T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Şevket ÜNCÜ
DANIŞMAN: Doç. Dr. Erkan ÇİMEN

VAN-2020

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Şevket ÜNCÜ

VAN-2020

## KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Erkan ÇİMEN danışmanlığında, Şevket ÜNCÜ tarafından sunulan "Gecikmeli Diferansiyel Denklem için Başlangıç Değer Problemi ve Çözümleri" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 30/06/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Musa ÇAKIR İmza:

Üye: Doç. Dr. Erkan ÇİMEN İmza:

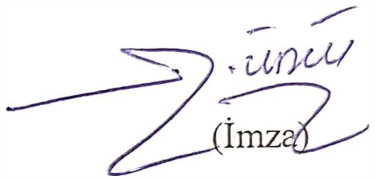
Üye: Dr. Öğr. Üyesi Derya ARSLAN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10/07/2020 tarih ve 2020/35-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

# TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



(İmza)

Şevket ÜNCÜ

# ÖZET

## GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ

ÜNCÜ, Şevket
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Erkan ÇİMEN
Temmuz 2020, 51 sayfa

Bu çalışmada, ikinci mertebeden lineer gecikmeli diferansiyel denklem için başlangıç değer problemini ele almaktayız. Bu problemin hem analitik hem de nümerik çözümünü araştırıyoruz. Problemin analitik çözümünü bulmak için adımlar metodu ve Laplace dönüşümü metodunu kullanıyoruz. Nümerik çözüm için ise baz fonksiyon içeren ve kalan terimi integral biçiminde olan interpolasyon kuadratür formüllerini kullanarak, sonlu fark metoduyla bir fark şeması kuruyoruz. Bu şemanın kurulması, üstel baz fonksiyon içeren ve kalan terimi integral biçiminde olan interpolasyon kuadratür formüllerine dayanmaktadır. Dahası, metodun yakınsaklığı incelenmiş ve ayrık maksimum normda birinci mertebeye sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bir örnek üzerinde nümerik sonuçların teoriye uygunluğu doğrulanmıştır. Son olarak, önerilen şema açık Euler şeması ile karşılaştırılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Başlangıç-değer problemi, Gecikmeli diferansiyel denklem, Hata değerlendirmesi, Sonlu fark metodu.

## ABSTRACT

### INITIAL VALUE PROBLEM FOR DELAY DIFFERENTIAL EQUATION AND ITS SOLUTIONS

ÜNCÜ, Şevket
M. Sc. Thesis, Mathematics
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Erkan ÇİMEN
July 2020, 51 pages

In this study, we deal with an initial value problem for a linear second order delay differential equation. We investigate both the analytical and numerical solution of this problem. We use the steps method and the Laplace transform for the analytical solution of the problem. We construct an appropriate difference scheme on a uniform using the method of integral identities which contains basis functions and interpolating quadrature rules with weight and remainder term in integral form for the numerical solution. We also proved that the method is first-order convergent in discrete maximum norm. Next, we present an example that confirms the theoretical results. Finally, we compare the proposed method with the implicit Euler method.



**Keywords:** Delay differential equation, Error estimate, Finite difference method, Initial-value problem.

# ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Erkan ÇİMEN'e teşekkürlerimi sunarım.

…./…./……

Şevket ÜNCÜ

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

ÖZET ..... i
ABSTRACT ..... iii
ÖN SÖZ ..... v
İÇİNDEKİLER ..... vii
ÇİZELGELER LİSTESİ ..... ix
ŞEKİLLER LİSTESİ ..... xi
SİMGELER VE KISALTMALAR ..... xiii
1. GİRİŞ ..... 1
2. BAZI MODEL DENKLEMLER ..... 5
2.1. Kontrollü Mekanik Sistem Modeli ..... 5
2.2. Araç Takip Modeli ..... 5
2.3. Ayçiçeği Gelişim Modeli ..... 6
2.4. Ters Sarkaç Modeli ..... 6
3. TEMEL TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER ..... 7
4. MATERYAL VE YÖNTEM ..... 13
4.1. Analitik Yöntemler ..... 13
4.1.1. Adımlar metodu ..... 13
4.1.2. Laplace dönüşüm metodu ..... 15
4.2. Nümerik Yöntemler ..... 23
4.2.1. Bazı asimptotik değerlendirmeler ..... 23
4.2.2. Fark şemasının kurulması ..... 25
4.2.3. Hata analizi ..... 32
5. BULGULAR ..... 37
6. TARTIŞMA VE SONUÇ ..... 45
KAYNAKLAR ..... 47
ÖZ GEÇMİŞ ..... 51

# ÇİZELGELER LİSTESİ

**Çizelge** **Sayfa**

Çizelge 5.1. (0,2] aralığında ($N = 64$) (SM) için test probleminin nümerik sonuçları....39

Çizelge 5.2. (0,2] aralığında ($N = 128$) (SM) için test probleminin nümerik sonuçları..40

Çizelge 5.3. (0,2] aralığında ($N = 64$) (EM) için test probleminin nümerik sonuçları...41

Çizelge 5.4. (0,2] aralığında ($N = 128$) (EM) için test probleminin nümerik sonuçları.42

Çizelge 5.5. Her iki yöntemdeki $e^N$ değerlerinin karşılaştırılması.....43

# ŞEKİLLER LİSTESİ

**Şekil** **Sayfa**

Şekil 5.1. Örnek 4.1 için hesaplanan sonuçların grafiği ($N = 64$)..... 44

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simge** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\boldsymbol{C[a,b]}$ | $[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar kümesi |
| $\boldsymbol{C}$ | Şebeke adımından bağımsız genel sabit |
| $\boldsymbol{r}$ | Gecikme parametresi |
| $\boldsymbol{u}$ | Problemin analitik çözümü |
| $\boldsymbol{y}$ | Problemin yaklaşık çözümü |
| $\boldsymbol{\omega}$ | Şebeke |
| $\boldsymbol{N}$ | Şebeke elemanlarının sayısı |
| $\boldsymbol{e_i^N}$ | $t_i$ düğüm noktasındaki mutlak hata |
| $\{\boldsymbol{\psi_i(t)}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}}$ | Sonlu üstel baz fonksiyonları |
| $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ | Laplace dönüşümü |
| $\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}$ | Ters Laplace dönüşümü |

# 1. GİRİŞ

Bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin (en yüksek mertebeden türev hariç) bağımsız değişken ($t$) ve bağımsız değişkenin önceki zamana bağlı olduğu diferansiyel denkleme gecikmeli diferansiyel denklem denir. Örneğin,

$$x^{'}(t) + x(t-1) = 0,$$
$$x^{''}(t) - 2x'(t) + x'(t-0.5) + tx(t-1) = e^{t},$$
$$x^{''}(t) - x'(t-1) + 2x(t) + x^{2}(t-1) = 1,$$

gecikmeli diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemler bağımsız değişkenin önceki zamanlara bağlı olduğundan, denklemi çözebilmek için başlangıç fonksiyonuna ihtiyaç duyulmaktadır.

Gecikmeli diferansiyel denklemler; mühendislik bilimlerinden fizik, biyoloji, nöroloji ve ekonomiye kadar dinamik sistemleri içeren bir çok bilimsel alanda ortaya çıkmaktadır (Driver, 1977; Beuter ve ark., 1993; Baker ve ark., 1998; Villasana ve Radunskaya, 2003; Balachandran ve ark., 2009; Folley ve Mackey, 2009; Kyrychko ve Hogan, 2010; Liz ve Röst, 2013; Getto ve Waurick, 2016; Gou ve Ma, 2016; Rihan ve ark., 2019). Kanser hücrelerindeki tümör popülasyonu, köprü inşası, trafik kontrolü, robot teknolojisi, iklim sistemleri bunlardan bazılarıdır. (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999; Balachandran ve ark., 2009; Keane ve ark., 2017; Rihan, 2019). Özellikle ikinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemler; metal kesim süreçlerinde (Gilsinn, 2002), iki durumlu cihazlarda (Vallee ve ark., 1998) ve kontrollü esnek mekanizmalarda (Wang ve Hu, 2003) model olarak ortaya çıkmaktadır. Bundan dolayı gecikmeli diferansiyel denklemler için yapılan çalışmalar her geçen gün artmaktadır. Bu çalışmaların çoğunluğunu kararlık analizi ve çözümün salınım özelliklerinin incelenmesinden meydana gelmektedir (Hopfield, 1984; Gopalsamy, 1992; Li ve ark., 2010; Berezansky, 2015; Zeng ve ark., 2016; Zhao ve ark., 2017). Bununla birlikte nümerik yaklaşımlar da bulunmaktadır. Literatüre bakıldığında çoğunlukla birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırıldığı gözlenmektedir (Bellen ve Zennaro, 2003; Bellen ve ark., 2009; Cimen ve Ekinci, 2017; Cimen, 2019, Cimen ve Yatar, 2020). Aynı zamanda bu denklemler küçük gecikme

parametresi içerdiğinden Taylor serisinden faydalanılarak adi diferansiyel denkleme dönüştürülmesiyle daha uygun yöntemler sunulmaktadır. İkinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümü için sonlu fark metodu, 2-noktalı blok metodu, Adams-Moulton metodu, varyasyonel iterasyon metodu, Legendre-Gauss spektral kollokasyon metodu son yıllarda önerilen metotlardandır (Erdoğan ve Amiraliyev, 2012; Subburayan ve Ramanujam, 2012; Liu ve ark., 2013; Seyong ve ark., 2013; Yi ve Wang, 2014; Seong ve Majid, 2017; Subburayan, 2018). İkinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemleri çözümlerinin varlığı ve tekliği hakkında bir çok yazar araştırma yapmaya devam etmektedir (El'sgolts ve Norkin, 1973; Driver, 1977; Hale ve Lunel, 1993; Kolmanovskii ve Myshkis, 1999; Wang ve ark., 2007; Yan, 2011; Ilea ve Otrocol, 2014; Benchohra ve Abbas, 2015; Corduneanu ve ark., 2016; Diblik ve ark., 2019).

Bu çalışmada aşağıdaki gecikme terimi içeren başlangıç-değer problemini inceleyeceğiz:

$$Lu := u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u'(t-r) + c(t)u(t-r) = f(t), 0 < t \le T \quad (1.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \ -r \le t \le 0; \qquad u'(0) = \gamma, \quad (1.2)$$

burada $I = (0,T] = \cup_{p=1}^{m} I_p, I_p = \{t: r_{p-1} < t \le r_p\}$ ,$1 < p \le m$ , $r_s = sr, 0 \le s \le m$ ve $I_0 = [-r, 0]$ (Sadelik için $T/r$ nin tamsayı olduğunu varsayalım yani $T = mr$ olsun). $a(t) \ge \alpha > 0, b(t), c(t), f(t)$ ve $\varphi(t)$ sırasıyla $\bar{I} = [0,T]$ ve $I_0$ aralıklarında istenilen türevlere sahip sürekli fonksiyonlar, $r > 0$ reel sabit gecikme terimidir.

İncelediğimiz problem lineer olsa bile problemin analitik çözümünü bulmak her zaman mümkün olmadığından bu tür problemlerin çözümü için etkili nümerik çözümler geliştirmek önemlidir.

Bu çalışmanın amacı, (1.1)-(1.2) probleminin çözümü için Euler ve Runge-Kutta gibi klasik yöntemlerden daha etkili ve kullanışlı nümerik bir yöntem sunmaktır. Sunacağımız metot düzgün şebeke üzerinde sonlu fark şemasını içermektedir. Bu şema kalan terimi integral biçiminde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren kuadratür formüllerin kullanılmasıyla oluşturulmaktadır. 2. Bölüm'de bazı model denklemler sunulmaktadır. 3. Bölüm'de sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilmektedir. 4. Bölüm'de incelenen problemin analitik ve yaklaşık çözümü için yöntemler sunulmaktadır. Çalışmada elde edilen nümerik sonuçlar 5. Bölüm'de

verilmektedir. Çalışmada sunulan yöntemlerin avantaj ve dezavantajları 6. Bölüm'de tartışılmaktadır.

## 2. BAZI MODEL DENKLEMLER

Bu bölümde, çalışmamıza motivasyon sağlayan ve literatürde sıkça karşılaşılan birkaç model incelenmektedir.

