\{(e, y), (a, p), (b, t), (c, o), (d, u), (f, m), (g, w), (h, n), (i, v), (j, s), (k, r), (l, z), (I, y^*), (a^*, p^*), (b^*, u^*), (c^*, o^*), (d^*, t^*), (f^*, m^*), (g^*, v^*), (h^*, n^*), (i^*, w^*), (j^*, r^*), (k^*, z^*), (l^*, s^*)\}$
(e, z)	$\{(e, z), (a, t), (b, p), (c, u), (d, o), (f, v), (g, n), (h, w), (i, m), (j, s), (k, r), (l, y), (I, z^*), (a^*, u^*), (b^*, p^*), (c^*, t^*), (d^*, o^*), (f^*, w^*), (g^*, n^*), (h^*, v^*), (i^*, m^*), (j^*, r^*), (k^*, y^*), (l^*, s^*)\}$	$\{(e, z), (a, v), (b, m), (c, w), (d, n), (f, t), (g, o), (h, u), (i, p), (j, r), (k, s), (l, y), (I, z^*), (a^*, w^*), (b^*, m^*), (c^*, v^*), (d^*, n^*), (f^*, u^*), (g^*, o^*), (h^*, t^*), (i^*, p^*), (j^*, s^*), (k^*, y^*), (l^*, r^*)\}$
(e, I)	$\{(e, I), (a, a^*), (b, b^*), (c, c^*), (d, d^*), (f, f^*), (g, g^*), (h, h^*), (i, i^*), (j, l^*), (k, j^*), (l, k^*), (m, m^*), (n, n^*), (o, o^*), (p, p^*), (r, r^*), (s, s^*), (t, u^*), (u, t^*), (v, w^*), (w, v^*), (y, y^*), (z, z^*)\}$	$\{(e, I), (a, a^*), (b, b^*), (c, c^*), (d, d^*), (f, f^*), (g, g^*), (h, h^*), (i, i^*), (j, l^*), (k, j^*), (l, k^*), (m, m^*), (n, n^*), (o, o^*), (p, p^*), (r, r^*), (s, s^*), (t, u^*), (u, t^*), (v, w^*), (w, v^*), (y, y^*), (z, z^*)\}$

Çizelge 12'nin devamı

(e, j^*)	$\{(e, j^*), (a, c^*), (b, f^*), (c, a^*), (d, h^*), (f, b^*), (g, i^*), (h, d^*), (i, g^*), (j, k^*), (k, I), (l, l^*), (m, u^*), (n, t^*), (o, p^*), (p, o^*), (r, y^*), (s, z^*), (t, m^*), (u, n^*), (v, v^*), (w, w^*), (y, r^*), (z, s^*)\}$	$\{(e, j^*), (a, g^*), (b, d^*), (c, i^*), (d, b^*), (f, h^*), (g, a^*), (h, f^*), (i, c^*), (j, k^*), (k, I), (l, l^*), (m, t^*), (n, u^*), (o, p^*), (p, o^*), (r, z^*), (s, y^*), (t, n^*), (u, m^*), (v, y^*), (w, w^*), (y, s^*), (z, r^*)\}$
(e, k^*)	$\{(e, k^*), (a, g^*), (b, h^*), (c, i^*), (d, f^*), (f, d^*), (g, a^*), (h, b^*), (i, c^*), (j, j^*), (k, l^*), (l, I), (m, t^*), (n, u^*), (o, w^*), (p, v^*), (r, s^*), (s, r^*), (t, n^*), (u, m^*), (v, o^*), (w, p^*), (y, z^*), (z, y^*)\}$	$\{(e, k^*), (a, i^*), (b, f^*), (c, g^*), (d, h^*), (f, b^*), (g, c^*), (h, d^*), (i, a^*), (j, j^*), (k, l^*), (l, I), (m, u^*), (n, i^*), (o, v^*), (p, w^*), (r, s^*), (s, r^*), (t, m^*), (u, n^*), (v, p^*), (w, o^*), (y, z^*), (z, y^*)\}$
(e, l^*)	$\{(e, l^*), (a, i^*), (b, d^*), (c, g^*), (d, b^*), (f, h^*), (g, c^*), (h, f^*), (i, a^*), (j, I), (k, k^*), (l, j^*), (m, n^*), (n, m^*), (o, v^*), (p, w^*), (r, z^*), (s, y^*), (t, t^*), (u, u^*), (v, p^*), (w, o^*), (y, s^*), (z, r^*)\}$	$\{(e, l^*), (a, c^*), (b, h^*), (c, a^*), (d, f^*), (f, d^*), (g, i^*), (h, b^*), (i, g^*), (j, I), (k, k^*), (l, j^*), (m, n^*), (n, m^*), (o, w^*), (p, v^*), (r, y^*), (s, z^*), (t, t^*), (u, u^*), (v, o^*), (w, p^*), (y, r^*), (z, s^*)\}$