### 2.1. Kontrollü Mekanik Sistem Modeli

Tek dereceli bir sistem olan bu model, aşağıda verildiği gibi lineer gecikmeli diferansiyel denklem olarak verilmektedir:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = ux(t-\tau) + v\dot{x}(t-\tau) + f_0 sin\omega t$$

burada;

$x(t)$: sistemin $t$ anındaki yer değişim miktarı,

$m$: kütle,

$c$: sönüm katsayısı,

$k$: yay katsayısı,

$f_0$: dışarıdan uygulanan kuvvet,

$m > 0,\ c \geq 0,\ k \geq 0,\ f_0 \geq 0,\ \omega \geq 0$ ve $\tau \geq 0$ sabit reel parametrelerdir. $u$ ve $v$ ise sistemin hareketinde, sırasıyla yer değiştirme yolu ve hız yolu olan reel sabitlerdir (Hu ve Wang, 2002).

### 2.2. Araç Takip Modeli

Trafik akım teorisine göre, aralarında belli bir mesafe ve hız ilişkisi bulunması gereken iki araç için aşağıda verilen model denklem sunulmaktadır:

$$x''_{n+1}(t) = \alpha[x'_n(t-\tau) - x'_{n+1}(t-\tau)].$$

Burada $x_{n+1}(t)$ takipte olan aracın $t$ anındaki hızı ve $x_n(t)$ ise bu araca liderlik eden aracın yine $t$ anındaki hızıdır. $\alpha$ sürücünün reaksiyon katsayısı ve $\tau$ da sürücünün reaksiyonlarındaki zaman olarak gecikme miktarıdır (Erneux, 2009).

## 2.3. Ayçiçeği Gelişim Modeli

Bir ayçiçeği fidesinin gelişimi aşağıdaki gibi modellenmiştir.

$$y'' + \frac{a}{\tau} y' + \frac{b}{\tau} \sin\big(y(t-\tau)\big) = 0$$

$y$, fidenin düşey doğrultuyla yaptığı açıyı ifade eder. $a$ ve $b$ ise denklemin periyodik çözümlerine göre belirlenen katsayılardır (Erneux, 2009).

## 2.4. Ters Sarkaç Modeli

Elde edilen veriler ışığında Newton'un temel yasalarına göre ters sarkacın hareketi aşağıdaki gibi modellenmiştir (Erneux, 2009).

$$I\theta'' + \gamma \ell^2 \theta' - mg\ell \sin(\theta) + r_0 \ell \theta(t-\tau) = 0,$$

buradaki parametreler;

$I$: eylemsizlik momentumu,

$\theta$: sarkacın düşey doğrultuyla yaptığı açı,

$m$: ters sarkacın kütlesi,

$\ell$: ters sarkacın uzunluğu,

$\gamma$: kütle debisi,

$g$: yerçekimi sabiti,

ve $r_0$, $\tau$ pozitif reel bir sabitler olarak tanımlanmaktadır.

## 3. TEMEL TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER

Bu bölümde çalışmada kullanılan bazı temel tanım, teorem ve formüller verilmektedir.

**Tanım 3.1. Laplace Dönüşümü**

$F$, $t$ reel değişkeninin $t > 0$ için tanımlı bir fonksiyonu olsun. $s$ reel bir değişken ve $f$ de

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt$$

integralinin mevcut olduğu bütün $s$ değerleri için tanımlı olsun. $f$ fonksiyonuna, $F$'nin Laplace dönüşümü denir. $F$'nin $f$ Laplace dönüşümü $\mathcal{L}\{F\}$, $f(s)$ de $\mathcal{L}\{F(t)\}$ ile gösterilir (Ross, 1984).

**Teorem 3.2.**

$F(t)$ aşağıda verilen şartları sağlayan bir fonksiyon olsun:

i) $F(t), a \leq t \leq b$ $(b > 0)$ gibi her sonlu kapalı aralıkta parçalı süreklidir.

ii) $F(t)$, üstel mertebedendir. Yani $\alpha, M, t_0$ pozitif sayıları her $t > t_0$ için $e^{\alpha t}|F(t)| < M$.

O halde,

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt$$

Laplace dönüşümü mevcuttur (Ross, 1984).

**Teorem 3.3.**

$F$, $(n-1)$. mertebeye kadar türevleriyle birlikte $t \geq 0$ için sürekli, reel ve $e^{-\alpha t}$ üstel mertebesinden bir fonksiyon olsun. $F(t)$'nin $F^{(n)}(t)$ türevi her sonlu kapalı $0 \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli olsun. $s > \alpha$ için $\mathcal{L}\{F^{(n)}\}$ mevcuttur ve

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n\, \mathcal{L}\{F\} - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - s^{n-3}F''(0) - \cdots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

olur (Ross, 1984).

**Tanım 3.4. Ters Laplace Dönüşümü**

$t > 0$ ve $s$ reel değişkenli olmak üzere $F(t) = \mathcal{L}\{f(s)\}$ ise $f(s)$ fonksiyonuna $F(t)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü denir. $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ şeklinde gösterilir (Ross, 1984).

**Tanım 3.5. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu**

$\bar{I} = [0, T]$ aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçasına bir şebeke denir.
Eğer düğümler eşit aralıklı ise

$$\bar{\omega}_h = \{t_i | t_i = ih, i = 0,1, \ldots N; h = T/N\}$$

ifadesine $\bar{I}$ aralığındaki düzgün şebeke denir. $h$ sabitine şebeke adımı denir. Bu şebekede tanımlanmış $g_i = g(t_i)$ fonksiyonuna ise $t_i$ noktasındaki şebeke fonksiyonu denir (Amirali ve Amirali, 2018).

**3.6. Fark Türevleri**

$\bar{I}$ aralığında türev yaklaşımları için düzgün şebekede aşağıdaki fark türevleri kullanılmaktadır (Amirali ve Amirali, 2018).
Birinci mertebeden fark türevleri:

i) $g_{\bar{t},i} = \frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{h}$,

ii) $g_{t,i} = \frac{g(t_{i+1})-g(t_i)}{h}$,

iii) $g^0_{t,i} = \frac{g(t_{i+1})-g(t_{i-1})}{2h}$.

İkinci mertebeden fark türevi:

iv) $g_{\bar{t}t,i} = \frac{g(t_{i+1})-2g(t_i)+g(t_{i-1})}{h^2}$.

### 3.7. Şebeke Normu

Şimdide fark problemi için kullanacağımız normları tanıtalım.

$\|g\|_{\infty,\bar{\omega}_h} = max_{0\leq i\leq N}|g_i|$ ifadesine düzgün şebekede maksimum normun fark benzeri denir.

$\|g\|_{1,\bar{\omega}_h} = h\sum_{i=1}^{N-1}|g_i|$ ifadesine düzgün şebekede $l_1$ normun fark benzeri denir (Amirali ve Amirali, 2018).

### 3.8. Kararlılık

Lineer

$$Lu = f(t), t \in G \tag{3.1}$$

denkleminin

$$lu = \mu(t), t \in \Gamma \tag{3.2}$$

şartını (sınır şartı veya başlangıç şartı olabilir) sağlayan çözümün bulunması istensin, burada $f(t)$, $\mu(t)$ belirli fonksiyonlar (veri fonksiyonları), $l$ belirli bir lineer diferansiyel operatörüdür. $\bar{G} = G \cup \Gamma$ bölgesinde herhangi bir $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup l_h$ şebekesinin kurulduğunu varsayalım, burada $\omega_h$-iç şebeke $l_h$ -sınır şebeke (şebeke sınır noktaları kümesi), $h$ ise şebeke düğümlerinin yoğunluğunu ifade eden parametredir (3.1)-(3.2) problemine karşılık

$$L_h y = \varphi_h, t \in \omega_h \tag{3.3}$$

$$l_h y = X_h, t \in l_h \tag{3.4}$$

fark problemi olsun. Burada $L_h, l_h - \bar{\omega}_h$ 'da tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, $\varphi_h, X_h$ belli şebeke fonksiyonlarıdır.

Kararlılık, fark problemleri veya genellikle yaklaşık algoritmalar için, bunların pratik uygulanabilmesinin gerektirdiği önemli bir özelliktir.

(3.3)-(3.4) fark problemi, belli sınıflardan olan her bir $\varphi_h, X_h$ başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \le h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu varsayalım. (3.3)-(3.4) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h, \tilde{X}_h$ olan çözümünü $\tilde{y}$ ile belirleyelim

Eğer öyle, $h$' a bağlı olmayan $C_1, C_2$ sabitleri varsa, yeteri kadar küçük $h \le h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \le C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \left\|\tilde{X}_h - X_h\right\|_3 \qquad (3.5)$$

eşitsizliği sağlanmış olsun, bu durumda (3.3)-(3.4) fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre kararlıdır denir. Burada $\| \|_1, \| \|_2, \| \|_3$ herhangi şebeke normlarıdır. (3.3)-(3.4) problemi lineer olduğundan, kararlılığı ifade eden (3.5) eşitsizliği

$$\|y\|_1 \le C_1 \|\varphi_h\|_2 + C_2 \|X_h\|_3$$

eşitsizliğine denktir.

Böylece kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli bağlı olduğuna, hem de bu bağlılığın $h$'a göre düzgün biçimli olduğunu ifade eder (Amirali ve Amirali, 2018).

**Tanım 3.9. Yakınsaklık**

$u$, (3.1)-(3.2) probleminin kesin çözümü ve $y$'de herhangi bir şebekedeki bu probleme uygun fark problemin çözümü olsun. $z = y - u$ farkı hata fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

Eğer $h \to 0$ olduğunda $\|z\|_0 = \|y - u\|_1 \to 0$ ise ( söz konusu şebekedeki herhangi bir norm), bu durumda $y$ fark problemin çözümü $u$ probleminin çözümüne yakınsıyor denir. Ayrıca, yeteri kadar küçük $h$ sabitleri için

$$\|y - u\|_1 \le C h^k, k > 0$$

ise ( $C, h$'a bağlı olmayan sabittir) bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme $h$'ın $k$'yıncı derecesiyle yakınsar veya yaklaşık çözüm $O(h^k)$ kesinliğine sahiptir denir (Amirali ve Amirali, 2018).

**Tanım 3.10.**

$f(t)$, $\bar{I}$ 'de tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyon olsun.

i) $C^{(n)}(\bar{I})$ ifadesine $\bar{I}$ aralığında $t$'ye göre $n$. mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi denir.

ii) $\|f\|_{C(\bar{I})}$ ifadesine $\bar{I}$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar için maksimum norm denir (Amirali ve Amirali, 2018).

## 3.11. Gronwall Eşitsizlikleri

a) $p(t) \geq 0$ sürekli ve reel değerli bir fonksiyon, $v$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$$v(t) \leq C + \int_0^t p(s)v(s)ds$$

ise , bu durumda

$$v(t) \leq Ce^{\int_0^t p(s)ds}$$

eşitsizliği doğrudur (Amirali ve Amirali, 2018).

b) $g(t), K(t) \geq 0, h(t) \geq 0$ fonksiyonları $(0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun.

$$v(t) \leq g(t) + K(t) \int_0^t h(\tau)v(\tau)d\tau$$

sağlanıyorsa,

$$v(t) \leq g(t) + K(t) \int_0^t g(\tau)h(\tau)e^{\int_\tau^t h(\xi)d\xi}\, d\tau$$

eşitsizliği yazılabilir (Mitrinovic ve ark., 1991).

## 3.12. Bazı Formüller

Sonraki bölümlerde fark şemalarının kurulması ve incelenmesinde aşağıda verilen kuadratür formülleri kullanılacaktır.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx\right]\{\sigma f(b) + (1-\sigma)f(a)\}$$

$$+f[a,b]\int_a^b \left(x - x^{(\sigma)}\right)p(x)dx + R_n(f) \tag{3.6}$$

Burada $\sigma$-reel parametre, $p(x) \in C[a,b]$ ağırlık fonksiyonu, $f(x)$ belirli fonksiyon ve

$$R_n(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)\, K_{n-1}(x,\xi)d\xi, \;\; f \in C^n[a,b]\,, n = 1 \; veya \; n = 2$$

kalan terimdir.

$$K_s(x,\xi) = T_s(x-\xi) - (b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s, s = 0{,}1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a, \qquad f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$T_s(\lambda) = \frac{\lambda^s}{s!}, \lambda \geq 0;\; T_s(\lambda) = 0, \lambda < 0.$$

$$\int_a^b p(x)f'(x)dx = f[a,b]\int_a^b p(x)dx + \bar{R}_n(f) \tag{3.7}$$

burada $p(x) \in C^1[a,b]$ ve

$$\bar{R}_n(f) = -\int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)\, K_{n-1}(x,\xi)d\xi, \;\; f \in C^n[a,b]\,, n = 1 \; veya \; n = 2$$

kalan terimdir (Amirali ve Amirali 2018).