(e, t^*)	$\{(e, t^*), (a, p^*), (b, s^*), (c, v^*), (d, y^*), (f, r^*), (g, o^*), (h, z^*), (i, w^*), (j, u^*), (k, m^*), (l, n^*), (m, j^*), (n, k^*), (o, g^*), (p, a^*), (r, f^*), (s, b^*), (t, l^*), (u, I), (v, i^*), (w, c^*), (y, d^*), (z, h^*)\}$	$\{(e, t^*), (a, s^*), (b, p^*), (c, z^*), (d, w^*), (f, o^*), (g, r^*), (h, v^*), (i, y^*), (j, u^*), (k, n^*), (l, m^*), (m, k^*), (n, j^*), (o, f^*), (p, b^*), (r, g^*), (s, a^*), (t, l^*), (u, I), (v, d^*), (w, h^*), (y, i^*), (z, c^*)\}$
(e, u^*)	$\{(e, u^*), (a, w^*), (b, y^*), (c, o^*), (d, s^*), (f, z^*), (g, v^*), (h, r^*), (i, p^*), (j, t^*), (k, n^*), (l, m^*), (m, k^*), (n, j^*), (o, c^*), (p, i^*), (r, h^*), (s, d^*), (t, I), (u, l^*), (v, a^*), (w, g^*), (y, h^*), (z, f^*)\}$	$\{(e, u^*), (a, z^*), (b, v^*), (c, s^*), (d, o^*), (f, w^*), (g, y^*), (h, p^*), (i, r^*), (j, t^*), (k, m^*), (l, n^*), (m, j^*), (n, k^*), (o, d^*), (p, h^*), (r, i^*), (s, c^*), (t, I), (u, l^*), (v, f^*), (w, b^*), (y, g^*), (z, a^*)\}$
(e, v^*)	$\{(e, v^*), (a, s^*), (b, u^*), (c, z^*), (d, n^*), (f, m^*), (g, y^*), (h, t^*), (i, r^*), (j, p^*), (k, w^*), (l, o^*), (m, f^*), (n, d^*), (o, k^*), (p, l^*), (r, i^*), (s, a^*), (t, b^*), (u, h^*), (v, j^*), (w, I), (y, g^*), (z, c^*)\}$	$\{(e, v^*), (a, n^*), (b, y^*), (c, t^*), (d, s^*), (f, r^*), (g, u^*), (h, z^*), (i, m^*), (j, o^*), (k, w^*), (l, p^*), (m, i^*), (n, a^*), (o, l^*), (p, k^*), (r, f^*), (s, d^*), (t, g^*), (u, c^*), (v, j^*), (w, I), (y, b^*), (z, h^*)\}$
(e, w^*)	$\{(e, w^*), (a, z^*), (b, m^*), (c, s^*), (d, t^*), (f, u^*), (g, r^*), (h, n^*), (i, y^*), (j, o^*), (k, v^*), (l, p^*), (m, b^*), (n, h^*), (o, l^*), (p, k^*), (r, g^*), (s, c^*), (t, f^*), (u, d^*), (v, I), (w, j^*), (y, i^*), (z, a^*)\}$	$\{(e, w^*), (a, u^*), (b, s^*), (c, m^*), (d, y^*), (f, z^*), (g, n^*), (h, r^*), (i, t^*), (j, p^*), (k, v^*), (l, o^*), (m, c^*), (n, g^*), (o, k^*), (p, l^*), (r, h^*), (s, b^*), (t, a^*), (u, i^*), (v, I), (w, j^*), (y, d^*), (z, f^*)\}$