# 4. MATERYAL VE YÖNTEM

## 4.1. Analitik Yöntemler

Bu bölümde Bellman'ın (Bellman ve Cooke, 1963) adımlar yöntemi ve Laplace dönüşümü yardımıyla (1.1)-(1.2) probleminin analitik çözümünü bulmaya çalışacağız.

### 4.1.1. Adımlar metodu

(1.1)-(1.2) problemini tekrar ifade edelim:

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u'(t-r) + c(t)u(t-r) = f(t), t \in I,$$

$$u(t) = \varphi(t), t \in I_0; u'(0) = \gamma.$$

İlk olarak, $I_1 = (0, r]$ aralığındaki çözümü bulmak için $u(t) = \varphi(t)$ başlangıç fonksiyonunu göz önünde bulundurursak (1.1) denklemi,

$$u''(t) + a(t)u'(t) = f(t) - b(t)\varphi'(t-r) - c(t)\varphi(t-r), 0 < t \leq r$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denkleme dönüşür. $u(0) = \varphi(0)$ ve $u'(0) = \gamma$ başlangıç koşulları dikkate alırsak,

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)u'(t) = f_1(t), 0 < t \leq r, \\ u(0) = \varphi(0), u'(0) = \gamma \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini elde ederiz. Burada

$$f_1(t) = f(t) - b(t)\varphi'(t-r) - c(t)\varphi(t-r)$$

biçimindedir. $I_1 = (0, r]$ aralığındaki bu çözümü $u_1(t)$ olarak adlandıralım.

Şimdi $I_2 = (r, 2r]$ aralığında $u(t) = u_1(t)$ çözümünü göz önünde bulundurursak,

$$u''(t) + a(t)u'(t) = f(t) - b(t)u_1'(t-r) - c(t)u_1(t-r), r < t \leq 2r$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemini elde ederiz. $u(r) = u_1(r)$ ve $u'(r) = u1'r$ başlangıç koşulları dikkate alırsak,

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)u'(t) = f_2(t), r < t \leq 2r, \\ u(r) = u_1(r), u'(r) = u_1{}'(r) \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini elde ederiz. Burada

$$f_2(t) = f(t) - b(t)u_1'(t-r) - c(t)u_1(t-r)$$

biçimindedir. $I_2 = (r, 2r]$ aralığındaki bu çözümü $u_2(t)$ olarak adlandıralım.

Bu şekilde her adımda, önceki aralıktaki çözüm dikkate alınarak ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem elde edilerek istenilen aralıkta çözüm bulunabilir. Böylece,

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 < t \le r, \\ u_2(t), & r < t \le 2r, \\ \vdots & \vdots \\ u_m(t), & (m-1)r < t \le mr, \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi de yukarıda detaylı olarak açıklanan adımlar yöntemini kullanarak çözdüğümüz bir örnek verelim.

**Örnek 4.1.** $u''(t) + 2u'(t) + u'(t-1) - u(t-1) + e^{-t} = 0, 0 < t \le 2,$

$$u(t) = e^t,\ -1 \le t \le 0;\ u'(0) = -1$$

probleminin $(0,2]$ aralığındaki çözümünü bulalım.

**Çözüm:**

İlk olarak $0 < t \le 1$ aralığındaki çözümü bulalım:

$$u''(t) + 2u'(t) = -\varphi'(t-1) + \varphi(t-1) - e^{-t},$$

$$u''(t) + 2u'(t) = -e^{-t}$$

adi diferansiyel denklemini elde ederiz. $u(0) = 1,\ u'(0) = -1$ başlangıç koşullarıyla

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) = -e^{-t}, 0 < t \le 1, \\ u(0) = 1, u'(0) = -1 \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini yazabiliriz. Buradan $u_1(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}$ buluruz. Şimdi de $1 < t \le 2$ aralığındaki çözümü bulalım:

$$u''(t) + 2u'^{(t)} = -u_1'(t-1) + u_1(t-1) - e^{-t}, 1 < t \le 2,$$

$$u''(t) + 2u'(t) = 1 + e^{-2(t-1)} - e^{-t}$$

adi diferansiyel denklemini elde ederiz. Yine $u_1(1) = 1 - e^{-2} + e^{-1}$ ve $u_1'(1) = 2e^{-2} - e^{-1}$ başlangıç şartları ile beraber

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) = 1 + e^{-2(t-1)} - e^{-t}, 1 < t \le 2, \\ u(1) = 1 - e^{-2} + e^{-1}, u'(1) = 2e^{-2} - e^{-1} \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini elde ederiz. Buradan da

$$u_2(t) = \frac{1}{2}(1+t) + (1-2e)e^{-t} + \frac{1}{2}[(1+3t)e^2 - 2]e^{-2t}$$

buluruz. Böylece,

$$u(t) = \begin{cases} 1 + e^{-t} - e^{-2t}, & 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{2}(1+t) + (1-2e)e^{-t} + \frac{1}{2}[(1+3t)e^2 - 2]e^{-2t}, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

çözümüne ulaşırız.

### 4.1.2. Laplace dönüşümü ile çözüm

Matematik, fizik ve ekonomi gibi pek çok uygulamalı problemin çözümü için Laplace dönüşümü yaygın bir şekilde kullanılmaktadır (Rezai ve ark., 2013; Fatoorehchi ve Alidadi, 2017; Zarrinkammar, 2017, Eljaoui ve ark., 2018; Curato ve ark., 2018). Bu yüzden sadece matematikçiler için değil aynı zamanda fizikçi ve mühendisler için faydalı bir araçtır.

Bu bölümde,

$$u''(t) + au'(t) + bu'(t-r) + cu(t) + du(t-r) = f(t), 0 < t \le T \qquad (4.3)$$

$$u(t) = \varphi(t), -r \le t \le 0;\ u'(0) = \gamma \qquad (4.4)$$

problemini Laplace dönüşümü yöntemi yardımıyla çözeceğiz. Burada $r > 0$ ve $a, b, c, d$ reel sabitler ve $f(t)$ reel değerli bir fonksiyondur.

**Teorem 4.1.** (4.3) denklemindeki $f(t)$ fonksiyonu Teorem 3.2'nin şartlarını sağlasın. Bu durumda, (4.3)-(4.4) probleminin çözümü olan $u(t)$ ve onun türevleri olan $u'(t)$, $u''(t)$'nin $s > \alpha$ şartını sağlayan bütün $s$ değerleri için Laplace dönüşümü vardır (Cimen ve Uncu, 2020).

*İspat.* Öncelikle (4.3) denklemini $[0, t]$ aralığında integre edersek;

$$\int_0^t [u''(s) + au'(s) + bu'(s-r) + cu(s) + du(t-s)]ds = \int_0^t f(s)ds$$

$$u'(t) - u'(0) + a[u(t) - u(0)] + b[u(t-r) - u(-r)] + c\int_0^t u(s)ds$$

$$+ d\int_0^t u(s-r)ds = \int_0^t f(s)ds$$

$u'(0) = \gamma$, $u(0) = \varphi(0)$ ve $u(-r) = \varphi(-r)$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$u'(t) - \gamma + a[u(t) - \varphi(0)] + b[u(t-r) - \varphi(-r)] + c\int_0^t u(s)ds$$

$$+ d\int_0^t u(s-r)ds \tag{4.5}$$

elde ederiz. Yukarıdaki ifadeyi tekrar $[0, t]$ aralığında integre edersek;

$$\int_0^t u'(s)ds - \int_0^t \gamma ds + a\int_0^t [u(s) - \varphi(0)]ds + b\int_0^t [u(s-r) - \varphi(-r)]ds$$

$$+ c\int_0^t (t-s)u(s)ds + d\int_0^t (t-s)u(s-r)ds = \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

Gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$u(t) - \varphi(0) - \gamma t + a\int_0^t u(s)ds - a\varphi(0)t + b\int_0^t u(s-r)\,ds - b\varphi(-r)t$$

$$+ c\int_0^t (t-s)u(s)ds + d\int_0^t (t-s)u(s-r)ds = \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

$$u(t) - \varphi(0) - [\gamma + a\varphi(0) + b\varphi(-r)]t + \int_0^t [a + c(t-s)]u(s)ds$$

$$+ \int_0^t [b + d(t-s)]u(s-r)ds = \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

bulunur. $x = s - r$ dönüşümü yaparsak,

$$\int_0^t u(s-r)ds = \int_{-r}^{t-r} u(x)dx = \int_{-r}^{0} \varphi(x)dx + \int_0^{t-r} u(x)dx$$

$$\int_0^t (t-s)u(s-r)ds = \int_{-r}^{t-r} (t-x-r)u(x)dx$$

$$= \int_{-r}^{0} (t-x-r)\varphi(x)dx + \int_0^{t-r} (t-x-r)\,u(x)dx$$

olur. Bu ifadeleri yerine yazarsak,

$h_1(t) = -\varphi(0) - [\gamma + a\varphi(0) + b\varphi(-r)]t + \int_{-r}^{0}[b + d(t-s-r)]\varphi(s)ds$ olmak üzere,

$$u(t)+h_1(t) + \int_0^t [a + c(t-s)]u(s)ds + \int_0^{t-r} [b + d(t—s-r)]u(s)ds$$

$$= \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

elde ederiz.

$$\left|\int_0^{t-r} [b + d(t—s-r)]u(s)ds\right| \leq \int_0^t |[b + d(t—s-r)]u(s)|\,ds$$

eşitsizliğini göz önünde bulundurursak,

$$|u(t)| \leq |h_1(t)| + \left|\int_0^t [a + c(t-s)]u(s)ds\right| + \left|\int_0^{t-r} [b + d(t—s-r)]u(s)ds\right|$$

$$+ \left|\int_0^t (t-s)f(s)ds\right|$$

$$\leq |h_1(t)| + \int_0^t |[a + c(t-s)]||u(s)|ds + \int_0^t |[b + d(t—s-r)]||u(s)|ds$$

$$+ \int_0^t (t-s)|f(s)|ds$$

$$\leq |h_1(t)| + \int_0^t [|a + c(t-s)| + |b + d(t—s-r)|]|u(s)|ds + \int_0^t (t-s)|f(s)|ds$$

olur. $h_2(t) = |a + ct| + |b + d(t+r)|$ olmak üzere,

$$\leq |h_1(t)| + h_2(t)\int_0^t |u(s)|ds + \int_0^t (t-s)|f(s)|ds$$

$e^{-\alpha t}|f(t)| < M_1, (t > 0)$ olmak üzere,

$$\int_0^t (t-s)|f(s)|ds \leq \int_0^t M_1\,(t-s)e^{as}\,ds$$

$$= \frac{M_1}{\alpha^2}[e^{\alpha t} - 1 - \alpha t]$$

$$\leq \frac{M_1 e^{\alpha t}}{\alpha^2}$$

Buradan

$$|u(t)| \leq |h_1(t)| + \frac{M_1 e^{\alpha t}}{\alpha^2} + h_2(t)\int_0^t |u(s)|\,ds$$

elde ederiz. Öte yandan,

$$|h_1(t)| \leq (1+|a|)\varphi(0) + \int_{-r}^{0}[|b| + |d|(|\tau| + r)]|\varphi(\tau)|d\tau + t[|\gamma| + |b||\varphi(-r)|$$

$$+ |d|\int_{-r}^{0}|\varphi(\tau)|d\tau$$

$$h_2(t) \leq |a| + |b + dr| + [|c| + |d|]t$$

Gronwall eşitsizliğini kullanırsak,

$$|u(t)| \leq |h_1(t)| + \frac{M_1 e^{\alpha t}}{\alpha^2} + h_2(t)\int_0^t [\,|h_1(\tau)| + \frac{M_1 e^{\alpha t}}{\alpha^2}]e^{\int_\tau^t h_2(\xi)d\xi}\,d\tau$$

$$A_1 = (1+|a|)|\varphi(0)| + \int_{-r}^{0}[|b| + |d|(|\tau| + r)]|\varphi(\tau)|d\tau,$$

$$B_1 = |b||\varphi(-r)| + |d|\int_{-r}^{0}|\varphi(\tau)|d\tau,$$

$$A_2 = |a| + |b + dr| \text{ ve } B_2 = |c| + |d|$$

olmak üzere

$$\leq A_1 + B_1 t + \frac{M_1 e^{\alpha t}}{\alpha^2} + (A_2 + B_2 t) \int_0^t [(A_1 + B_1 \tau) + \frac{M_1 e^{\alpha \tau}}{\alpha^2}] e^{\int_\tau^t (A_1 + B_1 \xi) d\xi} d\tau$$

$$\leq A_1 + B_1 t + \frac{M_1 e^{\alpha t}}{\alpha^2} + (A_2 + B_2 t) \int_0^t [(A_1 + B_1 \tau) + \frac{M_1 e^{\alpha \tau}}{\alpha^2}] \left[ e^{A_1 t + B_1 \frac{t^2}{2}} - e^{A_1 \tau + B_1 \frac{\tau^2}{2}} \right] d\tau$$

$$\leq A_1 + B_1 t + \frac{M_1 e^{\alpha t}}{\alpha^2} + (A_2 + B_2 t) e^{A_1 t + B_1 \frac{t^2}{2}} \int_0^t \left[ (A_1 + B_1 \tau) + \frac{M_1 e^{\alpha \tau}}{\alpha^2} \right] d\tau$$

$$\leq A_1 + B_1 t + \frac{M_1 e^{\alpha t}}{\alpha^2} + (A_2 + B_2 t) e^{A_1 t + B_1 \frac{t^2}{2}} [A_1 t + B_1 \frac{t^2}{2} + \frac{M_1 (e^{\alpha t} - 1)}{\alpha^3}]$$

Buradan $u(t)$'nin Laplace dönüşümünün varlık koşulunu sağladığını göstermiş olduk. Şimdi de $u'(t)$ ve $u''(t)$ için sırasıyla (4.5) ve (4.3) denklemlerinden benzer sonuçları kolayca elde ederiz (Cimen ve Uncu, 2020).

**Teorem 4.2** $\varphi(t)$ ve $\varphi'(t)$ fonksiyonları $[-r, 0]$ aralığında sürekli olsun ve $F(s)$, (4.3) denklemindeki $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olsun. Bu durumda (4.3)-(4.4) denkleminin analitik çözümü

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{T(s) + F(s)}{K(s)} \right\}$$

biçimindedir. Burada

$$K(s) = s^2 + as + c + bse^{-sr} + de^{-sr},$$

$$T(s) = \gamma + (s + a + be^{-sr})\varphi(0) - be^{-sr} \int_{-r}^{0} \varphi'(t)\, e^{-st} dt$$

$$-ce^{-sr} \int_{-r}^{0} \varphi(t)\, e^{-st} dt$$

biçimindedir (Cimen ve Üncü, 2020).

*İspat.* (4.3) denklemini $e^{-st}$ ile çarpıp $[0, \infty)$ aralığında integrallersek,

$$\int_0^\infty u''(t)e^{-st}dt + a\int_0^\infty u'(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty u'(t-r)e^{-st}dt + c\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt$$

$$+ d\int_0^\infty u(t-r)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (4.6)$$

elde ederiz. Eşitliğin solundaki birinci ve ikinci integraller Teorem 3.3.'ten

$$\int_0^\infty u''(t)e^{-st}dt = -\gamma - s\varphi_0(0) + s^2\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt$$

$$a\int_0^\infty u'(t)e^{-st}dt = -a\varphi_0(0) + as\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde eşitliğin solundaki üçüncü integrale $x = t - r$ dönüşümü uygulayıp Teorem 3.3'e göre,

$$b\int_0^\infty u'(t-r)e^{-st}dt = b\int_{-r}^\infty u'(t)e^{-s(t+r)}dt$$

$$= be^{-sr}\int_{-r}^0 \varphi_0{}'(t)\,e^{-st}dt - be^{-sr}\varphi_0(0) + be^{-sr}s\int_0^\infty u(t)\,e^{-st}dt$$

olur. Eşitliğin solundaki beşinci integrale $x = t - r$ dönüşümü uygularsak

$$d\int_0^\infty u(t-r)e^{-st}dt = d\int_{-r}^\infty u(x)e^{-s(x+r)}dx$$

$$= de^{-sr}\int_{-r}^0 u(x)e^{-sx}dx + de^{-sr}\int_0^\infty u(x)e^{-sx}dx$$

$$= de^{-sr}\int_{-r}^0 \varphi(x)e^{-sx}dx + de^{-sr}\int_0^\infty u(x)e^{-sx}dx$$

olur. Bunları tekrar (4.6) denkleminde yerlerine yazarsak,

$$(s^2 + as + c + bse^{-sr} + de^{-sr})\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt$$

$$= \gamma + (s + a + be^{-sr})\varphi(0) - be^{-sr}\int_{-r}^0 \varphi'(t)\,e^{-st}dt$$

$$-de^{-sr}\int_{-r}^{0}\varphi(t)\,e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

elde ederiz. Buradan

$$K(s)=s^2+as+c+bse^{-sr}+de^{-sr}$$

$$T(s)=\gamma+(s+a+be^{-sr})\varphi(0)-be^{-sr}\int_{-r}^{0}\varphi'(t)\,e^{-st}dt$$

$$-ce^{-sr}\int_{-r}^{0}\varphi(t)\,e^{-st}dt$$

$$F(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

olarak alınırsa

$$\int_{0}^{\infty}u(t)e^{-st}dt=\frac{T(s)+F(s)}{K(s)}$$

bulunur. Buradan da ters Laplace dönüşümünü kullanarak $u(t)$ çözümüne ulaşırız (Cimen ve Uncu, 2020).

Şimdi de Laplace dönüşümü yöntemini kullanarak, ikinci mertebeden gecikmeli başlangıç-değer problemi için iki örnek çözelim.

**Örnek 4.2.**

$u''(t)-3u'(t)+u'(t-1)+2u(t)-u(t-1)=0, t>0$

$u(t)=e^t, -1\le t\le 0;\ u'(0)=1,$

problemini Laplace dönüşümü ile çözelim (Cimen ve Uncu, 2020).

Şimdi,

$$F(s)=0,$$

$$T(s)=s-2+e^{-s},$$

$$K(s)=s^2-3s+2+(s-1)e^{-s}$$

değerlerini kullanırsak,

$$\int_{0}^{\infty}u(t)e^{-st}dt=\frac{T(s)+F(s)}{K(s)}$$

$$= \frac{s-2+e^{-s}}{s^2-3s+2+(s-1)e^{-s}} = \frac{1}{s-1}$$

elde ederiz. Böylece

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$$

bulunur.

**Örnek 4.3.**

$$u''(t) - 3u'(t) + u'(t-1) + 2u(t) - u(t-1) = 1, t > 0,$$
$$u(t) = e^t, -1 \le t \le 0;\ u'(0) = 1,$$

problemini Laplace dönüşümü ile çözelim (Cimen ve Uncu, 2020). Yine

$$F(s) = \frac{1}{s},$$
$$T(s) = s - 2 + e^{-s},$$
$$K(s) = s^2 - 3s + 2 + (s-1)e^{-s}$$

ifadelerini kullanarak

$$\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \frac{T(s)+F(s)}{K(s)}$$

$$= \frac{s-2+e^{-s}+\frac{1}{s}}{s^2-3s+2+(s-1)e^{-s}}$$

$$= \frac{1}{s(s-1)(s-2+e^{-s})} + \frac{1}{s-1}$$

elde ederiz. Böylece,

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)(s-2+e^{-s})} + \frac{1}{s-1}\right\}$$

buluruz. Bu örnekte, bu son ifadenin ters Laplace dönüşümünü bulmak mümkün olmadığından $u(t)$ çözümünün açık ifadesini bulamıyoruz.

## 4.2. Nümerik Yöntemler

Bu bölümde, (1.1)-(1.2) probleminin çözümü için bazı nümerik yöntemler ele alacağız. Öncelikle, nümerik yöntemde kullanacağımız problemin analitik çözümünün bazı özelliklerini araştıracağız.

### 4.2.1. Bazı asimptotik değerlendirmeler

**Lemma 4.1:** $a, b, c, f \in C(\bar{I})$ ve $\varphi \in C^1(I_0)$ olsun. Bu durumda (1.1)-(1.2) probleminin analitik çözümü için,

$$\|u\|_{\infty,p} \le C_p, 1 \le p \le m, \tag{4.7}$$

$$\|u'\|_{\infty,p} \le \bar{C}_p, 1 \le p \le m, \tag{4.8}$$

değerlendirmeler doğrudur. Burada

$$C_1 = \left[|\gamma| + \|f\|_{1,1} + \|b\|_{1,1}\|\varphi'\|_{\infty,0} + \|c\|_{1,1}\|\varphi\|_{\infty,0}\right],$$

$$\bar{C}_1 = |\gamma| + \alpha^{-1}\left[\|f\|_{\infty,1} + \|b\|_{\infty,1}\|\varphi'\|_{\infty,0} + \|c\|_{\infty,1}\|\varphi\|_{\infty,0}\right],$$

$$C_p = \alpha^{-1}\left[\bar{C}_{p-1} + \|f\|_{1,p} + \|b\|_{1,p}\bar{C}_{p-1} + \|c\|_{1,p}C_{p-1}\right],$$

$$\bar{C}_p = \bar{C}_{p-1} + \alpha^{-1}\left[\|f\|_{\infty,p} + \|b\|_{\infty,p}\bar{C}_{p-1} + \|c\|_{\infty,p}C_{p-1}\right],$$

biçimdedir.

*İspat.*

İspat için $p$'ye göre matematiksel indüksiyon prensibini kullanacağız. Bunun için ilk olarak (1.1) denkleminden

$$u'(t) = u'(r_{p-1})e^{-\int_{r_{p-1}}^{t} a(s)ds} + \int_{r_{p-1}}^{t} F(\xi)e^{-\int_{\xi}^{t} a(s)ds}d\xi, \tag{4.9}$$

ve

$$\begin{aligned} u(t) &= u'(r_{p-1}) \int_{r_{p-1}}^{t} e^{-\int_{r_{p-1}}^{\xi} a(s)ds}\, d\xi + \int_{r_{p-1}}^{t} ds \int_{r_{p-1}}^{s} F(s)e^{-\int_{\xi}^{t} a(\eta)d\eta}\, d\xi \\ &= u'(r_{p-1}) \int_{r_{p-1}}^{t} e^{-\int_{r_{p-1}}^{\xi} a(s)ds}\, d\xi + \int_{r_{p-1}}^{t} d\xi F(\xi) \int_{\xi}^{t} e^{-\int_{\xi}^{t} a(\eta)d\eta}\, d\xi, \end{aligned} \tag{4.10}$$

yazabiliriz. Burada

$$F(t) = f(t) - b(t)u'(t-r) - c(t)u(t-r)$$

biçimindedir. Şimdi $p = 1$ için $(t \in I_1)$ (4.10) eşitliğinden,

$$|u(t)| \le |u'(0)| \int_0^t e^{-\int_0^t a ds}\, d\xi + \int_0^t d\xi |F(\xi)| \int_\xi^t e^{-\int_\xi^s a(\eta) d\eta} ds$$

$$\le |\gamma| \int_0^t e^{-a\xi}\, d\xi + \int_0^t [|f(\xi)| + |b(\xi)||u'(\xi - r)| + |c(\xi)||u(\xi - r)|] \int_\xi^t e^{-a(s-\xi)} ds$$

$$\le \alpha^{-1}|\gamma|(1 - e^{-a\xi}) + \alpha^{-1} \int_0^t [|f(\xi)| + |b(\xi)||u'(\xi - r)| + |c(\xi)||u(\xi - r)|](1 - e^{-a(t-\xi)}) d\xi$$

$$|u(t)| \le \alpha^{-1}[|\gamma| + \|f\|_{1,1} + \|b\|_{1,1}\|\varphi'\|_{\infty,0} + \|c\|_{1,1}\|\varphi\|_{\infty,0}] \equiv C_1$$

olur. Şimdi de (4.9) eşitliğinden,

$$|u'(t)| \le u'(0)e^{-\alpha t} + \int_0^t [|f(\xi)| + |b(\xi)||u'(\xi - r) + |c(\xi)||u(\xi - r)|] e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi$$

$$\le |\gamma| + \left[\|f\|_{\infty,1} + \|b\|_{\infty,1}\|\varphi'\|_{\infty,0} + \|c\|_{\infty,1}\|\varphi\|_{\infty,0}\right]\alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha t})$$

$$\le |\gamma| + \alpha^{-1}\left[\|f\|_{\infty,1} + \|b\|_{\infty,1}\|\varphi'\|_{\infty,0} + \|c\|_{\infty,1}\|\varphi\|_{\infty,0}\right] \equiv \bar{C}_1$$

olur. $p = k$ için (4.7) ve (4.8) eşitsizlikleri sağlansın. Yani,

$$C_k = \alpha^{-1}[\bar{C}_{k-1} + \|f\|_{1,k} + \|b\|_{1,k}\bar{C}_{k-1} + \|c\|_{1,k}C_{k-1}]$$

$$\bar{C}_k = \bar{C}_{k-1} + \alpha^{-1}\left[\|f\|_{\infty,k} + \|b\|_{\infty,k}\bar{C}_{k-1} + \|c\|_{\infty,k}C_{k-1}\right]$$

olsun. (4.10) denkleminden,

$$|u(t)| \le |u'(r_k)| \int_{r_k}^t e^{-(a-r_k)}\, d\xi + \int_{r_k}^t d\xi |F(\xi)| \int_\xi^t e^{-a(s-\xi)}\, d\xi$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan

$$|u(t)| \le \alpha^{-1}|u'(r_k)|(1 - e^{-(t-r_k)})$$

$$+\alpha^{-1} \int_{r_k}^t [|f(\xi)| + |b(\xi)||u'(\xi - r)| + |c(\xi)||u(\xi - r)|](1 - e^{-a(t-\xi)}) d\xi$$

$$\le \alpha^{-1}\bar{C}_k + \alpha^{-1}[\|f\|_{1,k+1} + \|b\|_{1,k+1}\bar{C}_k + \|c\|_{1,k+1}C_k] \equiv C_{k+1}$$

elde ederiz. Yine (4.9) denkleminden,

$$|u'(t)| \le |u'(r_k)|e^{-(t-r_k)} + \int_{r_k}^{t} [|f(\xi)| + |b(\xi)||u'(\xi - r)| + |c(\xi)||u(\xi - r)|](e^{-a(t-\xi)})d\xi$$

yazabiliriz. Buradan

$$|u'(t)| \le \bar{C}_k + \alpha^{-1}[\|f\|_{\infty,k+1} + \|b\|_{\infty,k+1}\bar{C}_k + \|c\|_{\infty,k+1}C_k \equiv \bar{C}_{k+1}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