Çizelge 12'nin devamı

(e, y^*)	$\{(e, y^*), (a, n^*), (b, v^*), (c, m^*), (d, w^*), (f, o^*), (g, u^*), (h, p^*), (i, t^*), (j, r^*), (k, s^*), (l, z^*), (m, c^*), (n, a^*), (o, f^*), (p, h^*), (r, l^*), (s, j^*), (t, g^*), (u, i^*), (v, d^*), (w, b^*), (y, I), (z, k^*)\}$	$\{(e, y^*), (a, p^*), (b, u^*), (c, o^*), (d, t^*), (f, m^*), (g, v^*), (h, n^*), (i, w^*), (j, s^*), (k, r^*), (l, z^*), (m, f^*), (n, h^*), (o, c^*), (p, a^*), (r, j^*), (s, l^*), (t, b^*), (u, d^*), (v, i^*), (w, g^*), (y, I), (z, k^*)\}$
(e, z^*)	$\{(e, z^*), (a, u^*), (b, p^*), (c, t^*), (d, o^*), (f, w^*), (g, n^*), (h, v^*), (i, m^*), (j, s^*), (k, r^*), (l, y^*), (m, i^*), (n, g), (o, d^*), (p, b^*), (r, j^*), (s, l^*), (t, a^*), (u, c^*), (v, t^*), (w, h^*), (y, k^*), (z, I)\}$	$\{(e, z^*), (a, w^*), (b, m^*), (c, v^*), (d, n^*), (f, u^*), (g, o^*), (h, t^*), (i, p^*), (j, r^*), (k, s^*), (l, y^*), (m, b^*), (n, d^*), (o, g^*), (p, i^*), (r, l^*), (s, j^*), (t, f^*), (u, h^*), (v, a^*), (w, c^*), (y, k^*), (z, I)\}$
(e, a, f)	$\{(e, a, f), (b, l, i), (c, d, j), (g, h, k), (m, v, p), (n, r, w), (s, o, u), (t, z, v), (I, a^*, f^*), (b^*, k^*, i^*), (c^*, d^*, l^*), (g^*, h^*, j^*), (m^*, y^*, p^*), (n^*, r^*, v^*), (s^*, o^*, t^*), (u^*, z^*, w^*)\}$	$\{(e, a, f), (b, k, c), (d, l, g), (h, j, i), (m, w, s), (n, o, y), (p, r, u), (t, v, z), (I, a^*, f^*), (b^*, j^*, c^*), (d, k^*, g^*), (h^*, l^*, i^*), (m^*, v^*, s^*), (n^*, o^*, y^*), (p^*, r^*, t^*), (u^*, w^*, z^*)\}$
(e, b, g)	$\{(e, b, g), (a, k, d), (c, l, f), (i, j, h), (m, o, z), (n, v, s), (p, r, u), (t, w, y), (I, b^*, g^*), (a^*, j^*, d^*), (c^*, k^*, f^*), (h^*, i^*, l^*), (m^*, o^*, z^*), (n^*, w^*, s^*), (p^*, r^*, t^*), (y^*, u^*, v^*)\}$	$\{(e, b, g), (a, l, h), (c, j, d), (f, i, k), (m, r, v), (n, z, p), (s, o, u), (t, y, w), (I, b^*, g^*), (a^*, k^*, h^*), (c^*, l^*, d^*), (f^*, i^*, j^*), (m^*, r^*, w^*), (p^*, n^*, z^*), (o^*, t^*, s^*), (y^*, v^*, u^*)\}$
(e, c, h)	$\{(e, c, h), (a, b, j), (d, l, g), (f, k, i), (m, r, v), (n, y, o), (p, t, s), (w, u, z), (I, c^*, h^*), (a^*, b^*, l^*), (d^*, k^*, g^*), (f^*, j^*, i^*), (m^*, r^*, w^*), (n^*, y^*, o^*), (p^*, u^*, s^*), (v^*, t^*, z^*)\}$	$\{(e, c, h), (a, d, k), (b, l, i), (f, j, g), (m, p, y), (n, v, s), (o, r, t), (u, w, z), (I, c^*, h^*), (a^*, d^*, j^*), (b, k^*, i^*), (g^*, f^*, l^*), (m^*, p^*, y^*), (n^*, w^*, s^*), (t^*, v^*, z^*), (u^*, o^*, r^*)\}$
(e, d, i)	$\{(e, d, i), (a, l, h), (b, c, k), (f, g, j), (m, w, s), (n, p, z), (r, t, o), (v, y, u), (I, d^*, i^*), (a^*, k^*, h^*), (b^*, c^*, j^*), (f^*, g^*, l^*), (m^*, v^*, s^*), (n^*, p^*, z^*), (r^*, u^*, o^*), (w^*, y^*, t^*)\}$	$\{(e, d, i), (a, j, b), (c, l, f), (g, k, h), (m, z, o), (p, t, s), (n, r, w), (u, y, v), (I, d^*, i^*), (a, l^*, b^*), (c^*, k^*, f^*), (g^*, j^*, h^*), (m^*, z^*, o^*), (p^*, u^*, s^*), (r^*, v^*, n^*), (t^*, y^*, w^*)\}$