### 4.2.2. Fark şemasının kurulması

$\omega_{N_0}$, $\bar{I}$ aralığında düzgün bir şebeke olsun:

$$\omega_{N_0} = \{t_i = ih, i = 1,2, \dots N_0, h = T/N_0 = r/N\}.$$

Ayrıca, her $I_p = (1 \le p \le m)$ alt aralığında $N$ adet düğüm noktası içeren

$$\omega_{N_p} = \{t_i : (p-1)N : +1 \le i \le pN, \le p \le m\}$$

şebekesini tanımlayalım. Sonuç olarak

$$\omega_{N_0} = \cup_{p=1}^{m} \omega_{N_p}$$

olacaktır.

(1.1) ve (1.2) ile verilen probleminin fark yaklaşımı için problemi $\psi_i(t)$ baz fonksiyonu ile çarpıp $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ aralığında integrallersek:

$$h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} Lu\,\psi_i(t)dt = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t)\,\psi_i(t)dt \qquad (4.11)$$

yazabiliriz. Burada

$$\psi_i(t) = \begin{cases} \psi_i^{(1)}(t), & t_{i-1} < t < t_i, \\ \psi_i^{(2)}(t), & t_i < t < t_{i+1}, \end{cases}$$

biçiminde olup

$$\psi_i^{(1)}(t) = \frac{\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\int_s^t a(\eta)d\eta}\,ds}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\int_s^{t_i} a(\eta)d\eta}\,ds},$$

$$\psi_i^{(2)}(t) = \left[1 - \frac{\int_{t_i}^{t} e^{\int_s^{t_{i+1}} a(\eta)d\eta}\,ds}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\int_s^{t_{i+1}} a(\eta)d\eta}\,ds}\right] e^{\int_{t_i}^{t} a(\tau)d\tau},$$

sırasıyla

$$\begin{cases}\psi_i''(t) - [a(t)\psi_i(t)]' = 0, t_{i-1} < t < t_i, \\ \psi_i(t_{i-1}) = 0, \quad \psi_i(t_i) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi_i''(t) - [a(t)\psi_i(t)]' = 0, t_i < t < t_{i+1}, \\ \psi_i(t_i) = 1, \quad \psi_i(t_{i+1}) = 0, \end{cases}$$

problemlerinin çözümleridir. (4.11) ifadesini yeniden düzenlersek:

$$h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} u''(t)\,\psi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} a(t)u'(t)\,\psi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} b(t)u'(t-r)\,\varphi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} c(t)u(t-r)\,\psi_i(t)dt = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t)\,\psi_i(t)dt \qquad (4.12)$$

elde ederiz. (4.12) denkleminin solundaki ilk integrale kısmi integrasyon uygular ve $\psi_i(t_{i-1}) = 0$ ve $\psi_i(t_{i+1}) = 0$ olduğunu dikkate alırsak:

$$h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} u''(t)\,\psi_i(t)dt = -h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} u'(t)\psi'_i(t)dt$$

elde ederiz. Bu eşitliği (4.12)'de dikkate alırsak,

$$-h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} u'(t)\psi'_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} a(t)u'(t)\,\psi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} b(t)u'(t-r)\,\varphi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} c(t)u(t-r)\,\psi_i(t)dt = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t)\,\psi_i(t)dt \qquad (4.13)$$

olur. Şimdi, (4.13) eşitliğinin solundaki ilk üç integrale (3.7) formülünü $(t_{i-1}, t_i)$ alt aralığında uygularsak,

$$-h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t)\psi_i{}^{(1)\prime}(t)dt = -h^{-1}u_{\bar{t},i}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i{}^{(1)\prime}(t)dt + R_i^{(1)},$$

$$R_i^{(1)} = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \psi_i{}^{(1)\prime\prime}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi) K_0(t,\xi) d\xi,$$

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) u'(t)\, \psi_i{}^{(1)}(t) dt = h^{-1} u_{\bar{t},i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) \psi_i{}^{(1)}(t) dt + R_i^{(2)},$$

$$R_i^{(2)} = -h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \left[a(t) \psi_i{}^{(1)}(t)\right]' \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi) K_0(t,\xi) d\xi,$$

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t) u'(t-r)\, \psi_i{}^{(1)}(t) dt = h^{-1} u_{\bar{t},i-N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)\, \psi_i{}^{(1)}(t) dt + R_i^{(3)},$$

$$R_i^{(3)} = -h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \left[b(t) \psi_i{}^{(1)}(t)\right]' \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi - r) K_0(t,\xi) d\xi,$$

(4.13) eşitliğinin solundaki son integrale ise (3.6) formülünü $(t_{i-1}, t_i)$ alt aralığında uygularsak,

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} c(t) u(t-r)\, \psi_i{}^{(1)}(t) dt = h^{-1} \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} c(t) \psi_i{}^{(1)}(t) dt \right] u_{i-N}$$

$$+ h^{-1} u_{\bar{t},i-N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) c(t) \psi_i{}^{(1)}(t) dt + R_i^{(4)},$$

$$R_i^{(4)} = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt c(t) \psi_i{}^{(1)}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(\xi) K_0(t,\xi) d\xi,$$

elde ederiz. Benzer şekilde (4.13) eşitliğinin solundaki ilk üç integrale (3.7) formüllerini $(t_i, t_{i+1})$ alt aralığında uygularsak,

$$-h^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(t) \psi_i{}^{(2)\prime}(t) dt = -h^{-1} u_{t,i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi_i{}^{(2)\prime}(t) dt + \bar{R}_i^{(1)},$$

$$\bar{R}_i^{(1)} = h^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \psi_i{}^{(2)\prime\prime}(t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(\xi) K_0(t,\xi) d\xi,$$

$$h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(t)a(t)\psi_i^{(2)}(t)\,dt = h^{-1}u_{t,i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} a(t)\psi_i^{(2)}(t)dt + \bar{R}_i^{(2)},$$

$$\bar{R}_i^{(2)} = -h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt\left[a(t)\psi_i^{(2)}(t)\right]'\int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(\xi)K_0(t,\xi)d\xi,$$

$$h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(t-r)\,b(t)\psi_i^{(2)}(t)dt = h^{-1}u_{t,i-N}\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t)\,\psi_i^{(2)}(t)dt + \bar{R}_i^{(3)},$$

$$\bar{R}_i^{(3)} = -h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt\left[b(t)\psi_i^{(2)}(t)\right]'\int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(\xi-r)K_0(t,\xi)d\xi,$$

ve (4.13) eşitliğinin solundaki son integrale ise (3.7) formüllerini $(t_i, t_{i+1})$ alt aralığında uygularsak,

$$h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} c(t)u(t-r)\,\varphi_i^{(2)}(t)dt$$

$$= h^{-1}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} c(t)\varphi_i^{(2)}(t)dt\right]u_{i-N} + h^{-1}u_{t,i-N}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_i)c(t)\varphi_i^{(2)}(t)dt + \bar{R}_i^{(4)},$$

$$\bar{R}_i^{(4)} = h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} dtc(t)\psi_i^{(2)}(t)\int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(\xi)K_0(t,\xi)d\xi,$$

elde ederiz. Buradan $u_{\bar{t},i} = u^0_{t,i} - \frac{h}{2}u_{\bar{t}t,i}$ ve $u_{t,i} = u^0_{t,i} + \frac{h}{2}u_{\bar{t}t,i}$ eşitliklerini dikkate alırsak:

$$\ell u \equiv A_i u_{\bar{t}t,i} + B_i u_{\bar{t}t,i-N} + C_i u^0_{t,i} + D_i u^0_{t,i-N} + E_i u_{i-N} = F_i - R_i, 1 \le i \le N_0, \qquad (4.14)$$

kesin fark şemasını elde ederiz. Burada

$$A_i = 1 - \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)\psi_i^{(1)}(t)dt + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} a(t)\psi_i^{(2)}(t)dt,$$

$$B_i = -\frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}[b(t)\,\psi_i^{(1)}(t) + (t-t_i)c(t)]dt + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[b(t)\,\psi_i^{(2)}(t) + (t-t_i)c(t)]dt,$$

$$C_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)\psi_i{}^{(1)}(t)dt + h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} a(t)\psi_i{}^{(2)}(t)dt,$$

$$D_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} [b(t)\,\psi_i{}^{(1)}(t) + (t-t_i)c(t)]dt$$

$$+h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} [b(t)\,\psi_i{}^{(2)}(t) + (t-t_i)c(t)]dt,$$

$$E_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} c(t)\psi_i{}^{(1)}(t)dt + h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} c(t)\psi_i{}^{(2)}(t)dt,$$

$$F_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,\psi_i{}^{(1)}(t)dt + h^{-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,\psi_i{}^{(2)}(t)dt,$$

$$R_i = R_i^{(3)} + R_i^{(4)} + \bar{R}_i^{(3)} + \bar{R}_i^{(4)}$$

$$= h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} dt\{c(t)\,\psi_i(t) - \frac{d}{dt}[b(t)\psi_i(t)]\}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} u'(\xi-r)K_0(t,\xi)d\xi, \qquad (4.15)$$

biçimindedir. Şimdi de (1.2) ile verilen başlangıç şartı için de benzer bir yaklaşım verelim:

$$h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} Lu(t)\,\psi^{(0)}(t)dt = h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\psi^{(0)}(t)dt, \qquad (4.16)$$

burada

$$\psi_i{}^{(0)}(t) = \left[1 - \frac{\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^{t_1} a(\eta)d\eta}\,ds}{\int_{t_0}^{t_1} e^{\int_s^{t_1} a(\eta)d\eta}\,ds}\right] e^{\int_0^t a(\tau)d\tau},$$

fonksiyonu

$$\begin{cases}\psi_i{}^{(0)''}(t) - \left[a(t)\psi_i{}^{(0)}(t)\right]' = 0, t_0 < t < t_1,\\ \psi_i{}^{(0)}(t_0) = 1, \psi_i{}^{(0)}(t_1) = 0,\end{cases}$$

probleminin çözümüdür. (4.16) eşitliğini yeniden düzenlersek,

$$h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} u''(t)\psi_i^{(0)}(t)dt + h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} a(t)u'(t)\,\psi_i^{(0)}(t)dt$$

$$+ h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} b(t)u'(t)(t-r)\psi_i^{(0)}(t)dt + h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} c(t)u(t-r)\psi_i^{(0)}(t)dt$$

$$= h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\psi_i^{(0)}(t)dt.$$

Eşitliğin solundaki ilk integrale kısmi integrasyon uygular ve $u'(0) = \gamma$ şartını dikkate alırsak,

$$h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} u''(t)\psi_i^{(0)}(t)dt = h^{-1}u'(t)\psi_i^{(0)}(t)|_{t_0}^{t_1} - h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} u'(t)\,\psi_i^{(0)\prime}(t)dt$$

$$= h^{-1}u'(t_1)\psi_i^{(0)}(t_1) - h^{-1}u'(t_0)\psi_i^{(0)}(t_0) - h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} u'(t)\,\psi_i^{(0)\prime}(t)dt$$

$$= -h^{-1}\gamma - h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} u'(t)\,\psi_i^{(0)\prime}(t)dt$$

elde ederiz. Bu ifadeyi tekrar bir önceki denklemde yerine yazarsak

$$-h^{-1}\gamma - h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} u'(t)\,\psi_i^{(0)\prime}(t)dt + h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} a(t)u'(t)\psi_i^{(0)}(t)\,dt$$

$$+ h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} b(t)u'(t)(t-r)\psi_i^{(0)}(t)dt + h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} c(t)u(t-r)\psi_i^{(0)}(t)dt$$

$$= h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\psi_i^{(0)}(t)dt$$

olur. Bu son eşitliğin solundaki ilk üç integrale (3.7) formülünü ve son integrale de (3.6) formülünü $(t_0, t_1)$ aralığında uygularsak,

$$-h^{-1}\int_{t_0}^{t_1} u'(t)\,\psi_i^{(0)\prime}(t)dt = -h^{-1}u_{t,0}\int_{t_0}^{t_1} \psi_i^{(0)\prime}(t)dt + r_1$$

$$r_1 = h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} dt\, \psi_i{}^{(0)\prime\prime}(t) \int_{t_0}^{t_1} u'(\xi) K_0(x,\xi) d\xi$$

$$h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} a(t) u'(t)\, \psi_i{}^{(0)}(t) dt = h^{-1} u_{t,0} \int_{t_0}^{t_1} a(t) \psi_i{}^{(0)}(t) dt + r_2$$

$$r_2 = -h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} dt [\psi_i{}^{(0)}(t) a(t)]' \int_{t_0}^{t_1} u'(\xi - r) K_0(x,\xi) d\xi$$

$$h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} b(t) u'(t-r) \psi_i{}^{(0)}(t)\, dt = h^{-1} u_{t,-N} \int_{t_0}^{t_1} b(t)\, \psi_i{}^{(0)}(t) dt + r_3$$

$$r_3 = -h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} dt [b(t)\, \psi_i{}^{(0)}(t)]' \int_{t_0}^{t_1} u'(\xi - r)\, K_0(t,\xi) d\xi$$

$$h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} c(t) \psi_i{}^{(0)}(t) u(t-r) dt = h^{-1} u_{-N} \int_{t_0}^{t_1} c(t) \psi_i{}^{(0)}(t) dt$$

$$+ h^{-1} u_{t,-N} \int_{t_0}^{t_1} (t - t_0) c(t)\, \psi_i{}^{(0)}(t) dt + r_4$$

$$r_4 = h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} dt c(t) \psi_i{}^{(0)}(t) \int_{t_0}^{t_1} u'(\xi - r)\, K_0(t,\xi) d\xi$$

elde ederiz. Buradan $r_1 + r_2 = 0$ olduğunu dikkate alır ve gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$A_0 u_{t,0} = B_0 - r^{(0)}$$

elde ederiz. Burada

$$A_0 = h^{-1} \left[ 1 + \int_{t_0}^{t_1} a(t) \psi_i{}^{(0)}(t) dt \right],$$

$$B_0 = h^{-1} \gamma + h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} f(t)\, \psi_i{}^{(0)}(t) dt - h^{-1} u_{-N} \int_{t_0}^{t_1} c(t) \psi_i{}^{(0)}(t) dt,$$

$$-h^{-1}u_{t,-N}\int_{t_0}^{t_1}[b(t)+tc(t)]\psi_i{}^{(0)}(t)dt,$$

ve $r_3+r_4=r^{(0)}$ olmak üzere

$$r^{(0)}=-h^{-1}\int_{t_0}^{t_1}dt[b(t)\,\psi_i{}^{(0)}(t)]'\int_{t_0}^{t_1}u'(\xi-r)\,K_0(t,\xi)d\xi$$
$$+h^{-1}\int_{t_0}^{t_1}dtc(t)\psi_i{}^{(0)}(t)\int_{t_0}^{t_1}u'(\xi-r)\,K_0(t,\xi)d\xi \qquad (4.17)$$

biçimindedir. Böylece (1.1)-(1.2) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki fark şemasını önerebiliriz:

$$\ell y_i\equiv A_i y_{\overline{t}t,i}+B_i y_{\overline{t}t,i-N}+C_i y^0_{t,i}+D_i y^0_{t,i-N}+E_i y_{i-N}=F_i, 1\le i\le N_0 \quad (4.18)$$

$$y_i=\varphi_i,\ -N\le i\le 0;\quad \ell y_0\equiv A_0 y_{t,0}=B_0. \qquad (4.19)$$

Alternatif olarak, (1.1)-(1.2) problemi için Euler metodunu kullanarak, aşağıdaki şemayı da önerebiliriz:

$$\ell y_i\equiv y_{\overline{t}t,i}+a_i y^0_{t,i}+b_i y^0_{t,i-N}+c_i y_{i-N}=f_i, 1\le i\le N_0 \qquad (4.20)$$

$$y_i=\varphi_i,\ -N\le i\le 0;\quad \ell y_0\equiv y_{t,0}=\gamma \qquad (4.21)$$

### 4.2.3. Hata analizi

Sunduğumuz yöntemin yakınsaklığını araştırmak üzere ilk olarak $z_i=y_i-u_i$, $0\le i\le N_0$ hata fonksiyonunu tanımlıyoruz. Öyle ki, bu fonksiyon

$$\ell z_i=R_i, 1\le i\le N_0, \qquad (4.22)$$

$$z_i=0, -N_0\le i\le 0;\ \ell z_0=r^{(0)} \qquad (4.23)$$

probleminin çözümüdür. Burada $R_i$ ve $r^{(0)}$ sırasıyla (4.15) ve (4.17) ile verilen ifadeler kalan terimlerdir.

**Lemma 4.2.** $a,c,f\in C(\overline{I}), b\in C^1(\overline{I})$ ve $\psi\in C(I_0)$ olsun. $R_i$ ve $r^{(0)}$ hata terimleri için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\|R\|_{\infty,N_0}\le CN^{-1},$$

$$\left|r^{(0)}\right|\le CN^{-1}$$

*İspat.* (4.15)'den

$$R_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} dt\{c(t)\,\psi_i(t) - \frac{d}{dt}[b(t)\psi_i(t)]\} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} u'(\xi - r)K_0(t,\xi)d\xi$$

ve $\psi_i^{'}(t) = a(t)\psi_i(t) + C$ olduğu göz önünde bulundurup gerekli düzenlemeleri yaparsak;

$$R_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} dt[c(t)\,\psi_i(t) - b^{'}(t)\psi_i(t) - a(t)b(t)\psi_i(t)$$

$$- Cb(t)] \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} u'(\xi - r)K_0(t,\xi)d\xi$$

elde ederiz. Böylece,

$$|R_i| \le Ch^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} dt[|c(t)| + |b^{'}(t)| + |c(t)| + |a(t)||b(t)|]\psi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} |u'(\xi - r)|\,d\xi$$

$$\le Ch^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} dt\psi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} |u'(\xi - r)|\,d\xi$$

buluruz. Buradan da, Lemma 4.1 ve $0 < \psi_i(t) \le C$ ifadelerinden,

$$|R_i| \le Ch$$

sonucuna ulaşırız. Şimdi de $r^{(0)}$ ifadesini benzer şekilde değerlendireceğiz. (4.17)'den

$$r^{(0)} = -h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} dt[b(t)\,\psi_i{}^{(0)}(t)]' \int_{t_0}^{t_1} u^{'}(\xi - r)\,K_0(t,\xi)d\xi$$

$$+ h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} dtc(t)\psi_i{}^{(0)}(t) \int_{t_0}^{t_1} u^{'}(\xi - r)\,K_0(t,\xi)d\xi$$

ve $\psi_i{}^{(0)\prime}(t) = a(t)\psi_i{}^{(0)}(t) + C$ olduğunu göz önünde bulundurursak,

$$r^{(0)} = h^{-1} \int_{t_0}^{t_1} dt[c(t)\,\psi_i{}^{(0)}(t) - b^{'}(t)\psi_i{}^{(0)}(t) - a(t)b(t)\psi_i{}^{(0)}(t)$$

$$- Cb(t)] \int_{t_0}^{t_1} u'(\xi - r)K_0(t,\xi)d\xi$$

yazabiliriz. Buradan

$$\left|r^{(0)}\right| \le Ch^{-1} \int_{t_0}^{t_1} dt[|c(t)| + |b'(t)| + |c(t)| + |a(t)||b(t)|]\psi_i{}^{(0)}(t) \int_{t_0}^{t_1} |u'(\xi - r)|\, d\xi$$

elde ederiz. Yine Lemma 4.1 ve $0 < \psi_i{}^{(0)}(t) \le C$ ifadelerinden,

$$\left|r^{(0)}\right| \le Ch$$

sonucuna ulaşırız.

**Lemma 4.2.** $z_i$, (4.22)-(4.23) ile verilen problemin çözümü olsun. Bu durumda

$$\lambda_1 = TA_0^{-1} e^{(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)T}$$

$$\lambda_2 = e^{(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)T}$$

olmak üzere

$$|z_k| \le \lambda_1 \left|r^{(0)}\right| + \lambda_2 \sum_{j=1}^{k-1} \|R\|_{\infty,j}, \;\; 1 \le k \le N_0$$

değerlendirmesi doğrudur.

*İspat.* $v_i = z_{t,i}$ olsun. (4.22) problemini buna göre düzenlersek,

$$A_i z_{\bar{t}t,i} + B_i z_{\bar{t}t,i-N} + C_i z_{t,i}^0 + D_i z_{t,i-N}^0 + E_i z_{i-N} = R_i$$

$$A_i z_{\bar{t}t,i} + C_i z_{t,i}^0 = R_i - B_i z_{\bar{t}t,i-N} - D_i z_{t,i-N}^0 - E_i z_{i-N}$$

$$A_i v_{\bar{t},i} + \frac{C_i}{2}(v_i + v_{i-1}) = G_i$$

olur. Burada $G_i = R_i - B_i z_{\bar{t}t,i-N} - D_i z_{t,i-N}^0 - E_i z_{i-N}$ biçimindedir. Bu fark denklemini $v_i$'ye göre çözersek,

$$v_i = Q_i v_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{i} \phi_k\, Q_{i,k} \qquad (4.24)$$

olur. Burada,

$$Q_{i,k} = \begin{cases} 1, & k = i \\ \prod_{j=k+1}^{i} \dfrac{2A_i - hC_i}{2A_i + hC_i}, & 1 \le k \le i-1 \end{cases}, \qquad \phi_k = \frac{2h}{2A_i + hC_i} G_i$$

biçimindedir. (4.24) denkleminde $v_i = z_{t,i}$ ifadesini dikkate alırsak,

$$z_{i+1} = z_i + hQ_i v_0 + h \sum_{k=1}^{i} \phi_k\, Q_{i,k}$$

bulunur. Bu fark denklemini çözersek

$$z_i = z_1 + h\sum_{k=1}^{i-1} z_{t,0}\, Q_k + h\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{k} \phi_j\, Q_{k,j}$$

$$= -\frac{hr^{(0)}}{A_0} - \frac{hr^{(0)}}{A_0}\sum_{k=1}^{i-1} Q_k + h\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{k} \phi_j\, Q_{k,j}\,, \qquad i \geq 2$$

buluruz. $2A_i + hC_i > 0$ ve $0 < \frac{2A_i - hC_i}{2A_i + hC_i} < 1$ $(1 \leq i \leq N_0)$ olduğunu dikkate alır,

$$|z_i| \leq \frac{h|r^{(0)}|}{A_0} + \frac{h|r^{(0)}|(i-1)}{A_0}$$

$$+h\sum_{k=1}^{i-1}[\|R\|_{\infty,k} + (\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)(|z_{k-N+1}| + |z_{k-N}| + |z_{k-N-1}|)]$$

$$\leq \frac{hN_0|r^{(0)}|}{A_0} + h\sum_{k=1}^{i-1}[\|R\|_{\infty,k} + (\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)|z_k|]$$

ve sonra da Gronwall eşitsizliğinin fark benzerini kullanırsak,

$$|z_k| \leq TA_0^{-1} e^{(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)T}|r^{(0)}| + e^{(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)T}\sum_{k=1}^{i-1}\|R\|_{\infty,k}$$

elde ederiz.

Şimdi de son iki lemmanın sonucu olan yakınsaklık teoremini verelim.

**Teorem 4.3.** $u$, (1.1)-(1.2) probleminin ve $y$, (4.18)-(4.19) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\|y - u\|_{\infty,\omega_{N_0}} \leq Ch$$

değerlendirmesi doğrudur.

*İspat.* Lemma 4.1'i Lemma 4.2'de dikkate alırsak kolayca elde ederiz.