Çizelge 12'nin devamı

(e, j, m, n)	$\{(e, j, m, n), (a, i, w, o), (b, d, r, z), (c, g, p, v), (f, h, s, y), (k, l, u, t), (I, l^*, m^*, n^*), (a^*, i^*, v^*, o^*), (b^*, d^*, r^*, z^*), (c^*, g^*, p^*, w^*), (f^*, h^*, s^*, y^*), (j^*, k^*, t^*, u^*)\}$	$\{(e, j, m, n), (a, c, y, r), (b, h, o, v), (d, f, w, p), (g, i, z, s), (k, l, t, u), (I, l^*, m^*, n^*), (a^*, c^*, y^*, r^*), (b^*, h^*, o^*, w^*), (d^*, f^*, v^*, p^*), (g^*, i^*, s^*, z^*), (u^*, t^*, k^*, j^*)\}$
(e, k, o, p)	$\{(e, k, o, p), (a, c, y, r), (b, f, u, n), (d, h, m, t), (g, i, s, z), (j, l, v, w), (I, j^*, o^*, p^*), (a^*, c^*, y^*, r^*), (b^*, f^*, t^*, n^*), (d^*, h^*, m^*, u^*), (g^*, i^*, s^*, z^*), (k^*, l^*, v^*, w^*)\}$	$\{(e, k, o, p), (a, g, u, m), (b, d, z, r), (c, i, n, t), (f, h, s, y), (j, l, w, v), (I, j^*, o^*, p^*), (a^*, g^*, t^*, m^*), (b^*, d^*, z^*, r^*), (c^*, i^*, n^*, u^*), (f^*, h^*, s^*, y^*), (k^*, l^*, w^*, v^*)\}$
(e, l, r, s)	$\{(e, l, r, s), (a, g, u, m), (b, h, v, o), (c, i, t, n), (d, f, w, p), (y, z, k, j), (I, k^*, r^*, s^*), (a^*, g^*, t^*, m^*), (b^*, h^*, w^*, o^*), (c^*, i^*, u^*, n^*), (d^*, f^*, v^*, p^*), (j^*, l^*, z^*, y^*)\}$	$\{(e, l, r, s), (a, i, w, o), (b, f, u, n), (c, g, v, p), (d, h, t, m), (y, z, j, k), (I, k^*, r^*, s^*), (a^*, i^*, v^*, o^*), (b^*, f^*, t^*, n^*), (c^*, g^*, w^*, p^*), (d^*, h^*, u^*, m^*), (z^*, y^*, j^*, l^*)\}$
(e, j, m^*, n^*)	$\{(e, j, m^*, n^*), (a, i, v^*, o^*), (b, d, r^*, z^*), (c, g, p^*, w^*), (f, h, s^*, y^*), (k, l, t^*, u^*), (I, l^*, m, n), (a^*, i^*, w, o), (b^*, d^*, r, z), (c^*, g^*, p, v), (f^*, h^*, s, y), (j^*, k^*, u, t)\}$	$\{(e, j, m^*, n^*), (a, c, y^*, r^*), (b, h, o^*, w^*), (d, f, v^*, p^*), (g, i, z^*, s^*), (k, l, u^*, t^*), (m, n, l^*, I), (o, v, h^*, b^*), (p, w, d^*, f^*), (r, y, a^*, c^*), (s, z, g^*, i^*), (t, u, k^*, j^*)\}$
(e, k, o^*, p^*)	$\{(e, k, o^*, p^*), (a, c, y^*, r^*), (b, f, t^*, n^*), (d, h, m^*, u^*), (g, i, s^*, z^*), (j, l, w^*, v^*), (o, p, j^*, I), (r, y, a^*, c^*), (s, z, i^*, g^*), (t, m, d^*, h^*), (u, n, f^*, b^*), (v, w, k^*, l^*)\}$	$\{(e, k, o^*, p^*), (a, g, t^*, m^*), (b, d, z^*, r^*), (c, i, n^*, u^*), (f, h, s^*, y^*), (j, l, v^*, w^*), (o, p, j^*, I), (r, z, b^*, d^*), (s, y, h^*, f^*), (t, n, c^*, i^*), (u, m, g^*, a^*), (w, v, k^*, l^*)\}$
(e, l, r^*, s^*)	$\{(e, l, r^*, s^*), (a, g, t^*, m^*), (b, h, w^*, o^*), (c, i, u^*, n^*), (d, f, v^*, p^*), (j, k, y^*, z^*), (s, r, I, k^*), (t, n, i^*, c^*), (u, m, g^*, a^*), (v, o, h^*, b^*), (w, p, f^*, d^*), (y, z, j^*, l^*)\}$	$\{(e, l, r^*, s^*), (a, i, y^*, o^*), (b, f, t^*, n^*), (c, g, w^*, p^*), (d, h, u^*, m^*), (j, k, z^*, y^*), (r, s, k^*, I), (t, m, h^*, d^*), (u, n, f^*, b^*), (v, p, g^*, c^*), (w, o, a^*, i^*), (z, y, j^*, l^*)\}$
(e, I, a, a^*, f, f^*)	$\{(e, I, a, a^*, f, f^*), (b, b^*, l, k^*, i, i^*), (c, c^*, d, d^*, j, l^*), (g, g^*, h, h^*, k, j^*), (m, m^*, p, p^*, y, y^*), (n, n^*, r, r^*, w, v^*), (o, o^*, s, s^*, u, t^*), (z, z^*, v, w^*, t, u^*)\}$	$\{(e, I, a, a^*, f, f^*), (b, b^*, k, j^*, c, c^*), (d, d^*, l, k^*, g, g^*), (h, h^*, j, l^*, i, i^*), (m, m^*, w, v^*, s, s^*), (n, n^*, o, o^*, v, y^*), (p, p^*, r, r^*, u, t^*), (t, u^*, v, w^*, z, z^*)\}$