## 5. BULGULAR

Bu bölümde, sunduğumuz yeni şema ile klasik Euler şeması için bir örnek inceleyeceğiz. Her iki şemayı kullanarak elde ettiğimiz nümerik sonuçları tablolarda listeleyerek, kesin hataların maksimum değerlerini karşılaştıracağız.

Örnek 4.1'de verilen problemi ele alalım:

$u''(t) + 2u'(t) + u'(t-1) - u(t-1) + e^{-t} = 0,$

$u(t) = e^t,\ -1 \le t \le 0,\ u'(0) = -1$

Bu problemin kesin çözümü

$$u(t) = \begin{cases} 1 + e^{-t} - e^{-2t}, 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{2}(1+t) + (1-2e)e^{-t} + \frac{1}{2}[(1+3t)e^2 - 2]e^{-2t}, 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

biçimindedir. Problemin çözümü için elde ettiğimiz fark şemasındaki katsayıları bu örnek özelinde hesaplarsak:

$$A_0 = \frac{2}{1 - e^{-2h}},$$

$$B_0 = h^{-1} - \frac{2e^h - e^{2h} - 1}{(1 - e^{2h})h} + \left(\frac{1}{1 - e^{-2h}} - \frac{1}{2h}\right)\varphi(-N)$$
$$+ \left(\frac{3}{4h} - \frac{3-h}{2(1-e^{-2h})}\right)\frac{\varphi(1-N) - \varphi(-N)}{h},$$

$$A_i = \frac{1+e^{-2h}}{1-e^{-2h}}h,\ B_i = \frac{3h(1+e^{-2h})}{4(1-e^{-2h})} - \frac{h^2}{4} - \frac{3}{4},$$

$$C_i = 2,\ D_i = \frac{3}{2} - \frac{h(1+e^{-2h})}{2(1-e^{-2h})},\ E_i = -1,\ F_i = \frac{2(e^{-t_i} + e^{h-t_{i-1}} - 2e^{-t_{i-1}})}{h(1-e^{2h})},$$

elde ederiz.

Herhangi bir $N$ değeri için, noktasal kesin hata değerlerini $e_i^N$ ve bu noktalardaki maksimum hatayı ise $e^N$ gösterelim ve

$$e_i^N = |y_i - u_i|, e^N = \max_{0 \le i \le N} e_i^N$$

olarak tanımlayalım. Burada, $t_i$ düğüm noktaları için $u_i$ analitik çözümü, $y_i$ ise nümerik çözümü ifade etmektedir. $N$'in farklı değerleri için (4.18)-(4.19)'da sunulan metot (SM) ve (4.20)-(4.21)'de verilen Euler metodu (EM) kullanılarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgelerde ve bir grafikte verilmiştir.

Çizelge 5.1. (0,2] aralığında $N = 64$ için test probleminin nümerik sonuçları (SM).

| $t_i$ | $u_i$ | $y_i$ | $e_i^N$ |
|---|---|---|---|
| 0.125 | 1.1036961 | 1.1036953 | $8.277\text{E}-7$ |
| 0.250 | 1.1722701 | 1.1722687 | $1.472\text{E}-6$ |
| 0.375 | 1.2149227 | 1.2149208 | $1.974\text{E}-6$ |
| 0.500 | 1.2386512 | 1.2386489 | $2.365\text{E}-6$ |
| 0.625 | 1.2487566 | 1.2487540 | $2.670\text{E}-6$ |
| 0.750 | 1.2492364 | 1.2492335 | $2.907\text{E}-6$ |
| 0.875 | 1.2430881 | 1.2430850 | $3.092\text{E}-6$ |
| 1.000 | 1.2325442 | 1.2325409 | $3.235\text{E}-6$ |
| 1.125 | 1.2203862 | 1.2203905 | $4.365\text{E}-6$ |
| 1.250 | 1.2123285 | 1.2123368 | $8.219\text{E}-6$ |
| 1.375 | 1.2122725 | 1.2122821 | $9.654\text{E}-6$ |
| 1.500 | 1.2219502 | 1.2219598 | $9.585\text{E}-6$ |
| 1.625 | 1.2417225 | 1.2417311 | $8.636\text{E}-6$ |
| 1.750 | 1.2711252 | 1.2711324 | $7.223\text{E}-6$ |
| 1.875 | 1.3092394 | 1.3092450 | $5.617\text{E}-6$ |
| 2.000 | 1.3549343 | 1.3549382 | $3.990\text{E}-6$ |

Çizelge 5.2. (0,2] aralığında $N = 128$ için test probleminin nümerik sonuçları (SM).

| $t_i$ | $u_i$ | $y_i$ | $e_i^N$ |
|---|---|---|---|
| 0.125 | 1.1036961 | 1.1036959 | $2.069\text{E}-7$ |
| 0.250 | 1.1722701 | 1.1722698 | $3.681\text{E}-7$ |
| 0.375 | 1.2149227 | 1.2149222 | $4.936\text{E}-7$ |
| 0.500 | 1.2386512 | 1.2386506 | $5.914\text{E}-7$ |
| 0.625 | 1.2487566 | 1.2487560 | $6.675\text{E}-7$ |
| 0.750 | 1.2492364 | 1.2492357 | $7.268\text{E}-7$ |
| 0.875 | 1.2430881 | 1.2430873 | $7.730\text{E}-7$ |
| 1.000 | 1.2325442 | 1.2325433 | $8.089\text{E}-7$ |
| 1.125 | 1.2203862 | 1.2203872 | $1.091\text{E}-6$ |
| 1.250 | 1.2123285 | 1.2123306 | $2.055\text{E}-6$ |
| 1.375 | 1.2122725 | 1.2122749 | $2.413\text{E}-6$ |
| 1.500 | 1.2219502 | 1.2219526 | $2.396\text{E}-6$ |
| 1.625 | 1.2417225 | 1.2417246 | $2.159\text{E}-6$ |
| 1.750 | 1.2711252 | 1.2711270 | $1.806\text{E}-6$ |
| 1.875 | 1.3092394 | 1.3092408 | $1.404\text{E}-6$ |
| 2.000 | 1.3549343 | 1.3549353 | $9.974\text{E}-7$ |

Çizelge 5.3. $(0,2]$ aralığında $N = 64$ için test probleminin nümerik sonuçları (EM).

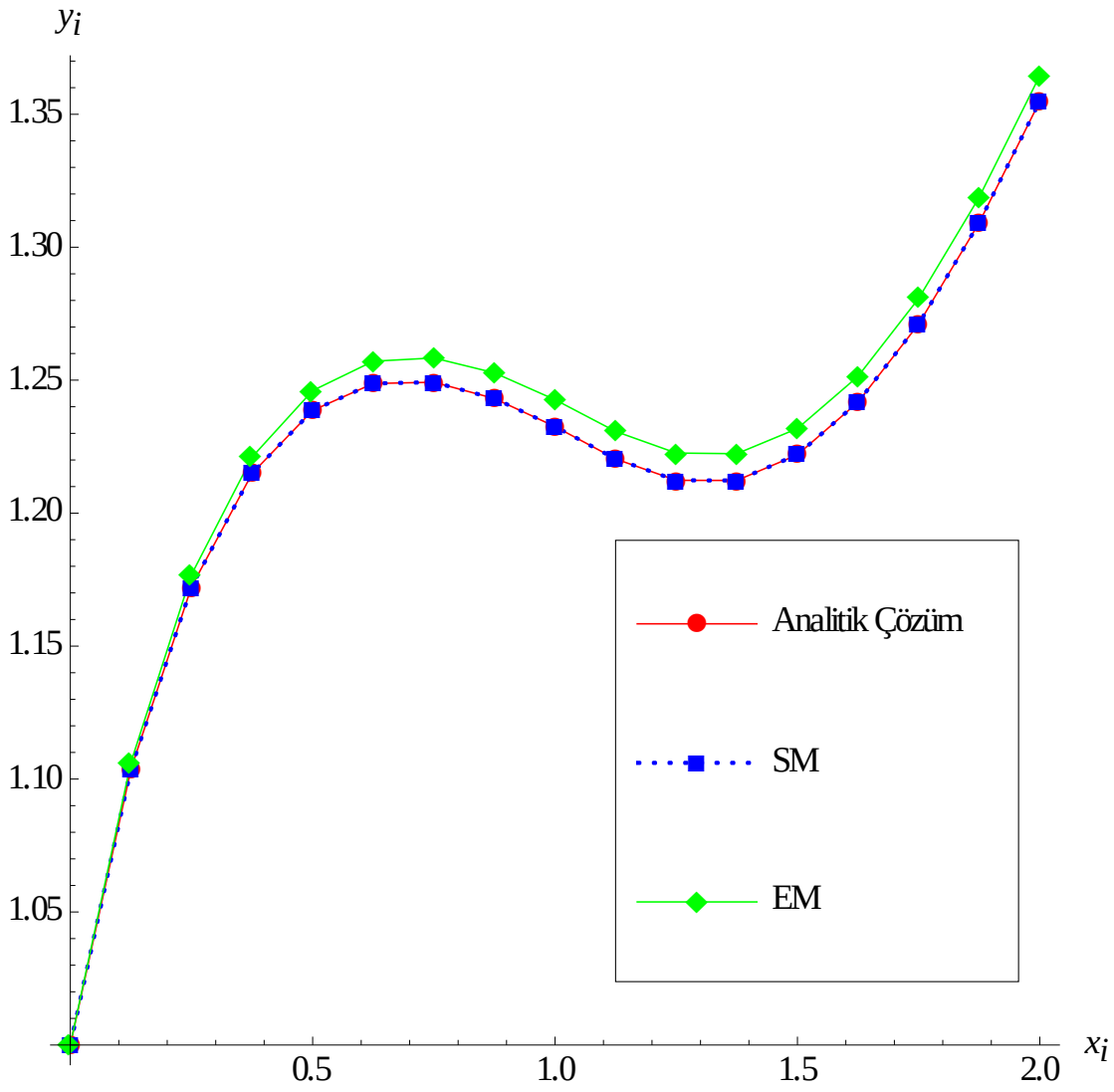
| $t_i$ | $u_i$ | $y_i$ | $e_i^N$ |
|---|---|---|---|
| 0.125 | 1.1036961 | 1.1062957 | 2.600E − 3 |
| 0.250 | 1.1722701 | 1.1768911 | 4.621E − 3 |
| 0.375 | 1.2149227 | 1.2211157 | 6.193E − 3 |
| 0.500 | 1.2386512 | 1.2460666 | 7.415E − 3 |
| 0.625 | 1.2487566 | 1.2571224 | 8.366E − 3 |
| 0.750 | 1.2492364 | 1.2583412 | 9.105E − 3 |
| 0.875 | 1.2430881 | 1.2527673 | 9.679E − 3 |
| 1.000 | 1.2325442 | 1.2426699 | 1.013E − 2 |
| 1.125 | 1.2203862 | 1.2307176 | 1.033E − 2 |
| 1.250 | 1.2123285 | 1.2226009 | 1.027E − 2 |
| 1.375 | 1.2122725 | 1.2223646 | 1.009E − 2 |
| 1.500 | 1.2219502 | 1.2318340 | 9.884E − 3 |
| 1.625 | 1.2417225 | 1.2514273 | 9.705E − 3 |
| 1.750 | 1.2711252 | 1.2807138 | 9.589E − 3 |
| 1.875 | 1.3092394 | 1.1062957 | 2.600E − 3 |
| 2.000 | 1.3549343 | 1.1768911 | 4.621E − 3 |

Çizelge 5.4. $(0,2]$ aralığında $N = 128$ için test probleminin nümerik sonuçları (EM).

| $t_i$ | $u_i$ | $y_i$ | $e_i^N$ |
|---|---|---|---|
| 0.125 | 1.1036961 | 1.1049940 | $1.298\text{E}-3$ |
| 0.250 | 1.1722701 | 1.1745781 | $2.308\text{E}-3$ |
| 0.375 | 1.2149227 | 1.2180167 | $3.094\text{E}-3$ |
| 0.500 | 1.2386512 | 1.2423569 | $3.706\text{E}-3$ |
| 0.625 | 1.2487566 | 1.2529384 | $4.182\text{E}-3$ |
| 0.750 | 1.2492364 | 1.2537885 | $4.552\text{E}-3$ |
| 0.875 | 1.2430881 | 1.2479284 | $4.840\text{E}-3$ |
| 1.000 | 1.2325442 | 1.2376087 | $5.065\text{E}-3$ |
| 1.125 | 1.2203862 | 1.2255527 | $5.167\text{E}-3$ |
| 1.250 | 1.2123285 | 1.2174656 | $5.137\text{E}-3$ |
| 1.375 | 1.2122725 | 1.2173198 | $5.047\text{E}-3$ |
| 1.500 | 1.2219502 | 1.2268938 | $4.944\text{E}-3$ |
| 1.625 | 1.2417225 | 1.2465769 | $4.854\text{E}-3$ |
| 1.750 | 1.2711252 | 1.2759216 | $4.796\text{E}-3$ |
| 1.875 | 1.3092394 | 1.1049940 | $4.778\text{E}-3$ |
| 2.000 | 1.3549343 | 1.1745781 | $4.803\text{E}-3$ |

Çizelge 5.5. Her iki yöntemdeki $e^N$ nin karşılaştırılması.

| $N$ | $e^N$(EM) | $e^N$(SM) |
|---|---|---|
| 32 | 2.066E − 2 | 3.906E − 5 |
| 64 | 1.034E − 2 | 9.766E − 6 |
| 128 | 5.169E − 3 | 2.442E − 6 |
| 256 | 2.584E − 3 | 6.104E − 7 |
| 512 | 1.292E − 3 | 1.526E − 7 |
| 1024 | 6.462E − 4 | 3.817E − 8 |




Şekil 5.1. Örnek 4.1 için hesaplanan sonuçların grafiği ($N = 64$).