Çizelge 12'nin devamı

(e, I, b, b^*, g, g^*)	$\{(e, I, b, b^*, g, g^*), (a, a^*, k, j^*, d, d^*), (c, c^*, l, k^*, f, f^*), (h, h^*, i, i^*, j, j^*), (m, m^*, o, o^*, z, z^*), (n, n^*, v, w^*, s, s^*), (p, p^*, r, r^*, u, t^*), (t, u^*, w, v^*, y, y^*)\}$	$\{(e, I, b, b^*, g, g^*), (a, a^*, l, k^*, h, h^*), (d, d^*, c, c^*, j, l^*), (f, f^*, i, i^*, k, j^*), (m, m^*, r, r^*, v, w^*), (n, n^*, z, z^*, p, p^*), (o, o^*, u, t^*, s, s^*), (w, v^*, t, u^*, y, y^*)\}$
(e, I, c, c^*, h, h^*)	$\{(e, I, c, c^*, h, h^*), (a, a^*, b, b^*, j, l^*), (d, d^*, l, k^*, g, g^*), (f, f^*, k, j^*, i, i^*), (m, m^*, r, r^*, v, w^*), (n, n^*, y, y^*, o, o^*), (p, p^*, t, u^*, s, s^*), (u, t^*, z, z^*, w, v^*)\}$	$\{(e, I, c, c^*, h, h^*), (a, a^*, d, d^*, k, j^*), (b, b^*, l, k^*, i, i^*), (f, f^*, j, l^*, g, g^*), (m, m^*, p, p^*, y, y^*), (n, n^*, v, w^*, s, s^*), (o, o^*, r, r^*, t, u^*), (u, t^*, w, v^*, z, z^*)\}$
(e, I, d, d^*, i, i^*)	$\{(e, I, d, d^*, i, i^*), (a, a^*, l, k^*, h, h^*), (b, b^*, c, c^*, k, j^*), (f, f^*, g, g^*, j, l^*), (m, m^*, w, v^*, s, s^*), (n, n^*, p, p^*, z, z^*), (o, o^*, r, r^*, t, u^*), (y, y^*, u, t^*, v, w^*)\}$	$\{(e, I, d, d^*, i, i^*), (a, a^*, j, l^*, b, b^*), (p, p^*, t, u^*, s, s^*), (c, c^*, l, k^*, f, f^*), (g, g^*, k, j^*, h, h^*), (m, m^*, z, z^*, o, o^*), (n, n^*, r, r^*, w, v^*), (u, t^*, y, y^*, v, w^*)\}$

10. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kristal sistemlerin bir geometriye indirgenmesiyle bu sistemler üzerinde grup teorisi işlemleri uygulanabilmektedir.

Grup ve grup teorisi kavramlarının kristal sistemler üzerindeki uygulamalarının daha anlaşılır olması ve yapılacak işlemlerde kolaylık sağlaması adına bölüm 3'te kristal sistemlerle ilgili temel tanımlar verilmiştir. Çalışma O_h Nokta Gruplar üzerine yapılmış bir çalışma olduğundan 5.bölümde Kübik Kristal Yapılar özellikle incelenmiştir.

Bölüm 6 da verilen simetri işlemleri, geometrik biçime indirgenen kristal sistemin matematiksel işlemlere tabi tutulmasını kolaylaştıran bir yöntemdir. Bu açıdan bakıldığında simetri işlemlerinin iyi öğrenilmesi grup teorisi işlemlerinin uygulanabilirliği açısından önem arz etmektedir. Bu nedenle simetri işlemleri ve simetri elemanları ayrıntılarıyla açıklanmıştır.

Bölüm 7'de grup ve grupteorisinin temel tanım ve işlem basamakları, Bölüm 8'de ise nokta gruplar kavramları detaylarıyla anlatılmıştır. Ayrıca Kristal Sistemler ve bu sistemlerin temsil edildikleri nokta gruplar, bir tablo halinde sunulmuştur.

Çalışmanın 9 Bölümünde de O_h Nokta Grubu $P_{(8)}$ Permütasyon Grubu ile incelenmiştir. $P_{(8)}$ permütasyon grubunun 40320 alt grubu bulunmaktadır ve 48 elemanlı O_h nokta grubu da $P_{(8)}$ permütasyon grubunun bir alt grubu ile izomorfiktir bilgisi yardımıyla, O_h Nokta Grubuna simetri işlemleri uygulanarak O_h Nokta Grubunun simetri elemanlarının permütasyon ve matris karşılıkları bulunmuştur.

Matris karşılıkları bulunan simetri elemanlarının, matrislerin çarpımı yöntemleri kullanılarak 2304 adet permütasyon çarpımı veya matris çarpımı işlemi yapılmış bu işlemler sonucunda, O_h Nokta Grubunun simetri elemanlarının çarpım tablosu oluşturulmuştur.

Elde edilen çarpım tablosu kullanılarak O_h Nokta Grubunun, mertebesi, sınıfları, Abelian ve Abelian olmayan alt grupları, sağ ve sol kosetleri elde edilmiştir.

KAYNAKÇA

- Aivazis, M., 1991, ***Group Theory In Physics – Problems and Solutions***,
- Altay, G., 2008, ***Lie Grupların İzometrilere*** (Msc.), Fırat Üniversitesi, Matematik Bölümü, Elazığ
- Arfken, G.B., Weber, H.J., 2005, ***Mathematical Methods For Physicists (Sixth Edition)***, Elsevier Academic Pres, ISBN: 0-12-088584-0
- Bogopolski, O., 2008, ***Introduction to Group Theory***, European Mathematical Society, ISBN: 978-3-03719-041-8
- Bradley, C.J., Cracknell, A.P., 1972, Oxford University Press, London
- Bilgiç, H., 2012, ***Soyut Cebir Ders Notları***, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Matematik Bölümü
- Cohen, A., Ushirobira, R., Draisma, J., 2007, ***Group Theory For Maths, Physics and Chemistry students***
- Cornwell, J.F., 1997, ***Group Theory In Physics***, Academic Press, ISBN: 0-12-189800-8 California, USA
- Dresselhaus, M.D., Dresselhaus, G., Jorio, A. (2008), ***Group Theory***, Springer, ISBN: 978-3-540-32897-1
- Hirsch, K.A. 1960, ***The Theory of Groups***, Chelsea Publishing Company, 60-8965, New York, America
- Hofman, P., 2008, ***Solid State Physics***, Wiley-VCH, ISBN: 978-3-527-40861-0
- James, G., Liebeck, M., 2003, ***Representations And Characters Of Groups***, Cambridge University Press, ISBN: 0-511-01700-6
- Kittel, C., 1996, ***Introduction to Solid State Physics (Seventh Edition)***, John Wiley, ISBN: 0-471-11181-3
- Koster, G.F., 1957, ***Space Groups And Their Representations***, Academic Press
- Kurosh, A.G., 1956, ***The Theory Of Groups***, Chelsea Publishing Company, NO: 60-8965
- Lederman, W. 1973, ***Introduction to Group Theory***, Longman, ISBN: 0-582-44180-3, London
- Lesk, A.M., 2004, ***Introduction To Symmetry And Group Theory For Chemists***, Kluwer Academic Publishers, ISBN: 1-4020-2151-8

- Lüdeling, C. 2010, ***Group Theory For Physicists*** , Bonn Universty, Physics 751,
- Milne, J.S. 2012, ***Group Theory***, Bibtex İnförmatıon,
- Powell, R.C. 2010, ***Symmetry, Group Theory and The Physical Propertes of Crystals***, Springer, ISBN: 978-1-4419-7597-3
- Riley,K.F.,Hobson,M.P., Bence, S.J., 2006, ***Mathematical Methods For Physics And Engineering***, Cambridge University Press, ISBN13: 978-0-511-16842-0
- Tung, W. 1985, ***Group Theory In Physics***, World Scientific Publishing, ISBN: 9971-966-56-5, USA
- T.C. Milli Eğitim Bakanlığı, MEGEP, ***Kimya Teknolojisi Katılar***, (2007), T.C. Milli Eğitim Bakanlığı, Ankara
- [www. acikders. org. tr](http://www.acikders.org.tr), ***Grup Kuramının Tarihçesi*** (14 şubat 2013 tarihinde alınmıştır.)

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Van'ın Erciş ilçesinde doğdum. İlköğretimi Erciş Yahya Kemal Beyatlı İlk Öğretim Okulunda, liseyi Erciş Lisesinde tamamladıktan sonra, 2006 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fizik Öğretmenliği bölümünde lisans eğitimine başladım. 2011 yılında lisans eğitimimi başarıyla tamamlayıp, aynı yıl Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Ana Bilim Dalında Tezli Yüksek Lisans Eğitimi almaya hak kazandım. Özel bir eğitim kuruluşunda öğretmen olarak çalışmaktayım.