# 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada ikinci mertebeden lineer gecikmeli diferansiyel denklem için başlangıç-değer probleminin kesin ve nümerik çözümleri ele alındı. Problemin analitik çözümü adımlar metodu ve Laplace dönüşümü yardımıyla elde edildi. Laplace dönüşümü ile sunulan yöntem adımlar yöntemine göre daha pratik olmasına rağmen ters Laplace dönüşümünün bulunması her zaman kolay olmadığı görülmüştür. Öte yandan, incelenen problem için, katsayıları integral biçiminde olan fark şeması ve Euler şeması kullanılarak nümerik çözümler geliştirildi. Metotların sonuçları bir örnek üzerinde test edildi. Buna göre, her bir metot için $N = 64$ ve $N = 128$ alınarak çeşitli düğüm noktalarındaki analitik çözüm, nümerik çözüm ve kesin hata değerleri ve $N$'in daha büyük değerleri için kesin hata değerleri Çizelge 5.1-5.5'te ve Şekil 5.1 gösterildi. Tablolardaki bu sonuçlar her iki yöntemin doğruluğunu ve tutarlılığını gösterir niteliktedir. Özellikle Çizelge 5.5'teki ve Şekil 5.1'deki sonuçlarla problemin nümerik çözümünde kullanılan her iki metot karşılaştırıldı. Bu sonuçlar, sunulan yeni metodun klasik Euler metoduna göre çok daha iyi olduğunu göstermektedir.

Elde edilen teorik ve nümerik sonuçlar, ikinci mertebeden lineer gecikmeli nötral (neutral) tip ve Volterra integro diferansiyel denklem içeren problemlerin çözümü için yol gösterici niteliktedir.

## KAYNAKLAR


Amirali, G., Amirali, H., 2018. ***Nümerik Analiz***. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Baker C.T.H., Bocharov G.A., Paul C.A.H., Rihan F.A., 1998. Modelling and analysis of time-lags in some basic patterns of cell proliferation. ***J. Math. Biol.,* 37**: 341-371.

Balachandran B., Nagy T.K., Gilsinn D.E., 2009. ***Delay Differential Equations.*** New York: Springer.

Bellen A., Maset S., Zennaro M., Guglielmi N., 2009. Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations. ***Acta Numerica,* 18**: 1-110.

Bellen A., Zennaro M., 2003. ***Numerical Methods for Delay Differential Equations.*** Oxford: Oxford University Press.

Bellman, R. E., Cooke, K. L., 1963. ***Differential-Difference Equations***. New York: Academic Press.

Benchohra M., Abbas S., 2015. ***Advanced Functional Evolution Equations and Inclusions***. Switzerland: Springer,.

Berezansky L., Domoshnitsky A., Gitman M., Stolbov V., 2015. Exponential stability of a second order delay differential equation without damping term. ***Applied Mathematics and Computation,* 258**: 483-488

Beuter A., Belair J., Labrie C., 1993. Feedback and delays in neurological diseases: a modeling study using dynamical systems. ***Bull. Math. Biol.,* 55**: 525-541.

Cimen E., 2019. A first order convergent numerical method for solving the delay differential problem. ***International Journal of Mathematics and Computer Science,* 14** (2): 387-402.

Cimen E., Ekinci Y., 2017. Numerical method for a neutral delay differential problem. ***International Journal of Mathematics and Computer Science,* 12** (1): 1-11.

Cimen E., Uncu S., 2020. On the solution of the differential equation via Laplace transform, ***Communications in Mathematics and Applications,*** Accepted.

Cimen E., Yatar S., 2020. Numerical solution of Volterra integro differential equation with delay. ***Journal of Mathematics and Computer Science-JMCS***, **20** (3): 255-263.

Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M., 2016. ***Functional Differential Equations: Advances and Applications.*** New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Curato I. V., Mancino M. E., Recchioni M. C., 2018. Spot volatility estimation using the Laplace transform. ***Econometrics and Statistics,* 6**: 22-43.

Diblik J., Kudelcikova M., Ruzickova M., 2019. Positive solutions to delayed differential equations of the second-order. ***Appl. Math. Lett.,* 94**: 52-58.

Driver R. D., 1977. ***Ordinary and Delay Differential Equations.*** New York: Springer-Verlag.

Eljaoui E., Melliani S., Chadli L. S., 2018. Aumann fuzzy improper integral and its application to solve fuzzy integro-differential equations by Laplace transform method. ***Advances in Fuzzy Systems,* Volume 2018, Article ID 9730502**: 1-10.

El'sgolts L. E., Norkin S.B., 1973. ***Introduction to the Theory and Application of Differential Equations, with Deviating Arguments.*** New York: Academic Press.

Erdogan, F., Amiraliyev, G. M., 2012. Fitted finite difference method for singularly perturbed delay differential equations. ***Numer Algor,* 59:** 131-145.

Erneux T., 2009. ***Applied Delay Differential Equations.*** New York: Springer.

Fatoorehchi H., Alidadi M., 2017. The extended Laplace transform method for mathematical analysis of the Thomas–Fermi equation. ***Chinese Journal of Physics,*** **55**: 2548–2558.

Foley C., Mackey M.C., 2009. Dynamic hematological disease: a review, ***J. Math. Biol.,*** **58**: 285–322.

Getto P., Waurick M., 2016. A differential equation with state-dependent delay from cell population biology. ***J. Differential Equations,*** **260**: 6176-6200.

Gilsinn, D.E., 2002. Estimating critical Hopf Bifurcation Parameters for a second-order delay differential equation with application to machine tool chatter. ***Nonlinear Dynamics,*** **30**(2): 103-154.

Gopalsamy K., 1992. ***Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics.*** Netherlands: Springer.

Guo S., Ma W., 2016. Global behavior of delay differential equations model of HIV infection with apoptosis. ***Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B,*** **21**: 103-119.

Hale J.K., Lunel S.M.V., 1993. ***Introduction to Functional Differential Equations.*** New York: Springer-Verlag.

Hopfield J.J., 1984. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. ***Proc. Natl. Acad. Sci.,*** **81**: 3088-3092.

Hu H. Y., Wang Z. H., 2002. ***Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback.*** New York: Springer-Verlag.

Ilea V.A., Otrocol D., 2014. Some properties of solutions of a functional-differential equation of second order with delay. ***Sci. World J.,*** **Volume 2014, Article ID 878395**: 1-8.

Keane A., Krauskopf B., Postlethwaite C.M., 2017. Climate models with delay differential equations. ***Chaos,*** **27**: 1–15.

Kolmanovskii V., Myshkis A., 1999. ***Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations***. Netherlands: Kluwer Academic.

Kyrychko Y.N., Hogan S.J., 2010. On the use of delay equations in engineering applications. ***J. Vib. Control,*** **16**(7–8): 943–960.

Liu H., Xiao A., Su L., 2013. Convergence of variational iteration method for second-order delay differential equations. ***J. Appl. Math.,*** **Volume 2013, Article ID 634670**: 1-9.

Liz E., Röst G., 2013. Global dynamics in a commodity market model. ***J. Math. Anal. Appl.,*** **398:** 707-714.

Li W., Huang C., Gan S., 2010. Delay-dependent stability analysis of trapezium rule for second order delay differential equations with three parameters. ***Journal of the Franklin Institute,*** **347**: 1437–1451.

Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Fink A. M., 1991. ***Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives.*** Dordrecht: Springer.

Rezaei H., Jung S. M., Rassias T. M., 2013. Laplace transform and Hyers-Ulam stability of linear differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.,*** **403**: 244–251.

Rihan F. A., Lakshmanan S., Maurer H., 2019. Optimal control of tumour-immune model with time-delay and immuno-chemotherapy. ***Applied Mathematics and Computation,*** **353**:147–165.

Ross, S. L., 1984. ***Differential Equations.*** Third Edition. Canada: John Wiley & Sons.

Seong H. Y., Majid Z. A., 2017. Solving second order delay differential equations using direct twopoint block method. ***Ain Shams Engineering Journal,* 8**: 59-66.

Seong H. Y., Majid Z. A., Ismail F., 2013. Solving second-order delay differential equations by direct Adams-Moulton method. ***Mathematical Problems in Engineering,* Volume 2013, Article ID 261240**: 1-7.

Subburayan V., 2018. An hybrid initial value method for singularly perturbed delay differential equations with interior layers and weak boundary layer. ***Ain Shams Engineering Journal,* 9:** 727–733.

Subburayan V., Ramanujam N., 2012. Asymptotic initial value technique for singularly perturbed convection–diffusion delay problems with boundary and weak interior layers. ***Appl. Math. Lett.,* 25**(12): 2272–2278.

Vallee R., Dubois M., Cote M., Delisle, C., 1987. Second-order differential-delay equation to describe a hybrid bistable device. ***Phys. Rev.,* 36**: 1327-1332.

Villasana M., Radunskaya A., 2003. A delay differential equation model for tumor growth. ***J. Math. Bio.,* 47**: 270-294.

Wang H., Hu H., 2003. Remarks on the perturbation methods in solving the second-order delay differential equations. ***Nonlinear Dynamics,* 33**: 379–398.

Wang Y., Lian H., Ge W., 2007. Periodic solutions for a second order nonlinear functional differential equation. ***Applied Mathematics Letters,* 20**: 110–115.

Yan J., 2011. Existence of oscillatory solutions of forced second order delay differential equations. ***Appl. Math. Lett.,* 24**: 1455–1460.

Yi L., Wang Z., 2014. Legendre-Gauss spectral collocation method for second order nonlinear delay differential equations. ***Numer. Math. Theor. Meth. Appl.,* Vol. 7, No. 2**: 149–178.

Zarrinkamar S., Panahi H., Hosseini F., 2017. Laplace transform approach for one-dimensional Fokker-Planck equation. ***U.P.B. Sci. Bull. Series A.,* 79**(3).

Zeng X., Xiong Z., Wang C., 2016. Hopf bifurcation for neutral-type neural network model with two delays. ***Appl. Math. Comput.,* 282**: 17-31.

Zhao J., Fan Y., Xu Y., 2017. Delay-dependent stability of symmetric Runge-Kutta methods for second order delay differential equations with three parameters. ***Applied Numerical Mathematics,* 11**: 103–114.

# ÖZ GEÇMİŞ

1990 yılında Hakkari'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Hakkari'de tamamladı. Yükseköğrenimine, 2008 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde başladı ve 2013 yılında mezun oldu. 2017 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2015 yılında Milli Eğitim Bakanlığına bağlı Van Necip Fazıl Kısakürek Anadolu Lisesi'ne matematik öğretmeni olarak atandı. Halen bu okulda görevine devam etmektedir.

**T.C**
**VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU**

**Tarih:** 09/07/2020

Tez Başlığı / Konusu: **Gecikmeli Diferansiyel Denklem için Başlangıç Değer Problemi ve Çözümleri**

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 17 sayfalık kısmına ilişkin, 02/07/2020 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNITIN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 8 (SEKİZ) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:
- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

09/07/2020

Adı Soyadı: Şevket ÜNCÜ
Öğrenci No: 19910001320
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik
Statüsü: Y. Lisans ☒ Doktora ☐

**DANIŞMAN ONAYI**
UYGUNDUR

Doç. Dr. Erkan ÇİMEN

**ENSTİTÜ ONAYI**
UYGUNDUR

(Unvan, Adı Soyadı, İmza)